Smileys bien tassés

Année 2016 – 2017

Soizic MAYER, Marylou MADEJ, Noah RIMOND, Romain ASTORI, Juliette BENADOUCHE, Fouâd DJALLAL élèves de 4ème.

Encadrés par Mme DANIEL.

Établissement : Collège Carnot de Lille.

Chercheuse : Mme FRADON , Université Lille 1.

I Sujet:

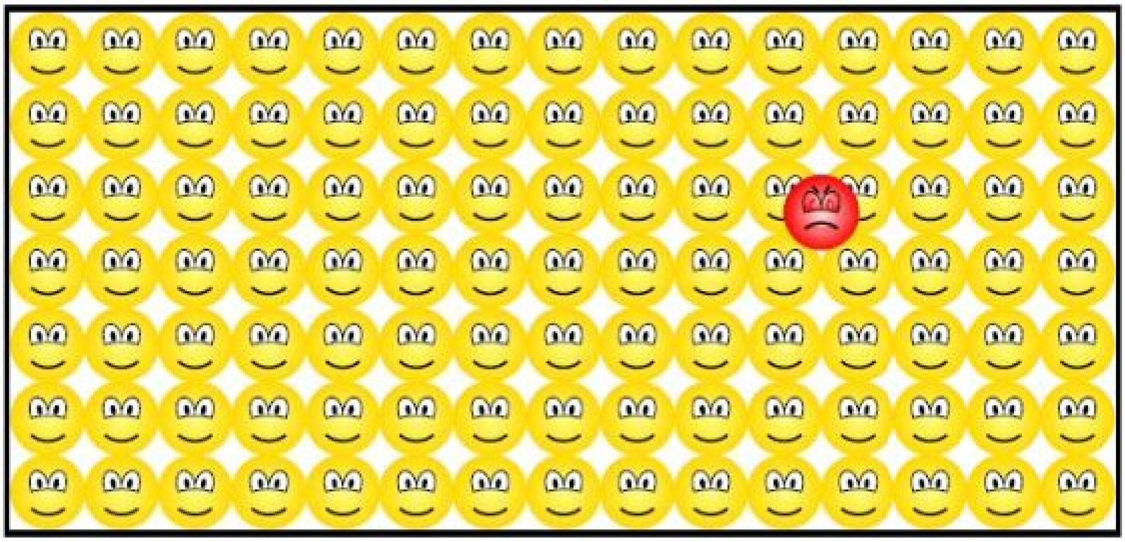
Comment mettre un maximum de smileys dans un minimum de place ?

Un smiley c'est rond, c'est tout petit, et surtout c'est plat! Donc les smileys en boite se mettent dans une grande boite plate : un carré, un rectangle, etc.

Quel pourcentage de la surface peut-on couvrir avec des smileys?

Règles du jeu : 1. La boite est grande et les smileys sont petits. Dans une boite ronde à sa taille, un smiley recouvre 100 % de la surface, mais ce n'est pas du jeu!

2. On n'a pas le droit de superposer les smileys.



II Approche expérimentale :

Nous avons travaillé avec des jetons circulaires (jetons de poker et jetons de nain jaunes) avec différents rayons. Nous avons essayé de placé un maximum de smileys sur une feuille A4 et nous avons essayé de les organiser. Nous avons commencé par mettre les diagonales mais c'est un échec.

Voici nos résultats:

	Jetons de Nain jaune	Jetons de Pokers
Formation en Carré	66,41 % (234 jetons)	70,48 % (35 jetons)
Formation Triangulaire	71,80 % (253 jetons)	84,58 % (42 jetons)

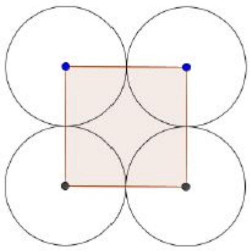
Formule utilisée pour les calculs du pourcentage de l'aire de la surface occupée par les jetons :

$$\frac{Aire\ des\ jetons}{Aire\ A\,4}=\frac{Nombre\ de\ jetons}{21\,x\,29{,}7}(x\,100)$$

III Démonstrations par pavage :

Nous avons trouvé deux formations possibles pour disposer les jetons.

1)La formation « lignes et colonnes » (carrée)



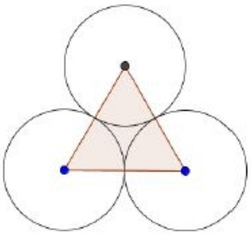
Pour la formation « lignes et colonnes » (carrée), les 4 centres des disques forment un carré.

On remarque que, quand on relie les centres de quatre disques ça forme un carré.
Un côté du carré est égal à un diamètre. Dans un carré, il y a quatre quarts de disque.
On en conclut donc que dans un carré il y a un disque entier.

Proportion du carré occupé par le disque $= \dfrac{aire\ du\ disque\ de\ rayon\ r}{aire\ du\ carré\ de\ coté\ 2r} = \dfrac{\pi r^2}{(2r)^2} = \dfrac{\pi r^2}{4r^2} = \dfrac{\pi}{4}$

(environ 78,5%)

2)La formation « triangulaire » (hexagonale)

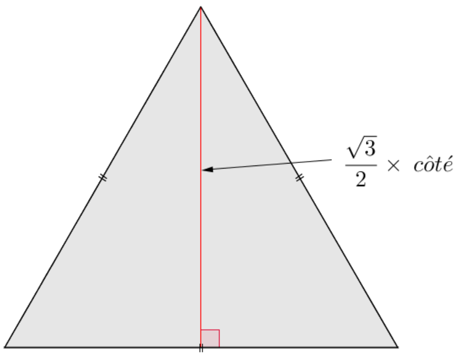


Pour la formation « triangulaire » (hexagonale), les 3 centres des disques forment un triangle équilatéral.

Nous avons un triangle équilatéral dont les côtés sont un diamètre.
On sait que les angles d'un triangle équilatéral sont égaux à 60°.
Donc dans le triangle équilatéral il y a trois sixièmes de cercle.On peut en conclure qu'il y a un $\frac{1}{2}$ disque dans le triangle équilatéral.

Proportion occupée par le $\frac{1}{2}$ disque dans le triangle équilatéral= $\frac{aire\ du\ 1/2\ disque}{aire\ du\ triangle\ équilatéral}$

Pour calculer l'aire du triangle équilatéral, nous avons besoin de sa hauteur ;



Notre chercheuse nous à aidé, elle nous a donné la formule pour la hauteur et l'a démontrée avec Pythagore. (1)

aire du triangle = $\frac{d \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times d}{2} = \frac{2r \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2r}{2} = \sqrt{3} \times r^2$

$$\frac{aire\ du\ demi\ disque}{aire\ du\ triangle} = \frac{\frac{1}{2} \times \pi \times r^2}{\sqrt{3 \times r^2}} = \frac{1}{2 \times \sqrt{3}} \pi$$

(environ 91%)

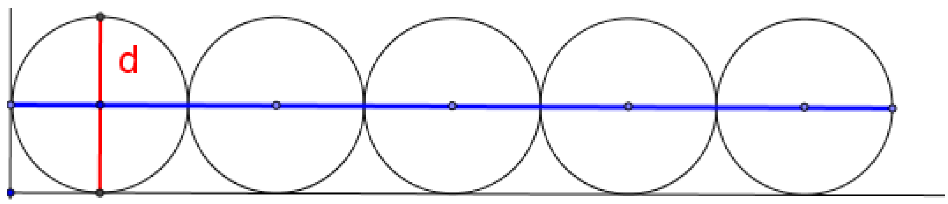
On remarque que $\frac{\pi}{4}$ est inférieur à $\frac{1}{2\sqrt{3}}\pi$ donc la proportion de l’espace occupé par un demi disque dans un triangle est supérieur a la proportion de l’espace occupé par un disque dans un carré.

IV Recherche de la feuille parfaite :

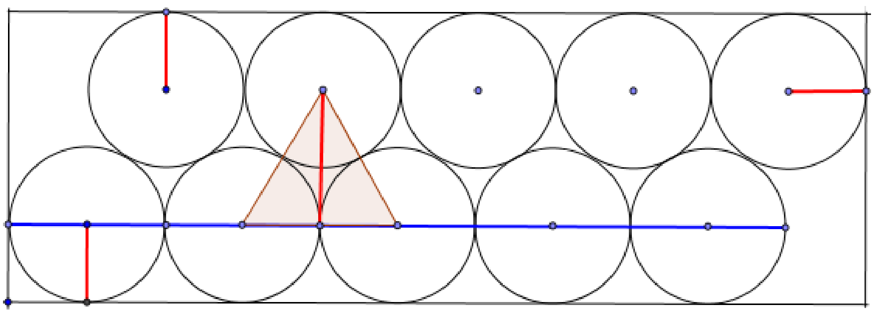
Les résultats trouvés confirment l’idée que la formation triangulaire est plus optimale que la formation lignes et colonnes, mais les résultats trouvés au début dans l’approche expérimentale ne sont pas tout à fait les mêmes car on n’a pas pris en compte les effets de bords.

Petit rappel : les effets de bords sont de la place perdue car la feuille utilisée ne s’adapte pas à la forme de l’empilement des jetons.

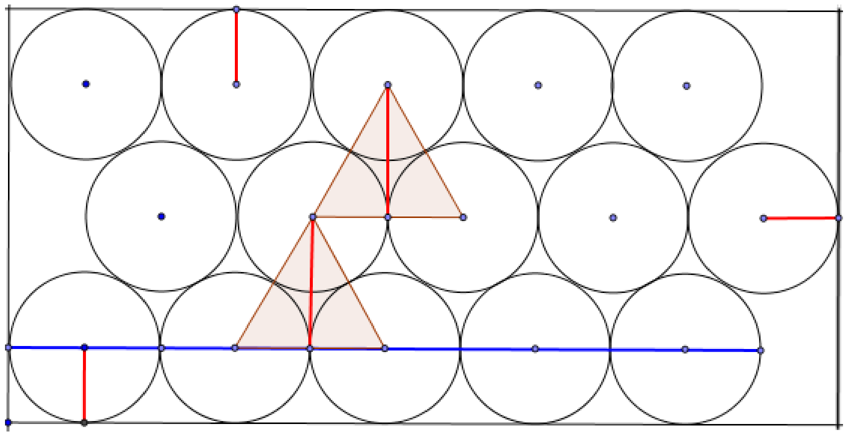
Pour éviter les effets de bords on doit chercher les dimensions de la feuille parfaite pour n x m jetons en formation triangulaire. (n et m sont des nombres entiers)



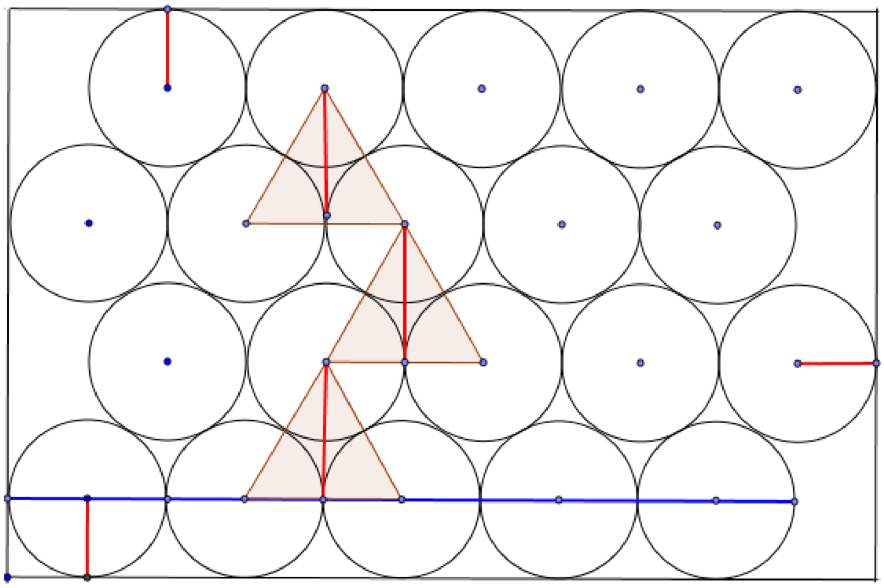
Par exemple pour n=5
m=1
dimensions: 5 x diamètre= 5d
1 x diamètre= d



Par exemple pour n=5
m=2
dimensions: 5 x diamètre+1 x rayon=5,5d
1 x diamètre+1 hauteur=d+h



Par exemple pour n=5
m=3
dimensions: 5 x diamètre+1 rayon=5,5d
1 x diamètre+2 x hauteurs=d+2h



Par exemple pour n=5
m=4
dimensions: 5 x diamètre+1 x rayon= 5,5d
1 x diamètre+3 x hauteurs=d+3h

<u>conclusion :</u>

nombre de jetons en hauteur	nombre en largeur	largeur de m jetons	hauteur
1	m	m*d	d
2	m	(m+0,5)d	d+h
3	m	(m+0,5)d	d+2h
n	m	(m+0,5)d	d+(n-1)h

$$\frac{\text{aire des disques}}{\text{aire de la feuille}}=\frac{m\times n\times\pi\times r^2}{(m+0{,}5)\times d\times(d+(n-1)\times h)}$$ en remplaçant h par $\frac{\sqrt{3}}{2}d$

$$=\frac{m\times n\times\pi\times r^2}{(m+0{,}5)\times d\times(d+(n-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}d)}$$

$$=\frac{m\times n\times\pi\times\frac{d^2}{4}}{(m+0{,}5)\times d\times d\times(1+(n-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2})}$$ on simplifie par $\frac{d^2}{4}$

$$=\frac{m\times n\times\pi}{(m+0{,}5)\times(1+(n-1)\times 2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\pi}{\frac{(m+0{,}5)}{m}\times\frac{(1+(n-1)\times 2\sqrt{3})}{n}}$$ on divise par m et par n

$$=\frac{\pi}{(1+\frac{0{,}5}{m})\times(\frac{1}{n}+(1-\frac{1}{n})\times 2\sqrt{3})}$$

$$\approx\quad\frac{\pi}{1\times 1\times 2\sqrt{3}}$$

Si les valeurs m et n sont très très grandes, on considère que les valeurs $\frac{o{,}5}{m}et\frac{1}{n}$ sont très petites donc on va simplifier et on obtient $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ce qui correspond au résultat de la proportion de l'aire du triangle occupé par le demi-disque.

Cette proportion ne dépend par de la taille des jetons choisie.

Notes d'éditions

(1) Le théorème de Pythagore affirme que dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit est égale au carré de la longueur du troisième côté. Ce troisième côté, opposé à l'angle droit, est appelé l'hypoténuse du triangle rectangle.
Démontrons maintenant le résultat annoncé : dans un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur d, la hauteur du triangle a pour longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}\times d$. La hauteur du triangle permet de partager le triangle équilatéral considéré en deux triangles rectangles (identiques). Dans un de ces triangles, nous avons: les côtés adjacents de l'angle droit ont pour mesure $\frac{d}{2}$ et h (à déterminer), et l'hypoténuse a pour mesure d. Appliquons le théorème de Pythagore: $(\frac{d}{2})^2+h^2=d^2$. On en déduit alors: $h^2=3\frac{d^2}{4}$. Ainsi, on obtient bien $h=\frac{\sqrt{3}}{2}\times d$.