Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

L'objet invisible.
Année 2020-2021

Elèves de 3ème : Massoni Noa, Nicolas Justine, Pouyanne Baptiste, Ramezi Noélie, Vilbois Thibault, Villemonteix Chloé.
Elèves de Terminale : Barel Jade, Cassou-Leins Lilian, Delannoy Beverly, Puyet Alexia.

Encadrés par : Barneix Chantal, Goyhetche Alain

Etablissements : Collège Gaston Fébus Orthez / Lycée Gaston Fébus Orthez.

Chercheur : Monsieur Jacky Cresson, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

1- Introduction :

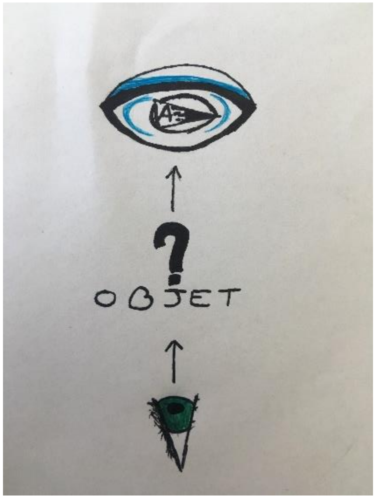
Il nous a été proposé comme sujet de créer un objet invisible et solide. Évidemment, cela pourrait être une vitre !
Or, notre objet ne doit pas être transparent.

Pourquoi les objets ordinaires sont-ils visibles ?

Premièrement, un objet est visible lorsque les rayons lumineux arrivant sur celui-ci sont renvoyés dans toutes les directions ; on le voit.
Un objet est invisible quand on voit ce qu'il y a derrière lui sans déformation, comme s'il n'y avait rien entre.

Donc pour rendre un objet invisible, il faudrait « contrer » ce principe de réflexion de la lumière, ou plutôt s'en servir à notre avantage. On pourra ainsi modifier la trajectoire des rayons arrivant sur l'objet, pour qu'ils le traversent et en ressortent dans le prolongement du rayon entrant.

Pour qu'un objet placé entre l'œil de l'observateur et le ballon soit invisible, il faudra dévier les trajectoires des rayons à l'intérieur de l'objet et qu'ils ressortent alignés avec les rayons du départ.



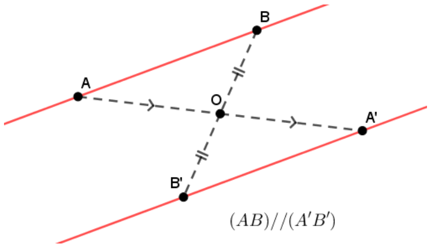
L'objet sera constitué de deux parois parallèles sur lesquelles des miroirs seront fixés.
L'objet lui-même sera invisible, les rayons entrant seront déviés dans l'objet puis ressortiront dans leur alignement.
De plus, nous créerons entre les miroirs des zones invisibles de l'extérieur.

Nous avons utilisé un laser et des miroirs afin de comprendre comment un rayon se reflète en essayant plusieurs configurations.

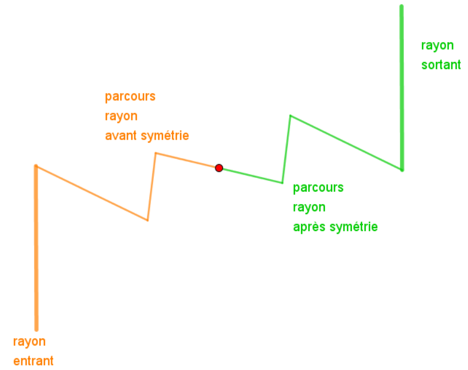
<u>Deux outils mathématiques :</u>

<u>Symétrie centrale</u>

Propriété :
Le symétrique d'une droite, par une symétrie centrale est une droite parallèle.



Une application :
Si on trace le symétrique du trajet d'un rayon par une symétrie centrale, alors le rayon sortant sera parallèle au rayon entrant.

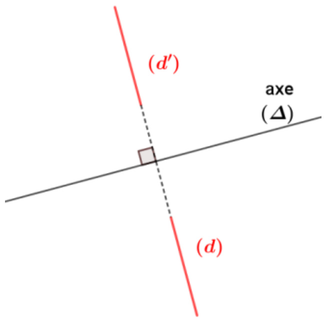


(rayon entrant) // (rayon sortant)

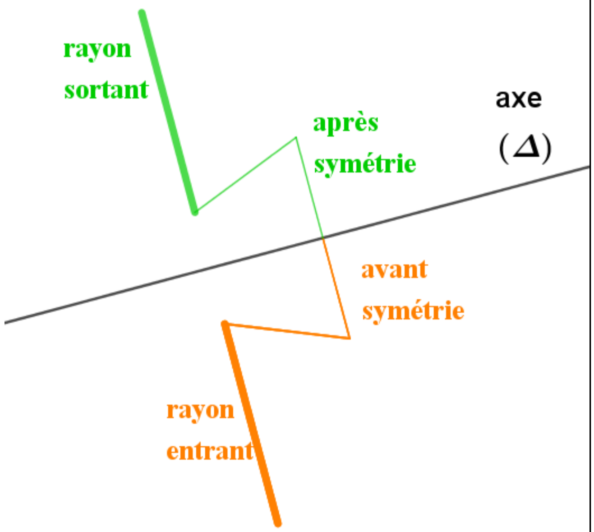
<u>Symétrie Orthogonale :</u>

Propriété :

Le symétrique, par une symétrie orthogonale d'une droite perpendiculaire à l'axe est la droite elle-même.

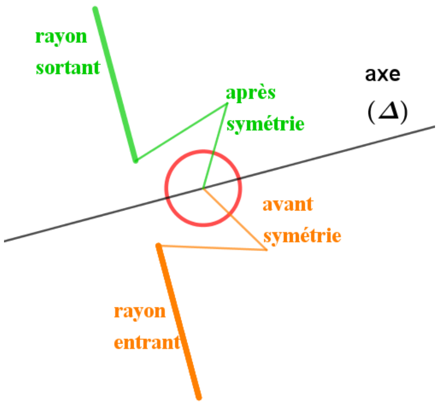


Une application :

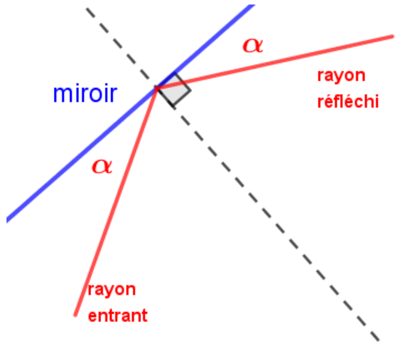


Si le rayon entrant (orange, gras) est perpendiculaire à l'axe de symétrie, le rayon sortant (en vert, gras) sera dans l'alignement.

Remarque : il faudra que le rayon lumineux intercepte l'axe de symétrie perpendiculairement.
Dans le cas contraire, on obtiendrait la figure ci-contre.
Or cette figure est impossible car un rayon ne peut changer « seul » de direction (problème entouré en rouge).



Partie 1 : Réflexion d'un rayon sur un miroir :

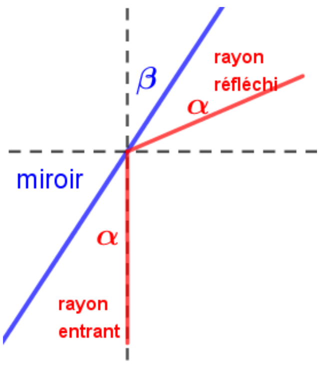


Lorsqu'un miroir reflète un rayon, le rayon sortant forme avec le miroir un angle égal à l'angle formé entre le miroir et le rayon entrant.

Pour dessiner un rayon réfléchi, il y a plusieurs étapes :

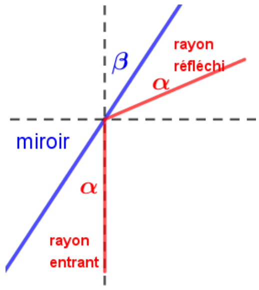
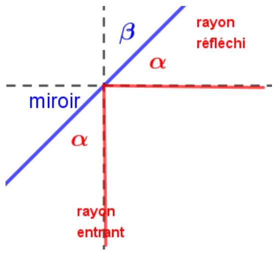
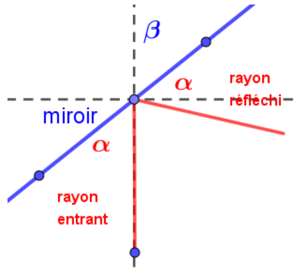
- On trace la perpendiculaire au miroir passant par le point de contact entre le rayon et le miroir.
- Puis on trace le symétrique de ce rayon par rapport à la perpendiculaire.

Nous avons remarqué 3 cas possibles, en fonction de l'inclinaison des miroirs :



On considère un miroir (tracé en bleu) formant un angle β avec l'axe vertical (figure ci-contre). Le rayon entrant est vertical.
On remarque que les angles α *et* β sont opposés par le sommet donc de même mesure.

On en déduit que l'angle formé entre l'axe vertical et le rayon réfléchi est égal à $\alpha + \beta = 2\alpha$

Cas 1 Si $\alpha\ (ou\ \beta) < 45°$ Alors le rayon se réfléchira vers l'avant et il nous sera possible de le faire ressortir parallèlement au rayon de départ.	***Cas 2 :*** Si $\alpha\ (ou\ \beta) = 45°$ Le rayon se reflète alors à 90°	***Cas 3 :*** Si $\alpha\ (ou\ \beta) > 45°$ Le rayon se réfléchit alors vers l'arrière, il nous faut donc écarter cette possibilité.
		

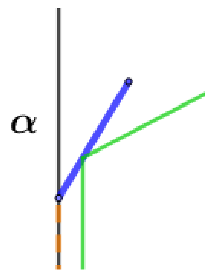
On en conclut que pour réaliser un objet invisible à partir de miroirs, les rayons devront toujours aller vers l'avant ; on se servira donc du 1er cas énoncé ci-dessus, et notre cas limite sera le rayon reflété "à 90°".

Nous séparerons l'étude des objets en deux grandes catégories :

- **Les miroirs sont situés sur les deux parois,**
- **Ils sont situés sur une seule paroi.**

<u>Partie 2 : les miroirs se situent sur les deux parois :</u>

<u>1/ Placement des deux premiers miroirs et étude du trajet d'un rayon lumineux :</u>

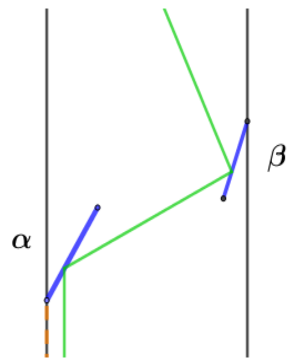


On place d'abord, sur la paroi de gauche, un miroir, qui forme avec la paroi un angle $\alpha\ (avec\ \alpha < 45°)$.
Le rayon se reflète donc de α° vers l'avant.

Après cela, nous avons suivi la trajectoire du rayon vert et placé un second miroir, d'angle β avec la paroi de droite. $\beta \leq 45°$.
Le rayon se reflète donc vers l'avant à nouveau mais n'est pas forcément parallèle au rayon entrant.

<u>On obtient alors trois cas possibles.</u>

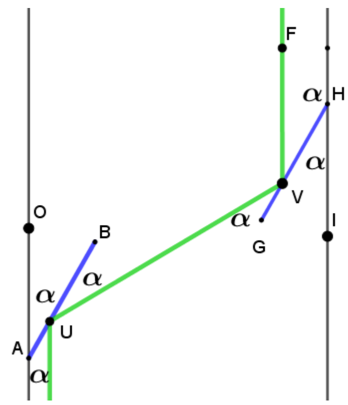
<table>
<tr>
<td><u>Cas 1 :</u>

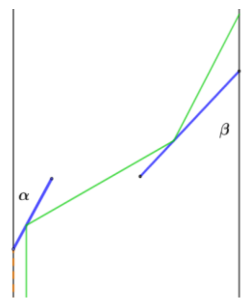
Dans ce cas, $\alpha > \beta$. En traçant le trajet d’un rayon reflété par ces deux miroirs, on se rend compte que le rayon sortant “repart” vers la paroi de gauche en formant un angle aigu. Il faudra donc faire une symétrie centrale pour le redresser et le faire ressortir parallèlement.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Cas 2 :</u>
Dans ce cas, $\alpha = \beta$, les miroirs forment avec les parois le même angle. Les miroirs sont donc parallèles.

Le rayon (VU) forme avec les miroirs des angles alternes-internes.
Les miroirs sont parallèles donc les angles ont même mesure.
Donc $\widehat{UVG} = \alpha$

Le rayon reflété (VF) formera donc avec le miroir un angle de mesure α.

Le rayon (FV) et la paroi (HI) forment avec le miroir [GH] deux angles alternes-internes de même mesure donc ces droites sont parallèles.

En conclusion le rayon sortant (VF) est parallèle au rayon entrant.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>

<u>Cas 3 :</u>
Dans ce cas, $\beta > \alpha$
Le rayon sortant est dévié vers la droite. Il sera alors nécessaire de placer un troisième miroir sur la paroi de droite.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

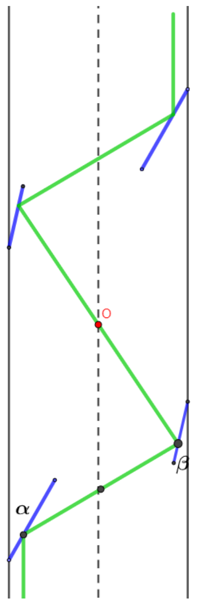
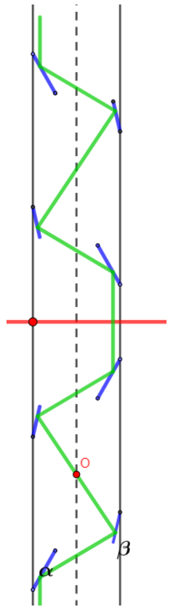
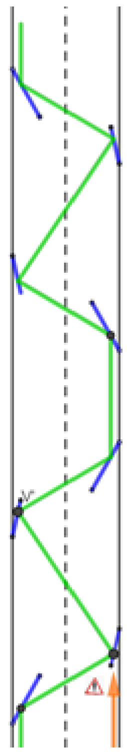
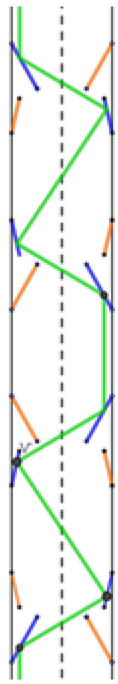
<u>2/ Comment obtenir un rayon aligné avec le rayon de départ dans ces trois cas :</u>

<u>Cas 1 : $\alpha > \beta$</u>
Pour obtenir à la sortie, un rayon parallèle à l’entrant, nous allons appliquer une symétrie centrale.
Le centre de symétrie doit se trouver sur l’axe de symétrie des deux parois. Ainsi, les miroirs symétriques seront aussi associés aux parois. (Figure 1)

Puis, pour que le rayon ressorte dans l’alignement du rayon de départ, il suffit d’effectuer une symétrie axiale.
L’axe de symétrie doit être perpendiculaire aux parois. (Figure 2)

Dans cette configuration, il y a un problème : les rayons arrivant de la droite ne rencontrent pas de miroir et ne sont donc pas renvoyés vers l’avant (Figure 3).

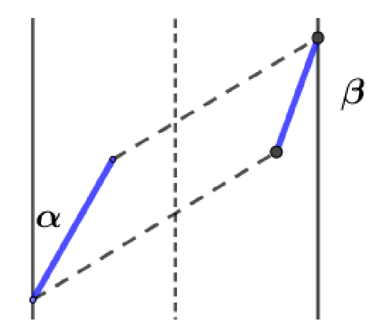
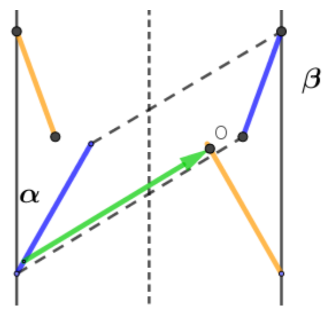
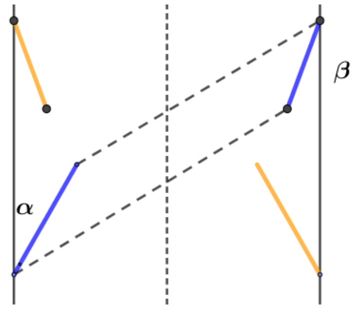
Pour y remédier, il faut utiliser une symétrie axiale dans la longueur (l’axe de symétrie utilisé est l’axe de symétrie des parois) pour que des miroirs soient placés avec fonction de renvoyer les rayons arrivant de droite vers l’avant (miroirs orange sur la Figure 4).

Figure 1	**Figure 2**	**Figure 3**	**Figure 4**
			

Problème du « chevauchement » :
On part d’une configuration banale, les miroirs forment des angles α *et* β avec les parois.
Comme nous l’avons vu, pour que les rayons arrivant à droite se reflètent aussi, nous traçons les symétriques des miroirs (on obtient les miroirs orange - Figure 1).

Se pose alors un problème : le rayon vert devrait se réfléchir sur le second miroir bleu, mais il est arrêté par le miroir orange. Nous appelons cela le problème du chevauchement. (Figure 2).

Pour résoudre ce problème, nous devons augmenter la distance entre les deux parois, ainsi le second miroir bleu « monte » et les rayons ne sont plus arrêtés. (Figure 3).

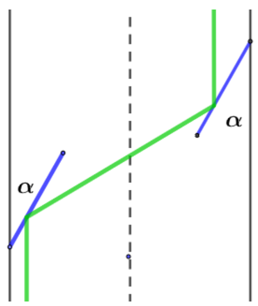
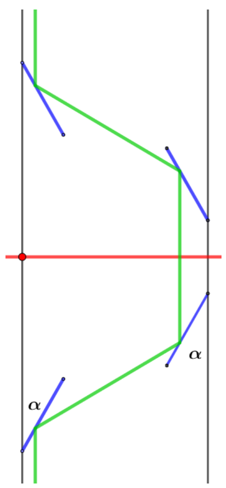
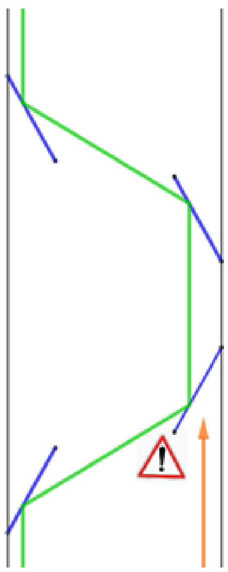
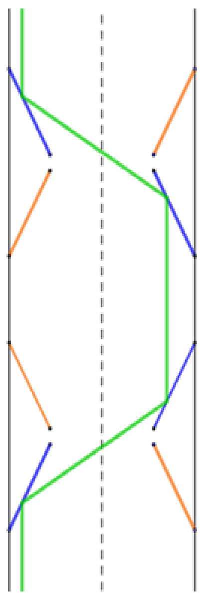
Figure 1	Figure 2	Figure 3
		

<u>Cas 2 : $\alpha = \beta$</u>
Le rayon ressort donc de la configuration parallèlement au rayon de départ (figure 1)

Dans ce cas, on peut éviter d'utiliser la symétrie centrale ; une seule symétrie axiale située après les deux premiers miroirs suffit car le rayon ressort déjà parallèlement à son arrivée. Notre objet comportera donc 4 miroirs seulement. (figure 2)

Mais là aussi nous rencontrons le même problème qu'au cas n°1. Les rayons arrivant de la droite ne sont pas renvoyés vers l'avant (figure 3).

Donc il nous faut effectuer la même symétrie axiale pour que les rayons soient renvoyés vers l'avant. (Fig 4)

Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
			

Dans la figure 4, les miroirs forment avec les parois des trapèzes et les intérieurs de ces trapèzes seront invisibles.

Cas 3 : $\beta > \alpha$

Nous n'avons pas étudié le cas 3. Nous pourrions, en appliquant les mêmes méthodes arriver à un rayon sortant aligné avec le rayon entrant mais nous verrons plus tard pourquoi il est impossible à réaliser.

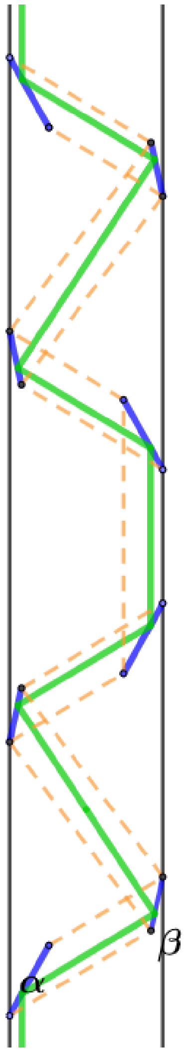
3/ Comment placer précisément les miroirs ?

Premièrement, TOUS les rayons doivent être reflétés. C'est-à-dire, les rayons du milieu du miroir jusqu'à ceux au bord.

Après le premier miroir, on peut donc déterminer une "zone" déterminée par les rayons limites (rayons réfléchis sur les extrémités des miroirs) dans laquelle tous les rayons passeront.

Il faudra donc que le second miroir couvre toute cette zone pour renvoyer tous les rayons vers l'avant (en fonction de son inclinaison, sa longueur variera).

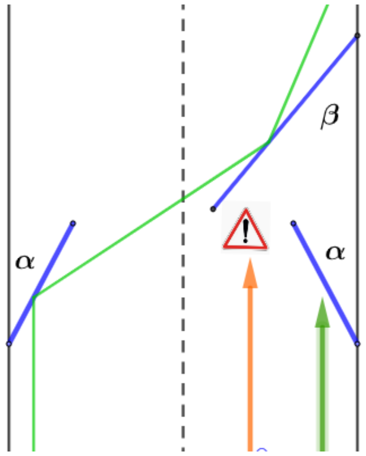
On réitère le même processus pour les miroirs suivants. (figure ci-contre)



4/ Pourquoi le cas 3 ne fonctionne-t-il pas ? ($\beta > \alpha$)

Pour refléter les rayons arrivant de la droite on a tracé les symétriques des miroirs par rapport à l'axe de symétrie des parois.

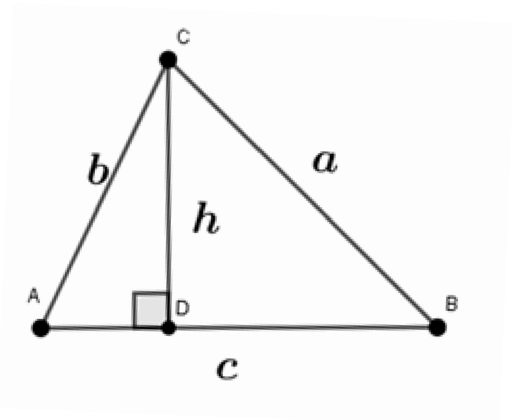
Lorsque $\beta > \alpha$, le rayon orange (en bas à droite de la figure) ne sera pas reflété. Certains rayons ne seront donc pas renvoyés vers l'avant, la figure ne sera pas invisible.
On peut donc éliminer ce cas.



En conclusion, pour que l'objet soit invisible,
α doit être supérieur ou égal à β

5/ Comment calculer la longueur du second miroir dans le cas 1 ?

Nous allons trouver une formule exprimant la longueur du second miroir (d_2) en fonction des deux angles α *et* β ainsi que la longueur du premier miroir (de droite : d).



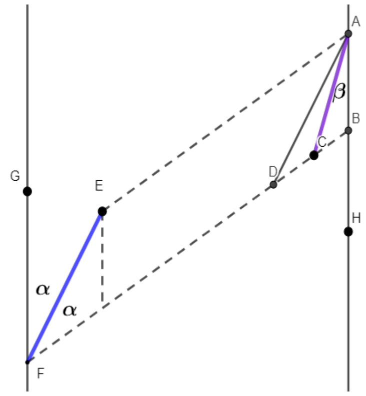
Propriété :
Dans le triangle ABC
Alors : $\frac{sin\,\hat{A}}{a} = \frac{sin\,\hat{B}}{b} = \frac{sin\,\hat{C}}{c}$

Démonstration :
Dans le triangle ADC rectangle en D
$sin\,\hat{A} = \frac{CD}{CA}$ $\quad donc \quad CD = CA \times sin\,\widehat{A} \quad ; \quad h = b \times sin\,\widehat{A}$

Dans le triangle BCD rectangle en D
$sin\,\hat{B} = \frac{CD}{CB}$ $\quad donc \quad h = a \times sin\,\hat{B}$

On en déduit donc l'égalité : $b \times sin\,\widehat{A} = a \times sin\,\hat{B}$ donc si on revient au produit en croix : $\frac{sin\,\hat{A}}{a} = \frac{sin\,\hat{B}}{b}$
On peut démontrer de même que $\frac{sin\,\hat{B}}{b} = \frac{sin\,\hat{C}}{c}$

Nous allons maintenant exprimer en fonction de α *et* β les mesures des angles du triangle DCA
On sait que $\widehat{DAB} = \alpha$

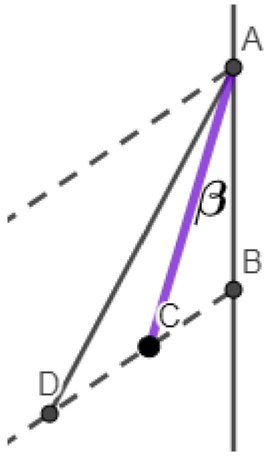


$\widehat{GFD} = \widehat{GFE} + \widehat{EFD} = 2\alpha$

(GF) // (AH) coupées par (BF) forment deux angles alternes-internes de même mesure

donc $\widehat{DBH} = 2\alpha$

A, B, H alignés donc $\widehat{ABC} = 180 - 2\alpha$



Dans le triangle ACB, la somme des mesures des angles est égale à 180° donc
$\widehat{ACB} = 180 - (180 - 2\alpha) - \beta$
$\widehat{ACB} = 180 - 180 + 2\alpha - \beta$
$\widehat{ACB} = 2\alpha - \beta$

On sait que $\widehat{DAB} = \alpha$ donc $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} - \widehat{CAB} = \alpha - \beta$
De plus $\widehat{EFB}$ et $\widehat{ADB}$ sont des angles correspondants formés par des droites parallèles donc ils ont même mesure. $\widehat{ADB} = \alpha$

De plus $\widehat{ACD} = 180 - (2\alpha - \beta)$

On peut donc maintenant appliquer le théorème démontré dans le triangle ACD :

$$\frac{sin\,\hat{D}}{AC} = \frac{sin\,\hat{C}}{AD} \quad ; \quad \frac{sin\,\alpha}{AC} = \frac{\sin\big(180 - (2\alpha - \beta)\big)}{d}$$

En posant $AD = d$

$$d \times sin\alpha = AC \times sin(180 - (2\alpha - \beta))$$

On en déduit que :

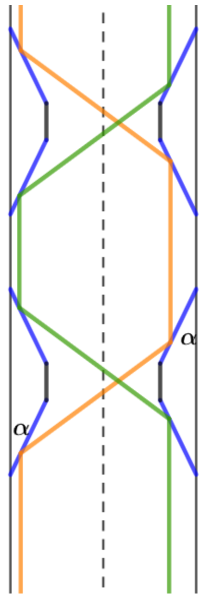
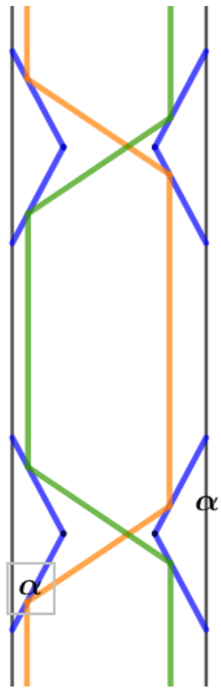
$$AC = d \times \frac{sin\alpha}{sin(180 - (2\alpha - \beta))} = d \times \frac{sin\,\alpha}{sin(2\alpha - \beta)}$$

$$\boxed{longueur\ du\ second\ miroir = d \times \frac{\sin\alpha}{\sin\,(2\alpha - \beta)}}$$

6/ Peut-on simplifier les configurations ?

Le cas $\boldsymbol{\alpha = \beta}$

Quand $\alpha = \beta$, alors le rayon sortant est parallèle au rayon entrant donc on “économise” la symétrie centrale.
On obtient alors la configuration des trapèzes isocèles (fig 1).
En approchant les deux parois, les trapèzes se transforment en triangles isocèles (fig 2).

Figure 1	Figure 2
	

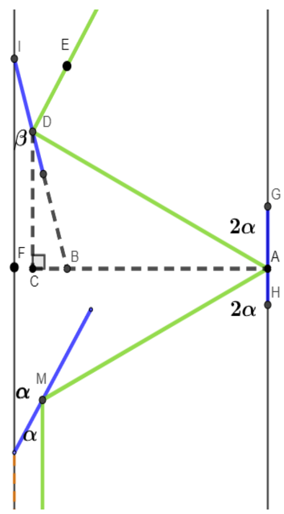
<u>Partie 2 : Les miroirs sont uniquement situés sur la paroi de gauche (miroirs collés sur la paroi de droite)</u>

On fixe ici la contrainte : les miroirs, avec un angle positif non nul, sont sur la paroi de gauche et ceux de la paroi de droite sont “plats”, leur angle est nul.

Nous utilisons la même méthode d’étude que dans la partie 1.

> **Propriété :**
> **Si $\boldsymbol{\alpha = \beta}$, alors le rayon sortant est parallèle au rayon entrant.**

<u>Démonstration :</u>

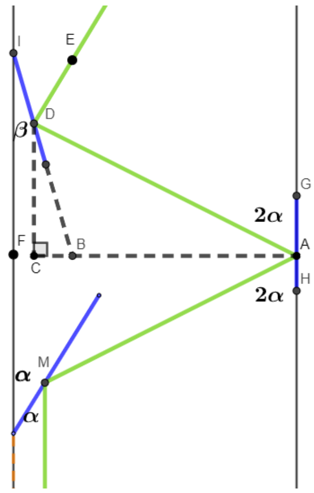


On admettra que les angles $\widehat{GAD} = \widehat{MAH} = 2\alpha$

<u>Nous allons tout d’abord exprimer les mesures des angles du triangle CDA en fonction de α</u>

$\widehat{DAF} = 90 - 2\alpha$
$\widehat{CDA} = 190 - 90 - (90 - 2\alpha)$
$\widehat{CDA} = 190 - 90 - 90 + 2\alpha$
$\widehat{CDA} = 2\alpha$

Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{CDB}$:
$\widehat{FIB}$ et $\widehat{CDB}$ sont des angles correspondants.
De plus, les droites (IF) et (CD) sont parallèles
Donc les angles correspondants ont même mesure.
Donc $\widehat{CDB} = \beta$



On en déduit que $\widehat{BDA} = 2\alpha - \beta$.
Le rayon [DA] se reflète en [DE] donc les angles ont même mesure :
$\widehat{IDE} = 2\alpha - \beta$

Pour que le rayon DE soit parallèle à la paroi de gauche il faudrait que les angles alternes-internes $\widehat{FIB}$ et $\widehat{IDE}$ soient de même mesure. On en déduit l'équation :

$2\alpha - \beta = \beta$; $2\alpha = 2\beta$ donc $\alpha = \beta$

En conclusion,
- Si les deux angles sont égaux alors le rayon sortant est parallèle
- S'ils sont différents alors le rayon sortant (DE) n'est pas parallèle à la paroi

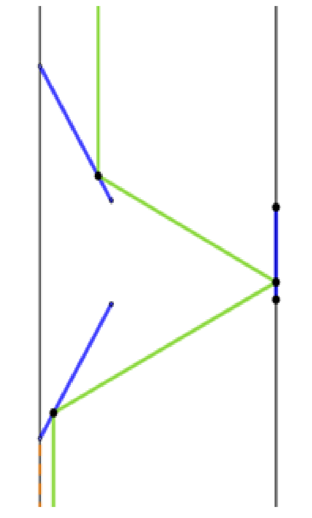
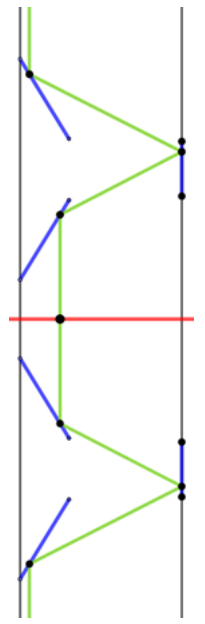
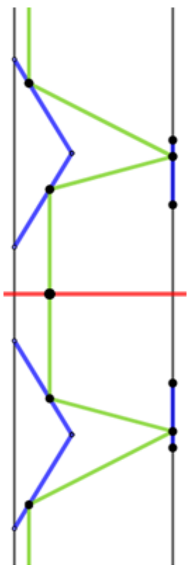
<u>Premier cas : $\alpha \neq \beta$</u>
Dans ce cas, le rayon sortant n'est pas parallèle au rayon de départ. Il faudrait, comme dans la partie 1, utiliser une symétrie centrale afin d'obtenir un rayon parallèle au rayon entrant.

Le problème est le suivant : avec une symétrie centrale, on obtient des miroirs de l'autre côté, ce qui est interdit.

<u>Second cas : $\alpha = \beta$</u>
Dans ce cas, le rayon sortant est parallèle mais décalé (figure 1).

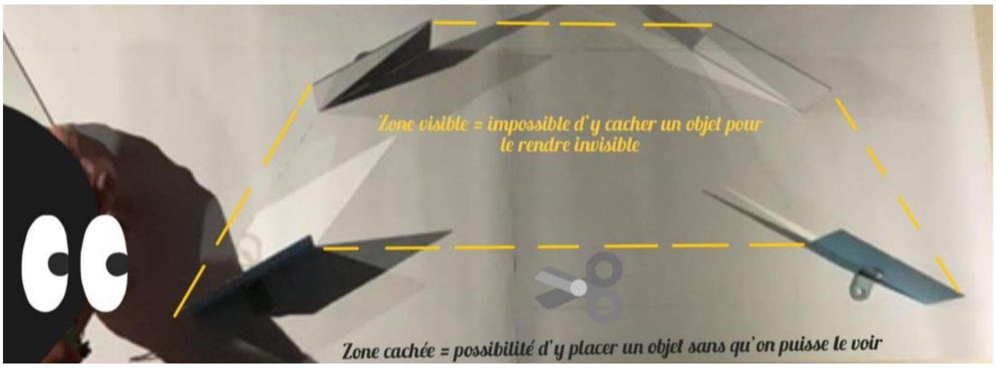
Il nous reste un seul outil, la symétrie axiale. L'axe sera perpendiculaire aux parois.
On obtient la configuration finale. (Figure 2)

En modifiant la distance entre les deux parois, on peut passer d'une configuration en "trapèze isocèle" à une configuration en "triangle isocèle". (Figure 3).

Figure 1	Figure 2	Figure 3
		

Pour conclure, nous avons compris comment créer des configurations d'objets invisibles. Toutes ces configurations sont créées grâce à des symétries centrales et axiales. De plus, les parois sont à chaque fois parallèles et les surfaces sont planes.
Il existe sans doute d'autres configurations qui seront créées peut-être sans les symétries, sur des surfaces non planes, par exemple curvilignes.

Expérience :
En plaçant des miroirs selon notre méthode, on peut créer une zone invisible :
L'observateur est placé à gauche.



L'observateur ne « verra » pas les miroirs mais seulement l'image placée de l'autre côté.