Les graduations minimales

Année 2018 – 2019

Alexia DEZEURE, Kenza MALLET, Marine SERVON élèves de 3ème

Encadrés par Mme CALLAERT, M HEBBEN, Mme JOUBERT

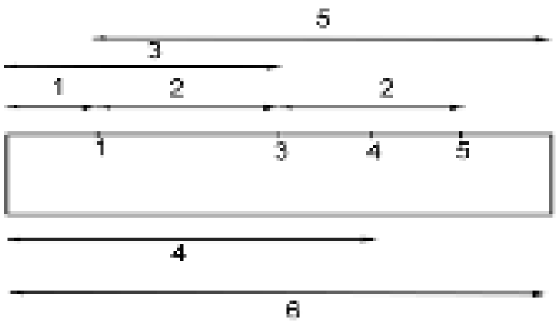
au collège Lucie Aubrac de Dunkerque

Chercheur : M ZIELINSKI, ULCO Dunkerque, Calais.

1. Présentation du sujet

On dispose d'une règle dont la longueur est un nombre entier supérieur à 4.
On place un certain nombre de graduations sur la règle.
On se demande si ces graduations permettent d'effectuer toutes les mesures entières possibles, auquel cas on dira que la ***graduation est optimale***.

Exemple



Sur cette règle de mesure 6, on a pris la graduation (1, 3, 4, 5)
Le 1 permet de mesurer 1 et 5
Le 3 permet de mesurer 2 et 3
Le 5 permet de mesurer 1, 2, 4 et 5
La graduation (1, 3, 4, 5) est optimale pour la règle de 6

2. Nos recherches

A- Etude complète de la règle de longueur 6
> Il est clair qu'un singleton ne suffit pas à construire une graduation opérationnelle

> Peut-on trouver des couples opérationnels ?
Pour trouver un couple opérationnel, pour une règle de longueur 6, nous avons dû faire plusieurs essais. Nous n'avons trouvé que deux couples opérationnels : (1, 4) et (2, 5).
(1, 4) : Le 1 permet de mesurer 1, 3 et 6, le 4 permet de mesurer 2, 4 et 6.
On peut donc constater que l'on peut tout mesurer avec ces 2 graduations.
On peut remarquer que (2, 5) est le symétrique de (1, 4) sur la règle de 6 :
Entre 0 et 1 il y a un espace de 1 et entre 5 et 6 il y a aussi un espace de 1. Entre 4 et 6 il y a un espace de 2, et entre 2 et 5 il y a aussi un espace de 2.

Propriété : De manière générale, si une graduation est opérationnelle, sa graduation symétrique l'est aussi.

> ***Nous avons cherché des triplets opérationnels***
La recherche étant fastidieuse, nous avons programmé une feuille de tableur.
Nous avons ainsi trouvé que tous les triplets étaient opérationnels sauf (2, 3, 4).

> Une recherche rapide nous a permis de voir que ***tous les quadruplets***, et donc tous les ***quintuplés*** sont opérationnels.

En conclusion, pour une règle de longueur 6, il faut au moins 2 éléments dans la graduation pour pouvoir effectuer toutes les mesures.

B- Ensuite, la question que nous avons alors cherché à résoudre a été la suivante. Etant donnée une règle de longueur L, combien d'éléments au minimum devra contenir une graduation opérationnelle de cette règle?

Nous nous sommes aperçues que : ***une graduation qui comporte N éléments permet de mesurer au plus (N + 1) + N + (N – 1) + (N – 2) + …. + 1 longueurs.***

Explications : *Prenons l'exemple de 5 graduations (g1, g2, g3, g4, g5), où g1 < g2 < g3 < g4 < g5 sur une règle de mesure supérieure à 6.*

g1 permet d'effectuer 6 mesures différentes :
g1, g2 – g1, g3 – g1, g4 – g1, g5 – g1, et L – g1 (L = longueur de la règle)
g2 permet d'effectuer 5 mesures différentes :
g2, g3 – g2, g4 – g2, g5 – g2, L – g2
Certaines mesures peuvent être identiques à celles effectuées par g1.
Finalement, on pourra effectuer au maximum 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 mesures.

Cette justification se généralise aisément.

Nous avons alors testé ce résultat en prenant des graduations à 1, 2 ou 3 éléments.

Nombre d'éléments de la graduations	Nombre de mesures maximum possibles	Exemple de graduation de longueur minimale opérationnelle
1	3	*Règle de longueur 2* : (1) est opérationnelle *Règle de longueur 3* : (1) ou (2) sont opérationnelles
2	6	*Règle de longueur 4* : (1,3) est opérationnelle *Règle de longueur 5* : (1,3) est opérationnelle *Règle de longueur 6* : (1,4) est opérationnelle
3	10	*Règle de longueur 7* : (1,2,5) est opérationnelle *Règle de longueur 8* : (1,4,6) est opérationnelle *Règle de longueur 9* : (1,4,7) est opérationnelle

Nous avons chaque fois trouvé une graduation opérationnelle de taille minimale, sauf pour la règle de longueur 10, où le nombre minimum théorique d'éléments est 3.
Nous avons cherché à comprendre ce qui se passait.

C- Un cas particulier : la règle de longueur 10

Dans les choix des éléments de la graduation, il faut pouvoir faire toutes les mesures de 1 à 10, mais sans répétitions puisque 3 graduations ne permettent au maximum que 10 mesures.

- *Pour mesurer la longueur 9*, il faut soit la graduation 1 (10 - 1), soit la graduation 9 (9 - 0). Choisissons la graduation 1.
- *Pour mesurer la longueur 8*, il faut soit la graduation 8, ou la graduation 2. On élimine 2 car on mesurerait 2 fois le 1.

Avec (1, 8), on peut ainsi mesurer 1, 2, 7, 8 et 9.
Il ne reste qu'une graduation pour mesurer 3, 4, 5 et 6, sans faire de mesure déjà effectuée.
2 n'est pas possible, 2 – 1 = 1 (mesure déjà effectuée)
3 non plus car 3 – 1 = 2 ; 4 non plus (4 – 0 = 4 et 8 – 4 = 4) ...
En essayant toutes les possibilités, aucune ne fonctionne.
En conclusion, aucun triplet n'est opérationnel pour la règle de 10.

Nous avons par contre trouvé facilement des quadruplets opérationnels pour la règle de longueur 10 : par exemple (1, 4, 5, 8).

D- Des programmations sur tableur

Nous nous sommes aidées d'un tableur pour faire de nombreux essais.
Par exemple, pour la règle de longueur 23, il faut une graduation comportant au moins 6 éléments.
En effet : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 donc 5 éléments ne suffisent pas.
En ajoutant 1 élément, il y aura 27 mesures théoriques possibles.

En raisonnant comme pour la règle de 10, nous devons nécessairement prendre les éléments 1, 21, 4 et 18 dans notre graduation. Pour chercher les autres, nous programmons une feuille de calculs comme ci-dessous, où apparait une graduation minimale opérationnelle en faisant tous les essais possibles dans les cellules E1 et F1.

=A3-B1

= E1

= F1

	0	1	4	10	16	18	21
1	1						
4	4	3					
10	10	9	6				
16	16	15	12	6			
18	18	17	14	8	2		
21	21	20	17	11	5	3	
23	23	22	19	13	7	5	2

Toutes les mesures de 1 à 23 apparaissent dans les cellules B2 à H8.
La graduation (1, 4, 10, 16, 18, 21) est donc opérationnelle.

D- Conjecture

Nous pensons que le même phénomène que pour la règle de 10 doit se reproduire dans les cas suivants :
4 graduations ne suffiront pas pour la règle de longueur 15.
5 graduations pour la règle de longueur 21.
6 graduations pour la règle de longueur 28 …

Mais nous n'avons pas eu le temps de trouver une preuve.