Triangulation

Année 2016 – 2017

Imane BENALI, Rim BAHOUANE, Shakira ASKANDER, Elsa LEYDIS, Laura LECOCQ, Baptiste DONADIO, Thomas PATAULT, Aurélia STAMM, Llewelyn BARRE, élèves des collèges Jolimont et Michelet de Toulouse (classe de 4ème)

Encadrés par Meriem Maïouf et Jean-Christophe Duprat

Chercheuse : Emily Burgunder (Institut de Mathématiques de Toulouse)

Sujet.

Un agriculteur possède un champ de forme polygonale et voudrait le découper en parcelles triangulaires pour ses chèvres.

Questions :

- De quelle manière peut-on découper un polygone en un nombre minimal de triangles ?
- Combien de découpages différents y-a-t-il par polygone ?

Réponse :

Nous avons, pour les polygones dont les *n+2* côtés (1) ne rentrent pas à l'intérieur, mis en évidence que le nombre de découpages est donné par la formule :

$$c_n = \frac{2^n \times (2\mathrm{n}-1) \times (2\mathrm{n}-3) \times \ldots \times 1}{(n+1) \times n \times \ldots \times 1}$$

Nos premiers pas.

Nous avons commencé à compter toutes les possibilités de découpages dans des polygones réguliers : un triangle équilatéral, un carré, etc…
Pour le triangle, le carré et le pentagone nous avons trouvé ces découpages :

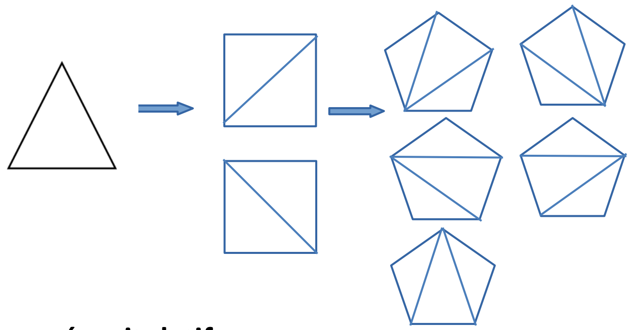
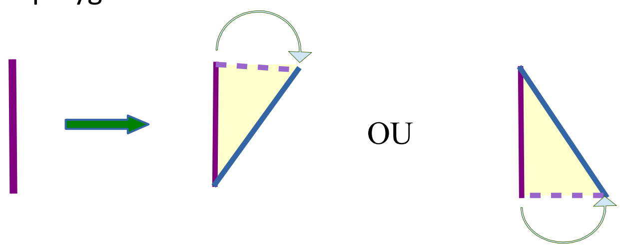


Tableau récapitulatif :

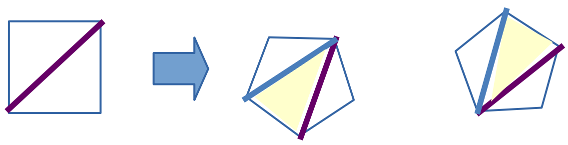
Polygones	Nombre de découpages	Nombre de triangles (que l'on aperçoit)
Triangle	1	1
Carré	2	2
Pentagone	5	3
Hexagone	14	4
Heptagone	42	5

Formules de récurrence.

Nous nous sommes dit que pour décrire tous les découpages d'un polygone, on pouvait se servir des découpages du polygone avec un côté de moins et « ouvrir » chaque arête de deux manières différentes :



Exemple pour passer du carré au pentagone :



Ce procédé nous a permis de passer d'un polygone à un autre (du triangle au carré, du carré au pentagone…). Nous avons appelé cela des « explosions » (2).
Mais nous avons remarqué que ce procédé nous donnait plusieurs découpages similaires.

Pour utiliser ce procédé, il nous a fallu trouver des formules pour le nombre de triangles et d'arêtes de chaque polygone :

Si n est le nombre de triangles dans un polygone régulier. On remarque sur les cas étudiés que le nombre d'arêtes internes du découpage est n-1 alors que le nombre d'arêtes externes est n+2 (3), donc le nombre d'arêtes total est $n+2+n-1=2n+2-1=2n+1$.

- On multiplie le nombre d'arêtes total par deux car il y a deux explosions différentes (comme expliqué précédemment)
- Le nombre obtenu doit forcément être multiplié par le nombre de découpages pour avoir les découpages du polygone suivant (avec certains comptés plusieurs fois).

Nombre de triangles	Nombre total d'arêtes	Nombre de découpages	Nombre de découpages possibles obtenu par explosion	Nombre d'arêtes externes
1	3	1	6	3
2	5	2	20	4
3	7	5	70	5
4	9	14	252	6
n	$2n+1$	c_n	$c_n\times2\times(2n+1)$	$n+2$

On s'est rendu compte que si on divise le « nombre de découpages possibles obtenu par explosion » par le « nombre d'arêtes externes » on obtient le nombre de découpage $c_{n+1.}$

$$c_1=1$$
$$c_2=2=6\div3=[c_1\times2\times(2\times1+1)]\div(1+2)$$
$$c_3=5=20\div4=[c_2\times2\times(2\times2+1)]\div(2+2)$$
$$c_4=14=70\div5=[c_3\times2\times(2\times3+1)]\div(3+2)$$

On a ainsi obtenu la formule de récurrence suivante :

$$\frac{c_{n+1}=(2n+1)\times2\times c_n}{n+2}$$

Nous avons divisé le « nombre de découpages possibles obtenu par explosion » par le nombre d'arêtes externes (4).

Nous nous sommes intéressés aux divisions obtenues (notre objectif étant de trouver une formule qui s'exprime sans récurrence).

Mise en évidence de la formule finale à partir de la formule de récurrence :

Soit n le nombre de triangles, en appliquant la formule de récurrence on obtient les valeurs suivantes :

$$\frac{20}{4}\ ;\ \frac{70}{5}\ ;\ \frac{252}{6}\ ;\ \frac{924}{7}\ ;\ \ldots$$

Ne trouvant pas de formule, nous avons appliqué la formule de récurrence sans simplifier :

$$c_1=1$$
$$c_2=\frac{c_1\times 2\times(2\times 1+1)}{1+2}=\frac{2\times 3}{3}$$
$$c_3=\frac{c_2\times 2\times(2\times 2+1)}{2+2}=\frac{2\times 3}{3}\times\frac{2\times 5}{4}=\frac{2^2\times 3\times 5}{3\times 4}$$
$$c_4=\frac{c_3\times 2\times(2\times 3+1)}{3+2}=\frac{2^2\times 3\times 5}{3\times 4}\times\frac{2\times 7}{5}=\frac{2^3\times 3\times 5\times 7}{3\times 4\times 5}$$

On trouve ainsi la formule suivante :

$$c_n=\frac{2^{n-1}\times(2\mathrm{n}-1)\times(2\mathrm{n}-3)\times\ldots\times 3}{(n+1)\times n\times\ldots\times 3}=\frac{2^{n}\times(2\mathrm{n}-1)\times(2\mathrm{n}-3)\times\ldots\times 1}{(n+1)\times n\times\ldots\times 1}$$

Passons de c_4 à c_5 : $\quad c_4=\dfrac{2^4\times 7\times 5\times 3\times 1}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}$

D'après la formule de récurrence, on peut calculer c_5 :

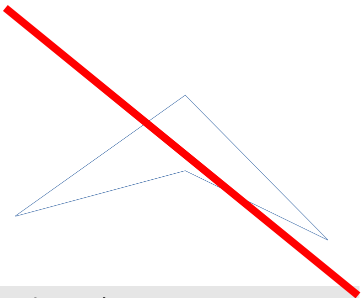
$$c_5=\frac{[(2\times 4+1)\times 2\times 2^4\times 7\times 5\times 3\times 1]}{(4+2)\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=\frac{2^{4+1}\times 9\times 7\times 5\times 3\times 1}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}$$

On vient de retrouver la formule finale pour c_5 . Il faudrait démontrer la formule de récurrence et faire le même raisonnement avec toutes les valeurs ou avec une valeur n quelconque pour démontrer la formule.

Conclusion :

Suite à cette démarche nous nous avons traité uniquement une infime partie du sujet « triangulation » : les polygones réguliers.

Nous n'avons en particulier pas traité les polygones comme celui-ci :



Notes d'édition.
(1) En fait n désignera le nombre de triangles obtenus après découpage et le nombre de côtés du polygone est alors n+2 (voir page 3). Ici et dans toute la suite, on ne considère que les découpages en un nombre minimal de triangles.
(2) Ici, quelques précisions supplémentaires peuvent être utiles. Pour que les explosions se présentent comme il est décrit, il faut que l'extrémité explosée soit sur le bord du polygone initial et non un point intérieur – sinon il faudrait exploser simultanément une autre arête. Alors les explosions n'ajoutent pas de point intérieur et en partant d'un triangle (1 triangle, 3 sommets), on obtient par explosions des découpages de polygones en n triangles pour n+2 sommets du polygone (à chaque explosion on ajoute un triangle et un sommet).
Dans l'autre sens, on obtient bien tous les découpages *minimaux* d'un polygone à partir de ceux du polygone avec un côté de moins : étant donné un découpage, on peut choisir un côté (externe) du polygone et le contracter en un point ; alors le triangle du découpage qui le contient est contracté en une arête unique et si le découpage est minimal, rien d'autre n'est « écrasé » : il faudrait pour cela que les deux extrémités du côté contracté soient reliés à un autre point, mais dans ce cas on aurait un deuxième triangle contenant le côté extérieur et le premier triangle, et en supprimant tout ce qui est intérieur au second triangle on trouverait un découpage avec moins de triangles, ce qui est impossible ; on construit ainsi un découpage du polygone avec un côté de moins et le premier provient bien de celui-ci par explosion du triangle écrasé.
Ici on supprime un triangle et un sommet. Si on avait un découpage en strictement moins que n triangles d'un polygone à n+2 sommets, on trouverait un découpage en moins de n-1 triangles d'un polygone à n+1 sommets aurait aussi, et a fortiori un découpage minimal du polygone à n+1 sommets aurait aussi moins de n-1 triangles ; en continuant jusqu'à être ramené à un triangle, on voit que ce n'est pas possible. Finalement, les découpages minimaux d'un polygone à n+2 sommets contiennent n triangles et s'obtiennent tous à partir du triangle par une série d'explosions, sans ajouter de point intérieur.
(3) En procédant par explosions successives, on part d'un triangle avec 0 arête intérieure et 3 sommets et à chaque explosion on ajoute un triangle, une arête interne et une arête externe : après n-1 explosions, on a n triangles, n-1 arêtes internes et n+2 arêtes externes.
(4) Étant donné un découpage minimal du polygone à n+3 côtés, en contractant n'importe quel de ses côtés externes, on obtient un découpage minimal du polygone à n+2 côtés dont le premier découpage se retrouve par explosion – donc a priori n+3 explosions donnant le même découpage.
Mais pour bien identifier les découpages différents, il convient de repérer les sommets des polygones. On peut choisir de nommer un premier sommet A et de continuer l'alphabet en tournant dans le sens direct (par exemple), et on peut décider après contraction de garder le sommet A et de continuer de même pour le polygone à un côté de moins ; alors, dans l'explosion, si le sommet A est « explosé » il faudra choisir lequel des deux nouveaux points sera A ; si on choisit de le placer en premier dans le sens direct (par exemple), il ne faut pas compter l'explosion qui correspond à la contraction du côté où A est en second dans le sens direct.
C'est pourquoi il faut compter n+2 explosions donnant le même découpage du polygone à n+3 côtés.