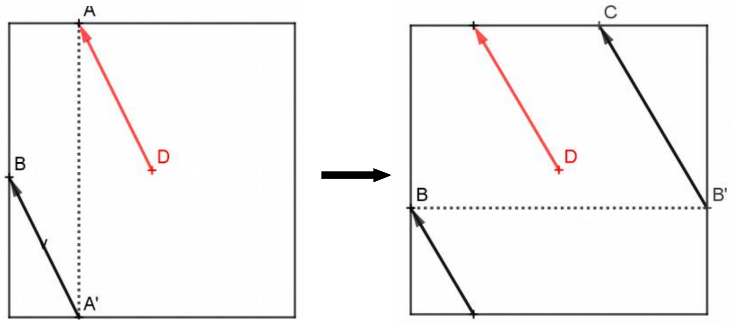
Balade en chameau

Année 2018 - 2019

Élèves de 4ème : Mathieu Chazottes, Mathis Colin, Yiwen Le Blay, Adrien Merlet, César Tapie.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence Ferry et Claudie Asselain.
Chercheur : Raphaël Tinarrage.

Le sujet : Nous sommes avec un chameau au centre d'un désert, décrit par un carré de 10 km recollé sur les bords. Lorsqu'on traverse un côté, on réapparaît au même endroit sur le côté opposé. Nous choisissons une direction et lançons notre chameau, depuis le centre, en ligne droite dans cette direction.



Le chameau part de D, il arrive en A réapparaît en A', arrive en B, réapparaît en B'...

Fig1 et fig2

On se demande si le chameau va toujours revenir au point de départ et si c'est le cas, sachant que le chameau se déplace à 3 km/h, combien de temps il mettra.

Résultats : Nous avons conjecturé des conditions sur la direction à prendre, pour que le chameau revienne au point de départ. Nous avons établi cette conjecture à partir de nombreux exemples. Nous avons, en gardant ces conditions, calculé la distance parcourue par le chameau pour revenir au point de départ ; ce qui a permis d'estimer le temps qu'il mettrait.

I – Premiers essais

Nous avons tout d'abord étudié deux cas particuliers :

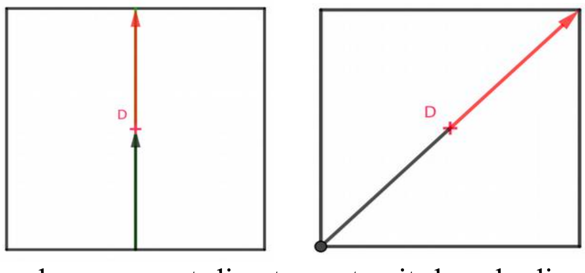


Fig3 et fig4

Le chameau part directement soit dans la direction du milieu du côté du carré soit dans la direction du sommet du carré. Il réapparaît à l'opposé et revient directement au centre du carré en ayant parcouru une seule ligne.

Voici deux exemples de tracé où le chameau semble revenir au point de départ.

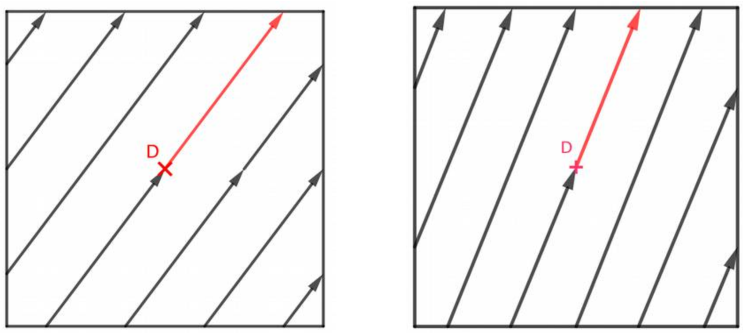


Fig5 et fig6

Nous avons tracé de nombreux exemples à la main et il semble que le chameau revienne toujours au centre. Mais tracer des parallèles est long et imprécis. On a eu l'idée de découper le carré en un quadrillage, de placer un repère dont l'origine est le centre du carré.

II – Quadrillage et repère

Comment découper le carré de façon à faciliter le tracé des parallèles ?
Si on veut par exemple que le chameau se dirige vers « 4/7 » (on nommera comme cela le chameau qui partira dans une direction pour arriver sur le premier côté au point de coordonnée (4/7 ; 1) (1)), on découpera le carré en 14×14 carrés.

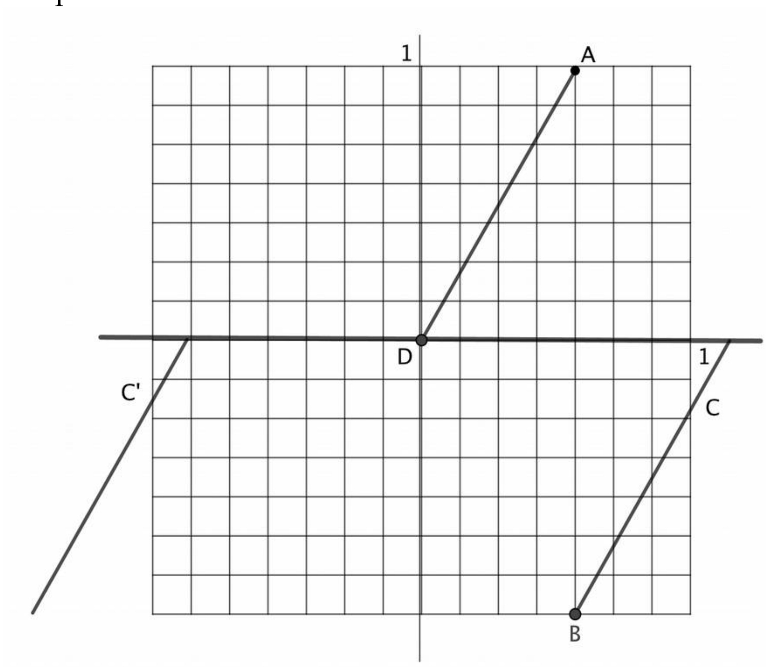
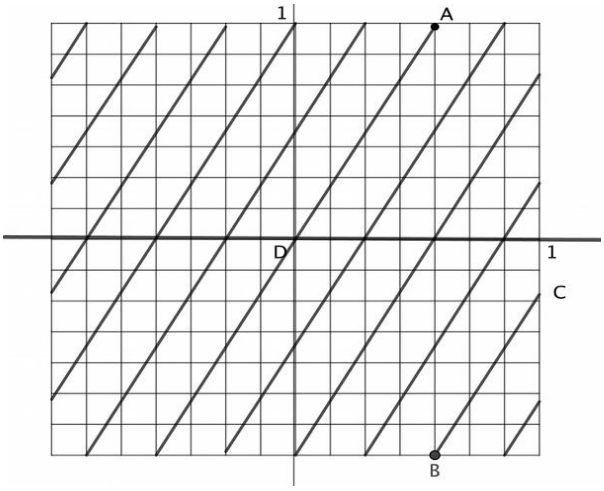


fig7

Le chameau part de D et va en A, facilement repérable avec le quadrillage ; pour placer A, on avance horizontalement de 4 carreaux et on monte de 7. Le point B se place également facilement. Pour tracer la parallèle à la direction choisie au départ, on avance de 4 carreaux horizontalement et on monte de 7 ; on trouve C mais on sort du carré de 1 carreau. Pour trouver C', on reporte donc ce carreau «en plus » de l'autre côté et on continue ainsi.

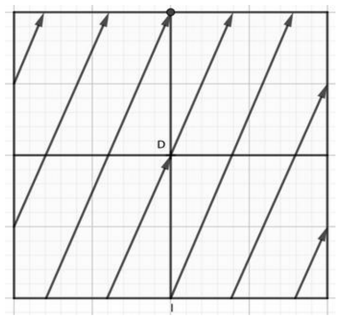
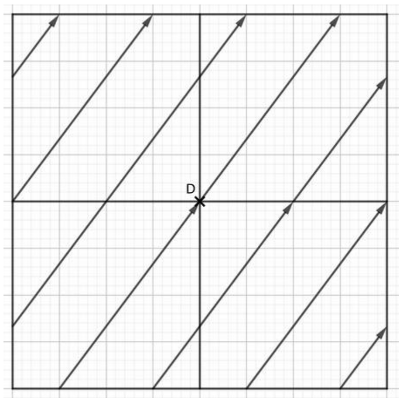
Voici le tracé final :



Le chameau revient à son point de départ. En regardant le nombre de lignes « complètes » que parcourt le chameau, elles se complètent par paire : on en compte 7.
En allant de gauche à droite :
La 1ère complète la 8ème, la 2ème complète la 9ème et ainsi de suite. Seules les 5, 6 et 7ème sont entières.

fig8

Voici deux autres exemples.

	Le chameau ici, part à 4/10, que l'on peut réduire en 2/5. Il revient à sont point de départ. Il parcourt 3 lignes entières plus 2 qui se complètent les unes avec les autres ce qui fait au total 5 lignes entières.
	Le chameau part à 3/4, il revient à sont point de départ. Il parcourt au total 4 lignes entières.

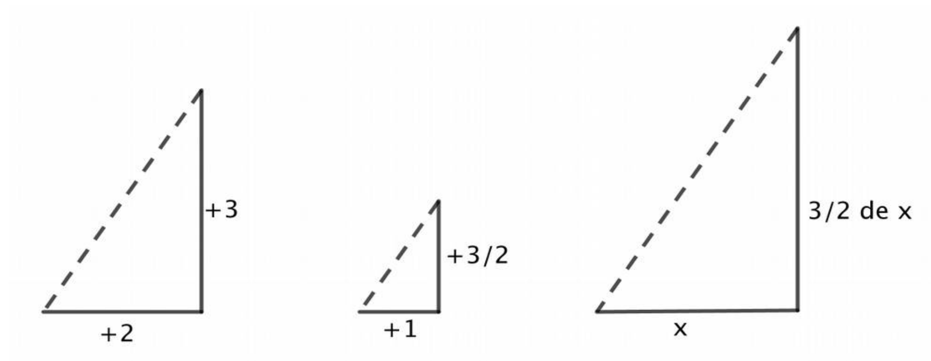
Après de nombreux tracés, nous avons pu faire une conjecture que nous n'avons pas réussi à démontrer.

Conjecture : *le nombre de lignes complètes que le chameau fait pour revenir à l'oasis est égal au dénominateur de la fraction irréductible utilisée au départ comme direction* (2).

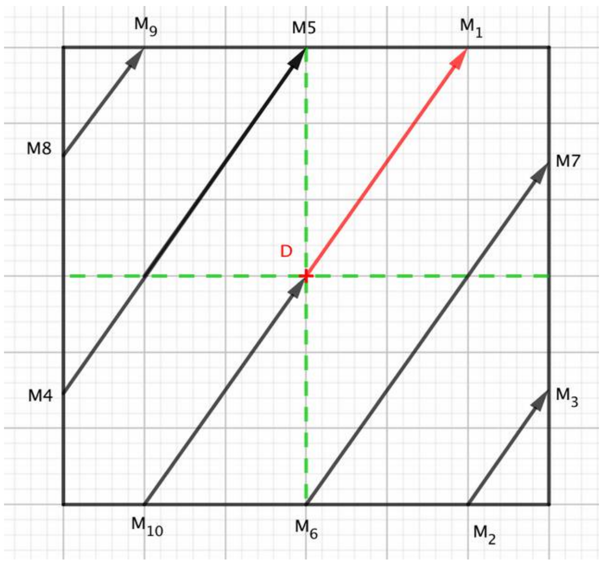
En admettant cette conjecture nous allons pouvoir calculer la distance parcourue par le chameau (paragraphe IV).

III – Retour au point de départ

Nous avons expliqué précédemment que lorsque le chameau part, par exemple, à « 2/3 », c'est comme s'il se déplaçait de 2 carreaux horizontalement et de 3 verticalement. Il y une relation de proportionnalité entre les côtés de l'angle droit du triangle rectangle ainsi formé.



Ainsi, plus généralement, si le chameau part à p/q, lorsqu'on avance horizontalement de x carreaux, on monte verticalement de q/p de x.
Nous allons utiliser cette remarque pour calculer les coordonnées de chaque point de contact avec les bords du carré.

	Explications	**Points**
	Point de départ.	D(0 ; 0)
	On lance le chameau à « 2/3 ».	M_1(2/3 ; 1)
	On réapparaît en face.	M_2(2/3 ; –1)
	On avance de 1/3, on monte donc de 3/2 de 1/3, c'est à dire de 1/2.	M_3(1 ; –1 + 1/2) M_3(1 ; –1/2)
	On réapparaît en face.	M_4(–1 ; –1/2)
	Pour atteindre une ordonnée de 1, on monte de 3/2 donc on avance de 1.	M_5(0 ; 1)
	On réapparaît en face.	M_6(0 ; –1)
fig12	On continue ainsi.	M_7(1 ; 1/2) M_8(–1 ; 1/2) M_9(–2/3 ; 1) M_{10}(–2/3 ; –1)
	On revient au premier point. Le milieu de [$M_{10}M_{11}$] est le point de départ D.	M_{11}(2/3 ; 1) = M_1

Nous avons donc démontré ici que le chameau revient au point de départ. Nous avons fait cette même démonstration dans de nombreux exemples et nous pouvons conjecturer que le chameau revient au point de départ lorsqu'il part avec une direction « p/q » avec p/q une fraction. S'il part avec un angle totalement aléatoire ou en touchant le côté du carré n'importe où, nous ne sommes pas sûrs qu'il reviendra au point de départ. Nous avons créé un programme Scratch qui nous a permis de tester de nombreuses directions, mais l'épaisseur du tracé ne permettait pas une précision fiable sur le placement des points et notamment le point de départ (3).

IV – Calcul de la distance parcourue

Dans cette partie, nous supposons que le chameau part dans une direction « p/q », avec p et q des nombres entiers. Nous pourrons alors calculer la distance parcourue.
Voici tout d'abord un exemple.
Le chameau part à « –3/7 » ; on nomme L le côté du carré.

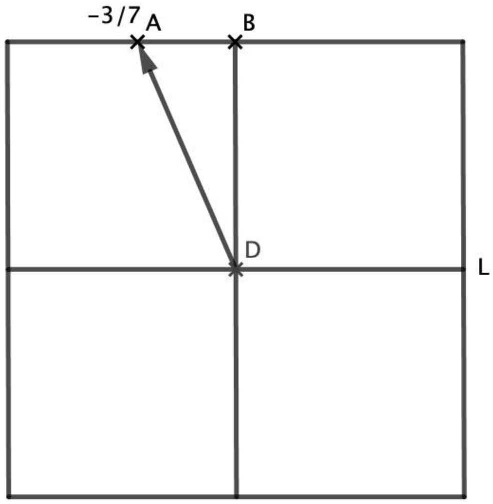


fig13

Nous allons tout d'abord calculer AD, puis nous multiplierons le résultat par deux pour avoir une ligne entière, puis nous multiplierons ce résultat par le nombre de lignes entières (comme vu au II) pour connaître la longueur totale parcourue par le chameau.
ABD est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$AD^2=\left(\frac{3}{7}\times\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$AD^2=\frac{9}{49}\times\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{4}$$

$$AD^2=\frac{L^2}{4}\times\left(\frac{9}{49}+1\right)$$

$$AD^2=\frac{L^2}{4}\times\left(\frac{9}{49}+\frac{49}{49}\right)$$

$$AD^2=\frac{L^2}{4}\times\frac{58}{49}$$

$$AD=\sqrt{\frac{L^2}{4}}\times\frac{\sqrt{58}}{\sqrt{49}}$$ Donc : $$AD=\frac{L}{2}\times\frac{\sqrt{58}}{7}$$

Le trajet du chameau est donc : $\frac{L}{2}\times\frac{\sqrt{58}}{7}\times2\times7=L\times\sqrt{58}$ Il peut aussi s'écrire : $L\times\sqrt{7^2+3^2}$

Après de nombreux exemples, voici quelques résultats :

Lorsque le chameau se dirige vers « 1/8 », la distance est de : $d=L\sqrt{65}=L\sqrt{1^2+8^2}$

pour 3/7 : $d=L\sqrt{58}=L\sqrt{3^2+7^2}$

pour 2/5 : $d=L\sqrt{29}=L\sqrt{2^2+5^2}$

pour 5/6 : $d=L\sqrt{61}=L\sqrt{5^2+6^2}$

Nous remarquons qu'à chaque fois, la distance est égale au produit de la longueur du côté du carré par la racine carré de la somme du carrée du numérateur et du carré du dénominateur de la fraction prise au départ. Notre conjecture est donc la suivante : pour un fraction de départ p/q irréductible, le chameau parcourt : $L\times\sqrt{p^2+q^2}$

Nous allons démontrer ce résultat.

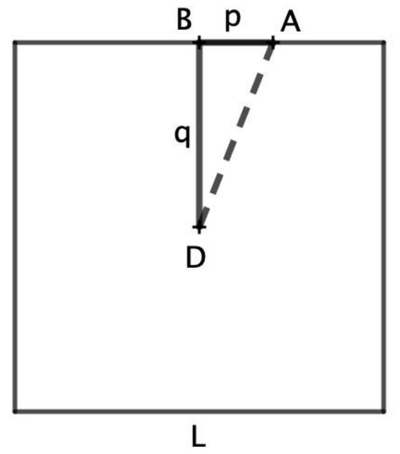


fig14

ABD est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AD^2 &= \left(\frac{p}{q}\times\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{q^2}\times\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{4} \\ &= \frac{L^2}{4}\times\left(\frac{p^2}{q^2}+1\right) \\ &= \frac{L^2}{4}\times\left(\frac{p^2}{q^2}+\frac{q^2}{q^2}\right) \end{aligned}$$

$AD^2=\frac{L^2}{4}\times\frac{p^2+q^2}{q^2}$ donc : $AD=\sqrt{\frac{L^2}{4}\times\frac{p^2+q^2}{q^2}}=\frac{L}{2\text{q}}\times\sqrt{p^2+q^2}$

Avec notre conjecture sur le nombre de lignes complètes, la distance parcourue par le chameau est donc :

$$AD\times q\times 2=L\times\sqrt{p^2+q^2}$$

V – Résolution du problème

Nous devons à présent trouver le temps que met le chameau pour revenir à l'oasis.
Nous savons que la vitesse v du chameau est égale au quotient de la distance d parcourue par le temps t mis pour la parcourir. Soit : v =d/t, donc t = d/v.

Sachant que le chameau va à une vitesse de 3km/h et que L=10, le temps qu'il met pour revenir à l'oasis est :

$t=\frac{d}{v}=\frac{L\times\sqrt{p^2+q^2}}{3}=\frac{10\sqrt{p^2+q^2}}{3}$ p et q étant les entiers utilisés dans le précédent paragraphe.

Exemple 1 : le chameau part dans la direction « 1/8 »

$t=\frac{10\sqrt{1+64}}{3}=10\frac{\sqrt{65}}{3}$ Il mettra environ 27 heures pour revenir à l'oasis ; il parcourra environ 81 km.

Exemple 2 : le chameau part dans la direction « 3/7 »

$t=\frac{10\sqrt{9+49}}{3}=10\frac{\sqrt{58}}{3}$ Il mettra environ 25 heures pour revenir à l'oasis ; il parcourra environ 76 km.

Exemple 3 : le chameau part dans la direction « 2/5 »

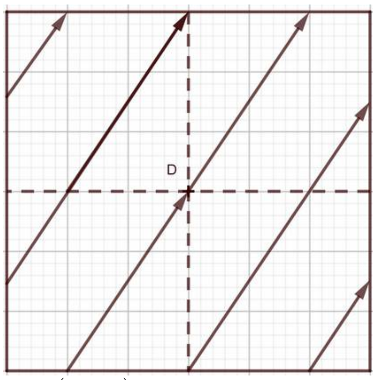
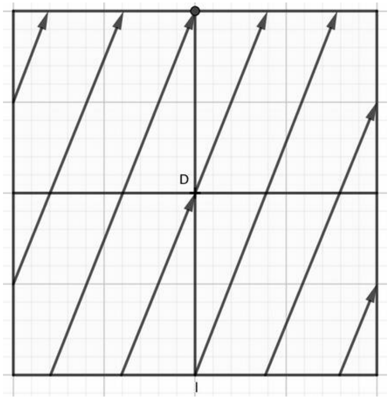
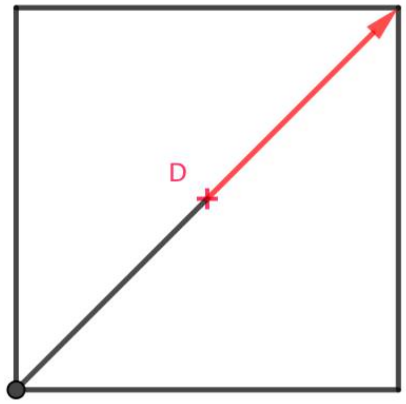
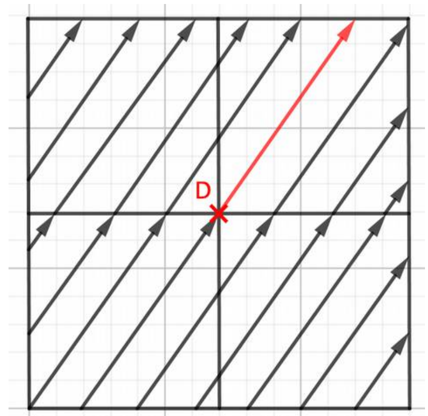
$t=\frac{10\sqrt{4+25}}{3}=10\frac{\sqrt{29}}{3}$ Il mettra environ 18 heures pour revenir à l'oasis ; il parcourra environ 54 km.

VI – Piste de recherche

Voici une dernière remarque que nous avons pu faire mais qui est restée à l'état de conjecture : il s'agit du nombre N de points d'intersection entre les lignes décrites par le chameau et les côtés du carré.

Cas n°1 : le chameau part à « p/q » et q est pair. N semble toujours valoir : $(p+q)\times 2$
Dans le dernier exemple de II, nous avons une illustration de cette conjecture. Le chameau va à « 3/4 » et N vaut bien $(3+4)\times 2=14$.

Cas n°2 : le chameau part à « p/q » et q est impair.
Nous rencontrons alors deux possibilités : N = $(p+q)\times 2$ ou bien $(p+q)\times 2-2$.
Ce dernier résultat semble se produire lorsqu'une des lignes décrites par le chameau arrive dans un des coins du carré. Voici des illustrations de cette conjecture.

<table>
<tr>
<td>Le chameau part à « 2/3 »

$N=(2+3)\times 2=10$</td>
<td>Le chameau part à « 2/5 »

$N=(2+5)\times 2=14$</td>
</tr>
<tr>
<td>Le chameau part à « 1/1 »

$(1+1)\times 2-2=2$</td>
<td>Le chameau part à « 5/7 »

$(5+7)\times 2-2=22$
fig15</td>
</tr>
</table>

Nous n'avons pas encore trouvé de démonstration à cette conjecture qui semble être vraie au vu de tous les exemples qu'on a pu prendre.

Notes d'édition

(1) Dans les exemples, le "désert" est représenté par le carré des points d'abscisse et d'ordonnée comprises entre –1 et +1 dans un repère orthonormé. Tous ces exemples sont pour des cas où le premier côté rencontré est le bord supérieur (ordonnée +1), mais on peut facilement généraliser aux autres cas en utilisant les symétries.

(2) Il faudrait remplacer dénominateur par numérateur dans le cas où celui-ci est supérieur au dénominateur.

(3) Même si les auteurs ont jugé les résultats non satisfaisants, il aurait été intéressant de donner plus de détails sur le programme Scratch, ainsi que quelques illustrations des résultats obtenus.