

LES DOMINOS ET LES ÉCHIQUIERS

Année 2018 - 2019

Mathieu Leroy, Clara Fouquet, Lucie Le Bourgeois, Sacha Menez-Allanic, élèves de troisième.

Encadrés par : M. Champion

Établissement : Collège Fernand Puech de Laval (53)
Etablissement jumelé : Lycée Douanier Rousseau de Laval.

Chercheur : François Ducrot, Université d'Angers.

I/ Présentation du sujet et résultats trouvés :

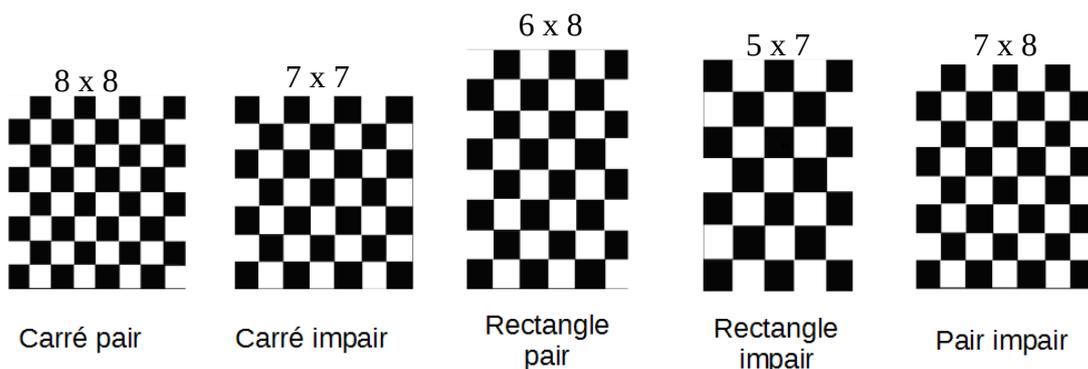
On cherche à recouvrir un échiquier de taille $n \times p$ par des dominos de taille 2×1 . Vous saurez sans doute très vite découvrir à quelles conditions c'est possible ou pas. Maintenant, si on enlève un certain nombre de cases de l'échiquier est-ce toujours possible ? A vous de trouver des conditions pour que cela soit possible.

II/ Annonce des conjectures et résultats obtenus

Nous avons pu montrer que, suivant la parité du nombre de cases des échiquiers, on peut ou non, les recouvrir, en retirant une ou deux cases.

III/ Appellations :

Pour simplifier la communication nous avons introduit des appellations pour les échiquiers.



On considère que les cases noires sont dans les coins (si possible).

Préambule :

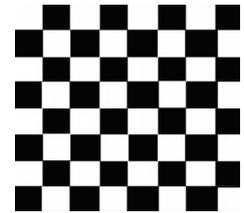
Un domino recouvrant deux cases, obligatoirement une case blanche et une case noire, il existe alors deux conditions nécessaires pour qu'un échiquier soit recouvert, après un retrait éventuel de cases. Il faut qu'il ait :

- un nombre pair de cases
- le même nombre de cases blanches et de cases noires.

IV/ En n'enlevant aucune case :

a) Carré et rectangle pairs :

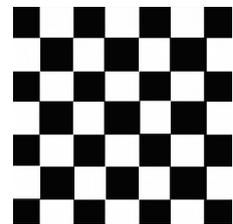
Pour un carré et rectangle pairs cela est possible car chaque côté est pair et que le produit de 2 nombres pairs est égal à un nombre pair.



8x8

b) Carré et rectangle impairs :

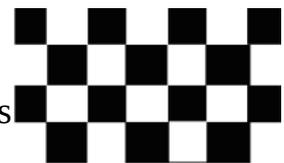
Pour un carré et un rectangle impairs cela n'est pas possible car un produit de nombres impairs donne un nombre impair.



7x7

c) Rectangle pair impair :

Pour un rectangle pair impair cela est possible car le nombre de cases est pair on peut donc le remplir. Il suffit de placer les dominos parallèlement au côté pair.



4x7

V/ En enlevant une seule case

a) Carré et rectangle pairs :

Pour un carré et rectangle pairs cela ne fonctionne pas car pair moins une case est égal à impair, on ne peut donc pas le remplir.

b) Carré et rectangle impair :

Pour un carré et rectangle impairs cela fonctionne car impair moins une case est égal à pair donc on peut le remplir. (voir partie VIII). Il faut de plus que les nombres de cases noires et blanches soient égaux. (voir partie VI a.)

c) Rectangle pair impair :

Pour un rectangle pair impair cela ne fonctionne pas car le nombre de cases devient impair, on ne peut donc pas le remplir.

VI/ En enlevant deux cases:

a) Pour un carré et un rectangle pairs :

Nous pouvons le remplir que si l'on enlève une case noire et une case blanche pour qu'il y ait autant de cases noires que de blanche

Pour vous le prouver voici une démonstration :

Nous savons qu'il y a autant de cases blanches que de noires ($B=N$) dans un échiquier de côté pair donc si on enlève deux cases de même couleur, il y aura des cases qui ne pourront pas être remplies puisque un domino recouvre une case blanche et une case noire. (voir VIII)

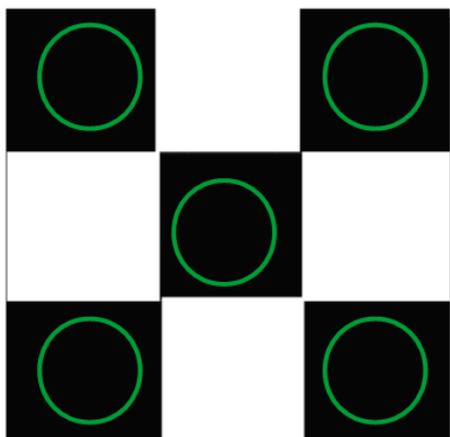
b) Pour un carré et rectangle impairs :

Nous ne pouvons pas le remplir car un nombre impair moins deux cases est égal à un nombre impair.

c) Pour un rectangle pair-impair :

C'est la même démonstration que pour un carré ou un rectangle pair (voir a et VII).

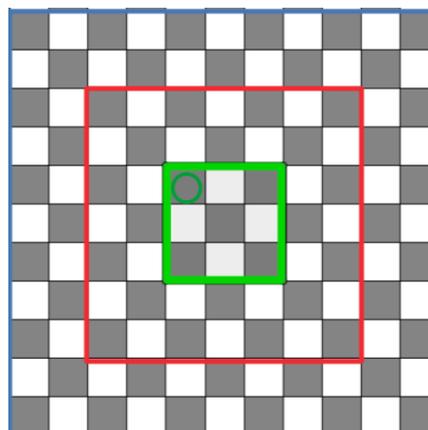
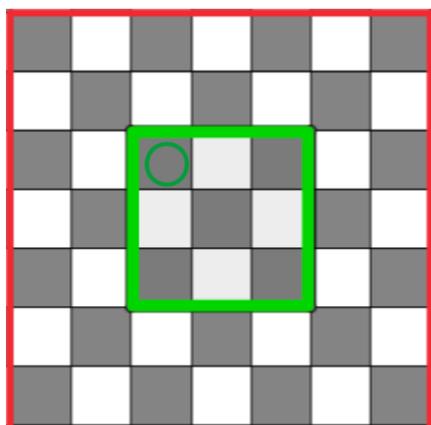
VII/ Technique pour les impairs en enlevant une case :



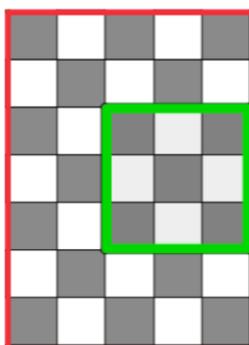
Les cases entourées sont les positions des cases que l'on peut enlever dans le 3x3.

Pour simplifier le remplissage des échiquiers impairs nous avons créé une technique de remplissage.

Cette technique consiste, à partir d'un échiquier 3x3, à l'agrandir d'un contour de deux lignes et colonnes.



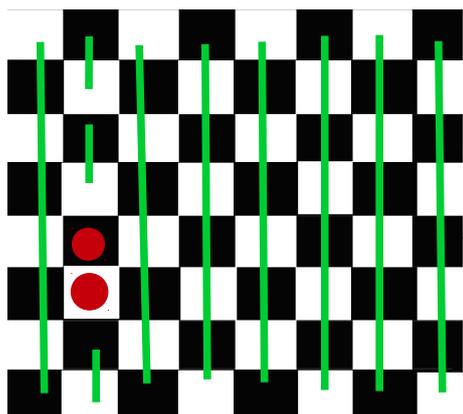
Puis on répète cette opération jusqu'à arriver au bord de l'échiquier.



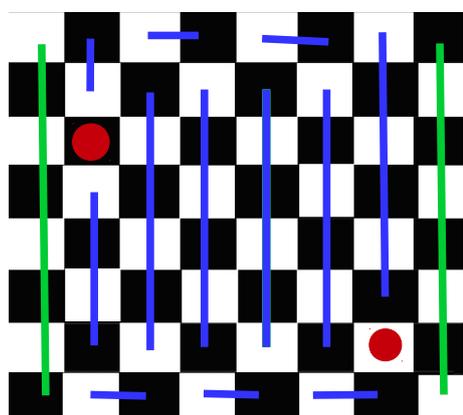
De même cette technique fonctionne pour les rectangles impairs.

On choisit la case à enlever que l'on place alors dans un carré 3x3. Puis on agrandit l'échiquier avec le contour de 2 cases, recouvrable par des dominos.

VIII/ Technique pour les pairs en enlevant deux cases :



Lorsque que les deux cases enlevées sont sur la même colonne (ou ligne), puisque l'échiquier est pair on peut remplir les colonnes « vides » (ou lignes), puis remplir très facilement la colonne contenant les cases enlevées.



Lorsque deux cases sont enlevées mais pas dans la même colonne (ou ligne) nous enlevons les colonnes ne contenant pas de cases enlevées (en vert) et nous remplissons le reste (en bleu).

IX/ CONCLUSION

De par ces recherches ci-dessus, nous pouvons affirmer que les conditions nécessaires vues en préambule, sont aussi suffisantes lorsqu'on retire une ou deux cases.