Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Gâteaux empoisonnés, ou comment endormir votre professeur ?

2016-2017

Article rédigé par :

Nom	Prénom	Niveau
De Belval	Claire-Hélène	TS
Fayette	Lucie	TS
Kennedy	Charlotte	TS
Leterrier	Clémence	TS
Benoist	Alexis	$1^{ère}$S
Castro	Zita	$4^{ème}$
Ambroggi	Milie	$6^{ème}$
Genestier	Bérénice	$6^{ème}$

Établissements : Collège Raoul Dufy et Lycée Edouard Herriot, Lyon

Enseignantes : Mmes Di Fazio, Dumontet et Janet

Chercheur(s) : Aline Parreau et Valentin Gledel, Université Lyon 1

Table des matières

1 Introduction

1.1 Présentation du sujet

L'objectif est d'endormir son professeur en lui offrant un nombre donné de gâteaux dont certains contiennent du somnifère.

- On a une quantité donnée de gâteaux et de somnifère
- Le professeur mange **deux gâteaux** choisis au hasard et s'endort s'il ingère au moins **un gramme** de somnifère.

On représentera les gâteaux de la façon suivante : (dose en g) et on considère qu'ils sont numérotés en partant de 1.

Exemple

Si on a 5 gâteaux et 2g de somnifère, on peut avoir la répartition suivante de somnifère : (0.8) (0.6) (0.5) (0.1) (0)

Le professeur s'endormira s'il mange un de ces trois couples de gâteaux : (1 ;2), (1 ;3), ou (2 ;3)

1.2 Annonce du plan

Dans une première partie, nous présenterons le travail réalisé par les collégiens sur un cas concret, puis les conclusions qu'ils ont déduites de plusieurs exemples pour le calcul des probabilités.

Dans une deuxième partie, nous nous intéresserons au cas d'une répartition équitable du somnifère dans les gâteaux.

Ensuite nous montrerons qu'afin d'optimiser les résultats, le somnifère doit être découpé et réparti en doses de 1g ou de 0,5g.

Dans une quatrième partie nous verrons comment calculer les probabilités dans les cas d'une répartition en doses de 1g uniquement ou en doses de 0.5g uniquement. Ensuite nous montrerons que ces deux configurations sont idéales par rapport à un mélange de doses de 1 et 0.5g.

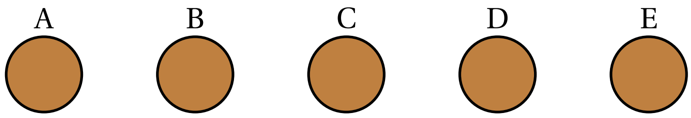
Enfin, dans une dernière partie, nous verrons comment déterminer dans quels cas le somnifère doit être découpé en 1 ou en 0.5 pour que la probabilité que le professeur s'endorme soit la plus élevée.

2 Mise en situation par des cas concrets et premiers résultats

2.1 Exemple : 5 gâteaux et 2 grammes de somnifère

2.1.1 Calcul du nombre de paires possibles

On a 5 gâteaux et 2 grammes de somnifère :



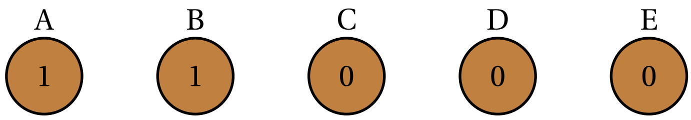
Voici toutes les paires possibles :

A+B B+C C+D D+E
A+C B+D C+E
A+D B+E
A+E

On peut donc former 10 paires différentes avec 5 gâteaux.

2.1.2 Calcul du nombre de chances d'endormir le professeur

- Répartition en 1g uniquement :

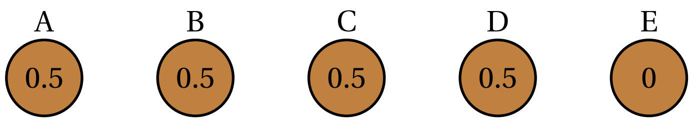


Voici toutes les paires qui fonctionnent pour endormir le professeur :

A+B B+C
A+C B+D
A+D B+E
A+E

Au total, avec 1 gramme dans deux gâteaux : on a 7 chances sur 10 d'endormir le professeur.

- Répartition en 0,5g uniquement :



Voici toutes les paires qui fonctionnent :

A+B B+C C+D
A+C B+D
A+D

Au total, avec 0,5 gramme dans 4 gâteaux : on a 6 chances sur 10 d'endormir le professeur.

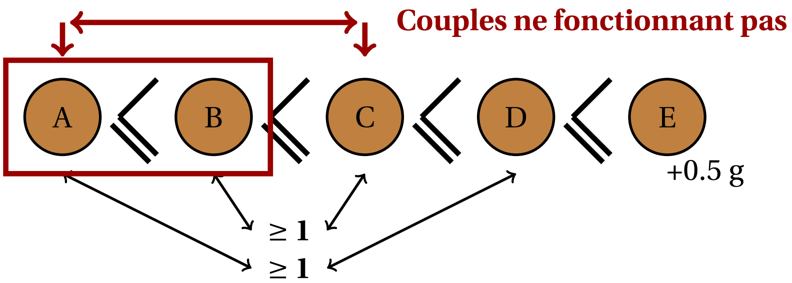
2.1.3 Meilleures répartitions

On a essayé d'autres répartitions avec 0,2 ; 0,8 ; 0,3 et 0,7 grammes. . . .
En bilan, la meilleure possibilité est celle où l'on répartit 1 gramme.

Démonstration

Supposons que 8 chances sur 10 soit possible, toujours avec 5 gâteaux 2 grammes de somnifère.
On considère une répartition et on met les gâteaux dans l'ordre croissant de somnifère (voir dessin ci dessous). Il y a 2 couples qui ne fonctionnent pas : A+B et A+C. En effet ce sont les moins dosés en somnifère, donc ils ne font pas 1 gramme [1].
Parmi les couples qui marchent, il y a A+D ≥1 gramme et B+C ≥ 1 gramme. Comme la somme des doses A+D est plus grande que 1 et que D est plus dosé que A, D contient plus de 0,5g et E aussi.
Au final A+B+C+D+E≥ 2,5 donc on utilise plus de 2 grammes de somnifère.
Donc 8 chances sur 10 est impossible à obtenir avec 5 gâteaux et 2 grammes de somnifère.

<u>Résultat</u> : le maximum de chances possible avec 5 grammes et 2 grammes de somnifère est de 7 chances sur 10



2.2 Tableaux de probabilités

Nous avons fait ce tableau (cf Annexes p. 22) pour stocker tous les résultats trouvés et nous en souvenir.
À l'horizontale : somnifère en grammes
À la verticale : nombre de gâteaux
En bleu : Nous avons calculé avec notre méthode
En gris : Nous avons supposé grâce à des suites logiques (et c'est juste)
En rose : Nous avons dû calculer à nouveau car on ne trouvait plus de suites logiques [2].

2.2.1 Calcul du dénominateur

- Nous avons remarqué :
  4 gâteaux : 1 + 2 + 3 = 6
  5 gâteaux : 1 + 2 + 3 + 4 = 10
  6 gâteaux : 1 + 2 + 3 + 4 + 5= 15
  7 gâteaux : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
  8 gâteaux : 1 + 2 + 3 + 4 +5 + 6 + 7 = 28

  A chaque fois qu'on rajoute un gâteau, on rajoute au dénominateur le nombre de gâteaux moins 1.
  C'est la méthode que nous avons utilisée pour compléter le tableau. Ainsi, dans le tableau pour 8 gâteaux et 3 grammes, nous avons inscrit la meilleure chance : 18/28.

- Pour des grands nombres de gâteaux, la méthode précédente était très longue. Nous avons utilisé la formule :
  Si n est le nombre de gâteaux , le dénominateur est $\frac{n(n-1)}{2}$.

  Démonstration-Exemple avec 43 gâteaux

	1	+ 2	+ 3	+ 4	+..............	+ 39	+ 40	+ 41	+42
+	42	+41	+40	+ 39	+	+4	+ 3	+ 2	+ 1
=	43	43	43	43	....	43	43	43	43

  Nous avons donc 42 fois le nombre 43 ; cette somme est à diviser par deux pour obtenir la somme des nombres de 1 à 42.
  Donc $42 \times \frac{43}{2} = 903$.
  Il y a donc 903 paires possibles avec 43 gâteaux.

2.2.2 Calcul du numérateur

Par exemple pour 43 gâteaux et 23 grammes [3] :
On calcule 43 - 23 = 20
On calcule la somme de tous les entiers de 42 à 20 :
42 + 41+ 40 + 39 + 38 +37 +....... + 22+ 20 = 713
Nous comptons donc 713 chances sur 903 que le professeur s'endorme.

3 Une répartition équitable

Dans cette partie, nous présenterons le travail des lycéens qui ont cherché à établir des résultats généraux pour un nombre n de gâteaux fixés selon la quantité x de somnifère dont on dispose.

Dans un premier temps, nous pouvons nous intéresser à la répartition équitable d'une quantité de somnifère x dans un nombre n de gâteaux.
De ce fait, dans chaque gâteau va se trouver une quantité de somnifère égale à $\frac{x}{n}$ grammes.

- Soit n le **nombre de gâteaux fixé**, avec $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$
- Soit x le **nombre de grammes de somnifère**, avec $x > 0$

Propriétés

Pour tout $x > 0$, et n entier tel que $n \geq 2$ et dans le cas d'une répartition équitable,

➢ si $\frac{x}{n} < \frac{1}{2}$, alors le professeur ne pourra pas s'endormir.

➢ si $\frac{x}{n} \geq \frac{1}{2}$, alors le professeur s'endort quels que soient les gâteaux qu'il choisit.

Démonstration

$\forall x > 0, n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$

- $\frac{x}{n} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \times \frac{x}{n} \geq 1$
  Donc quel que soit le couple de gâteaux choisi, on mange au moins un gramme de somnifère.
- $\frac{x}{n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \times \frac{x}{n} < 1$
  Donc quel que soit le couple de gâteaux choisi, on mange moins d'un gramme de somnifère.

Exemple

Si $n = 4$ et $x = 1$, on a $\frac{x}{n} = \frac{1}{4}$
donc $\frac{x}{n} < \frac{1}{2}$
En effet, si on met autant de somnifère dans chaque gâteau, il y en aura 0.25g dans chaque.
Donc le professeur ne peut pas s'endormir.

4 Décomposition du grammage

On a vu que dans le cas où la répartition est équitable, le professeur s'endort obligatoirement si $x \geq \frac{n}{2}$. De plus, il faut au moins un gramme de somnifère pour endormir le professeur.

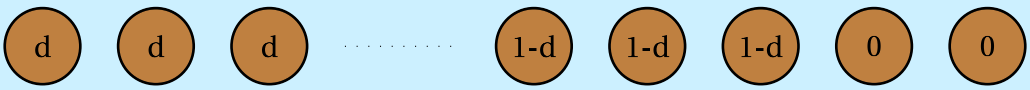
Dans la suite, on suppose que la quantité de somnifère x est un entier supérieur ou égal à 1 et inférieur à $\frac{n}{2}$

Propriétés

Partager chaque gramme de somnifère en deux doses, une dose contenant d grammes et une dose contenant $(1-d)$ grammes avec $0.5 < d < 1$ n'est pas avantageux.
Les résultats sont optimisés lorsque $d = 0.5$ ou $d = 1$

Démonstration

On possède x grammes de somnifère et chaque gramme de somnifère est découpé en deux doses : une de d grammes et une de $(1-d)$ grammes. Il y a donc x gâteaux qui contiennent chacun d grammes et x gâteaux qui contiennent chacun $(1-d)$ grammes.
Comme $x < \frac{n}{2}$, on a $n > 2x$, il reste donc des gâteaux qui n'ont pas de somnifère.



Etape 1 : On va déterminer le nombre de couples permettant d'endormir le professeur dans les trois cas suivants :

1. Cas 1 : Si $0.5 < d < 1$
   On remarque que :
   •$2d > 1$: le professeur s'endort
   •$d + (1-d) = 1$: le professeur s'endort
   •$2(1-d) < 1$: le professeur ne s'endort pas

   Déterminons le nombre de cas favorables :
   • avec $2d$: il y a x gâteaux contenant d grammes, le premier gâteau peut être mangé avec $x-1$ autres gâteaux contenant d grammes, etc.
   donc le nombre de cas favorables est : $(x-1)+(x-2)+\ldots+1 = \frac{x(x-1)}{2}$

   • avec $d+(1-d)$: il y a x gâteaux contenant d grammes et x gâteaux contenant $(1-d)$ grammes. Chaque gâteau contenant d grammes peut être mangé avec les x gâteaux contenant $(1-d)$ grammes.
   donc le nombre de cas favorables est : $x \times x = x^2$

   Conclusion dans le cas 0.5 < d < 1
   Le nombre de couples permettant d'endormir le professeur est $\frac{x(x-1)}{2} + x^2 = \boxed{\frac{3x^2-x}{2}}$

2. Cas 2 : Si $d = 0.5$
   Dans ce cas,$1 - d = 0.5$, il y a donc $2x$ gâteaux contenant chacun 0.5 gramme de somnifère. Dès que le professeur mange deux de ces $2x$ gâteaux, il s'endort.
   Le premier gâteau peut être mangé avec $2x - 1$ autres gâteaux, le deuxième avec $2x - 2$ etc.
   Le nombre de cas favorables est : $(2x - 1) + (2x - 2) + ... + 1 = \frac{2x(2x-1)}{2} = 2x^2 - x$

   Conclusion dans le cas d = 0.5
   Le nombre de couples permettant d'endormir le professeur est $\boxed{2x^2 - x}$

3. Cas 3 : Si $d = 1$
   Si l'on mange un gâteau contenant 1g, le professeur s'endort quelle que soit la dose du second gâteau : le nombre de cas favorables dépend donc de n.
   On a n gâteaux et x grammes de somnifère répartis en 1g. On a donc x gâteaux contenant du somnifère et $(n - x)$ gâteaux ne contenant rien.

   Déterminons le nombre de cas favorables :
   Le premier gâteau contenant 1g peut être mangé avec $n-1$ autres gâteaux. Le deuxième avec $(n - 2)$ etc.. jusqu'au dernier gâteau contenant 1g qui peut être mangé avec tous les gâteaux (n) sauf ceux contenant 1g déjà comptés, soient $(n - x)$ gâteaux.
   Les autres gâteaux n'ont pas de somnifère, ils ne rentrent donc pas dans le calcul car deux gâteaux de 0g n'endorment pas le professeur.
   Le nombre de cas favorables est : $\underbrace{(n-1)+(n-2)+,\ldots,+(n-x)}_{\text{x termes}} = xn - \frac{x(x+1)}{2}$

   Conclusion dans le cas d = 1
   Le nombre de couples permettant d'endormir le professeur est $\boxed{xn - \frac{x(x+1)}{2}}$

Etape 2 : On compare la répartition d telle que 0.5 < d < 1 avec d = 0.5 puis avec d = 1 :

1. Montrons que le nombre de cas favorables est plus grand lorsque $d = 0.5$ que lorsque d est tel que $0.5 < d < 1$
   Soit que $2x^2 - x > \frac{3x^2-x}{2} \Leftrightarrow x^2 - x > 0$
   Cette inéquation a pour ensemble de solutions $S =]1 ; +\infty[$
   Comme $x \geq 1$, il est plus intéressant de diviser en 0.5 qu'en d et $(1 - d)$ avec $0.5 < d < 1$.

2. Montrons que le nombre de cas favorables est plus grand avec $d = 1$ que lorsque d est tel que $0.5 < d < 1$:
   Soit que $xn - \frac{x(x+1)}{2} > \frac{3x^2-x}{2} \Leftrightarrow 2x(n - 2x) > 0$
   Cette inéquation a pour ensemble de solutions $S =]0 ; \frac{n}{2}[$
   Comme $x < \frac{n}{2}$, il est plus intéressant de diviser en 1 gramme qu'en d et $(1 - d)$ avec $0.5 < d < 1$

   Nous n'avons pas traité tous les cas car tout le somnifère est divisé de la même manière. Nous pensons que le résultat reste vrai dans le cas où les divisions sont différentes

5 Optimiser la répartition : configurations optimales

Le somnifère doit donc être divisé uniquement en doses de 1 ou de 0,5g [4].

On cherche maintenant à les répartir dans les gâteaux afin que la probabilité d'endormir le professeur soit la plus élevée.

5.1 Calcul de P_1 et $P_{0.5}$

On utilise cette fois la méthode des arbres pondérés.

Définitions

Soit D : "endormir le professeur".

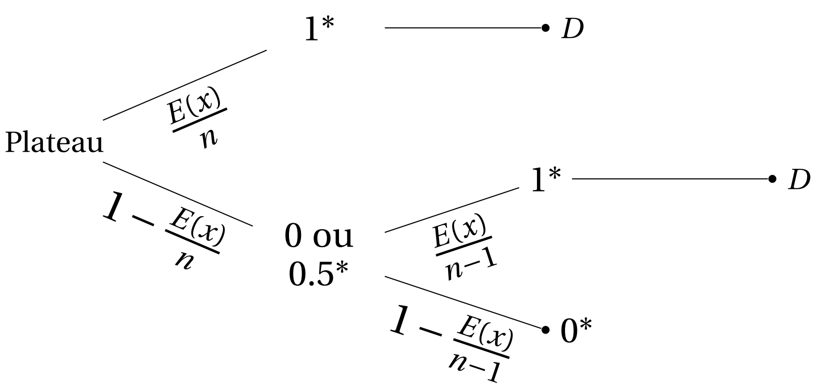
On note P(D) la probabilité que le professeur s'endorme.

On note $E(x)$ la partie entière de x.

Définition

On note $P_1(D)$ la probabilité que le professeur soit endormi si le somnifère est divisé en doses de 1g uniquement.

Arbre de probabilités pour une répartition en doses de 1g uniquement



* = nombre de grammes ingérés [5]

Propriété

Pour tout $x > 0$, et n entier tel que $n \geq 2$

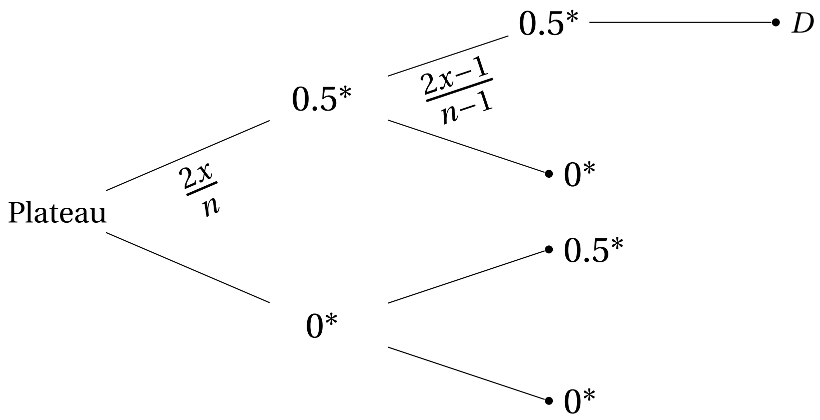
$P_1(D) = \frac{E(x)}{n} + \left(1 - \frac{E(x)}{n}\right) \times \left(\frac{E(x)}{n-1}\right)$

(On retrouve bien le résultat obtenu dans la partie précédente.)

Définition

On note $P_{0.5}(D)$ la probabilité que le professeur soit endormi si le somnifère est divisé en des doses de 0.5g uniquement.

Arbre de probabiltés pour une répartition en doses de 0,5g uniquement



* = nombre de grammes ingérés

Propriété

Pour tout $x > 0$, et n entier tel que $n \geq 2$

$P_{0.5}(D) = \frac{2x}{n} \times \frac{2x-1}{n-1}$

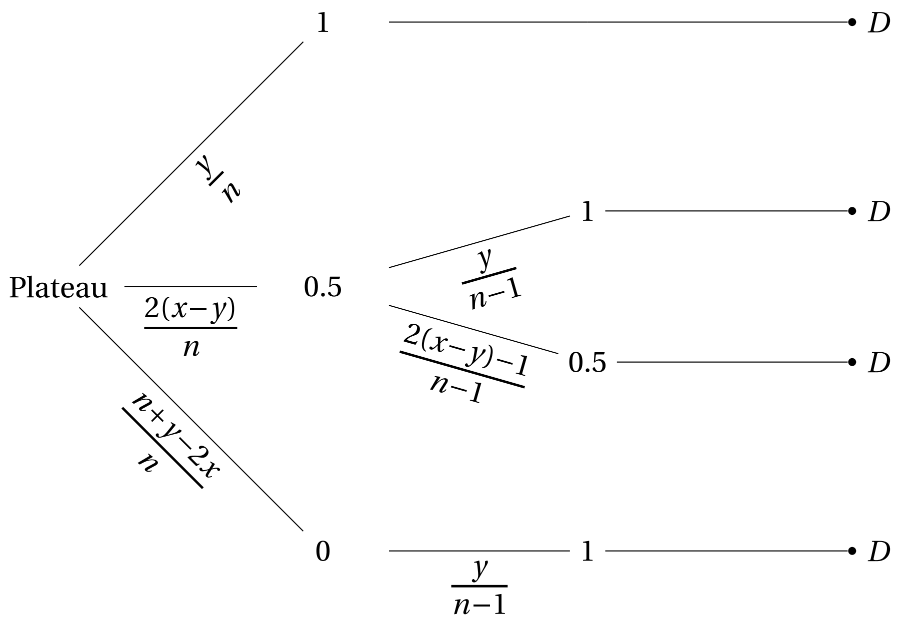
5.2 Diviser en 1 ou en 0.5 uniquement

Définition

On note $P_{1.5}(D)$ la probabilité que le professeur soit endormi si le somnifère est divisé en une combinaison de 1 et de 0.5g.

Soit $y \in N$ le nombre de 1 répartis.

Après utilisation des 1, on aura donc encore $x - y$ grammes restants, soient $2(x - y)$ 0.5g restants.



Propriété

Pour tout $x > 0$, et n entier tel que $n \geq 2$

$$P_{1.5}(D) = \frac{y}{n} + \frac{2(x-y)}{n} \times \frac{y}{n-1} + \frac{2(x-y)}{n} \times \frac{2(x-y)-1}{n-1} + \frac{n+y-2x}{n} \times \frac{y}{n-1}$$
$$= \frac{2yn+3y^2+y+4x^2-2x-8xy}{n(n-1)}$$

Propriété

Pour tout $x > 0$, et n entier tel que $n \geq 2$

$P_{0.5}(D) \geq P_{1.5}(D)$ ou $P_1(D) \geq P_{1.5}(D)$

C'est à dire qu'il est donc toujours plus avantageux de diviser la quantité totale de somnifère en 1 ou en 0.5 uniquement qu'en différentes associations de 1 et de 0.5.

Démonstration

On a soit $P_{0.5} \geq P_1$, soit $P_{0.5} \leq P_1$. On va donc raisonner par disjonction de cas :

1er cas : on suppose que $P_{0.5}(D) \geq P_1(D)$ et on montre que $P_{0.5}(D) \geq P_{1.5}(D)$ [6]

$\bullet P_{0.5}(D) \geq P_1(D)$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{n} \times \frac{2x-1}{n-1} \geq \frac{E(x)}{n} + (1 - \frac{E(x)}{n}) \times (\frac{E(x)}{n-1})$

$\Leftrightarrow \frac{4x^2-2x}{n(n-1)} \geq \frac{2nE(x)-E(x)-E(x)^2}{n(n-1)}$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x \geq 2nE(x) - E(x) - E(x)^2$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{4x^2-2x+E(x)+E(x)^2}{2E(x)} \geq n}$ *1

• On cherche à montrer que $P_{0.5}(D) \geq P_{1.5}(D)$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{n} \times \frac{2x-1}{n-1} \geq \frac{3y^2+y+2yn+4x^2-2x-8xy}{n(n-1)}$

$\Leftrightarrow 8xy - y - 3y^2 \geq 2yn$

$\Leftrightarrow \frac{8xy-y-3y^2}{2y} \geq n$

• Si on montre que $\frac{8xy-y-3y^2}{2y} \geq \frac{4x^2-2x+E(x)+E(x)^2}{2E(x)} \geq n$ (d'après *1), alors l'égalité est démontrée.

Démontrons que $\frac{8xy-y-3y^2}{2y} \geq \frac{4x^2-2x+E(x)+E(x)^2}{2E(x)}$.

$E(x)$ est la partie entière de x et x est un multiple de 0.5 donc $x = E(x) + 0$ ou $x = E(x) + 0.5$

➢ Si $E(x) = x$, on a : $\frac{8xy-y-3y^2}{2y} \geq \frac{5x^2-x}{2x}$

$\Leftrightarrow 8x^2y - xy - 3y^2x \geq 5x^2 - xy$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

Donc l'inégalité est vérifiée.

Démonstration (suite)

➢ Si $E(x) = x - 0.5$, on a : $\frac{8xy-y-3y^2}{2y} \geq \frac{4x^2-2x+(x-0.5)+(x-0.5)^2}{2(x-0.5)}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 3xy + 0.75 + 1.5y \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3y-3)^2 - 4 \times 3 \times (0.75 + 1.5y) = 9y^2 > 0$

Donc deux racines réelles x_1 et x_2.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = y + \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$y+\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe		+	0	-	0	+	

Or pour tout x réel, $x \geq y + \frac{1}{2}$

Donc l'inégalité est vérifiée.

Donc $P_{0.5}(D) \geq P_1(D) \Rightarrow P_{0.5}(D) \geq P_{1.5}(D)$

2e cas : on suppose que $P_1(D) \geq P_{0.5}(D)$ et on montre que $P_1(D) \geq P_{1.5}(D)$

La démonstration est analogue (cf Annexes p25-26)

Exemple

Pour $n = 7$ et $x = 3$

Configuration 1 : (1) (1) (1) (0) (0) (0) (0) $\to P_1 = \frac{5}{7}$

Configuration 2 : (0.5) (0.5) (0.5) (0.5) (0.5) (0.5) (0) $\to P_{0.5} = \frac{5}{7}$

Configuration 3 : (1) (1) (0.5) (0.5) (0) (0) (0) $\to P_{1.5} = \frac{4}{7}$

Les configurations 1 et 2 sont donc plus avantageuses.

6 Notion de Seuil

Sachant désormais que les configurations uniquement en doses de 1 ou uniquement de 0,5 g sont les meilleures, on cherche à savoir quand utiliser l'une ou l'autre selon la quantité x de somnifère.

6.1 Définition

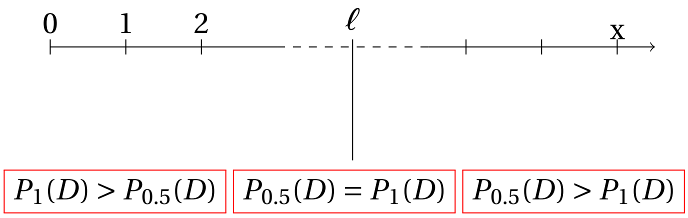
Définition

Pour une quantité n de gâteaux,

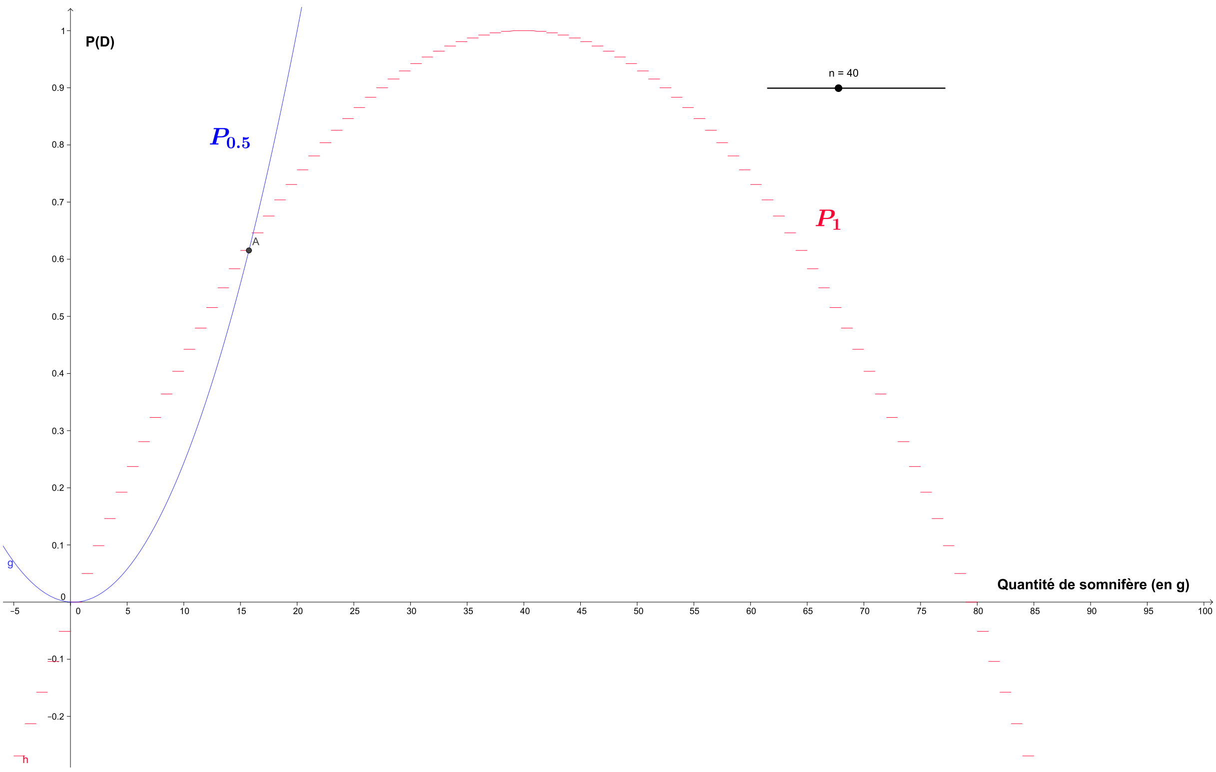
ℓ est une valeur précise de x à partir de laquelle $P_{0.5}(D)$ devient meilleure que $P_1(D)$.
$P_1(D)$ est la meilleure jusqu'à une valeur précise de x, notée ℓ, à partir de laquelle $P_{0.5}(D)$ devient la meilleure [7] .

Définition

On note S le **Seuil**, i.e. la dose de somnifère à partir de laquelle la configuration en 0.5 devient la configuration optimale.
Remarque : Comme on fait varier x de 0.5 en 0.5, on arrondit ℓ au 0.5 supérieur pour déterminer S.



Il s'agit donc de déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes représentatives de $P_1(D)$ et $P_{0.5}(D)$ en fonction de n.



[8]

6.2 Calcul du seuil

On veut résoudre l'inéquation suivante :

$P_1(D) \leq P_{0.5}(D)$

$\iff \frac{E(x)}{n} + \left(1 - \frac{E(x)}{n}\right) \times \left(\frac{E(x)}{n-1}\right) \leq \frac{2x}{n} \times \frac{2x-1}{n-1}$

x variant de 0.5 en 0.5, on peut distinguer deux cas pour résoudre l'équation.

- On considère $E(x) = x - 0.5$

  On remplace dans l'inéquation :

  $P_1(D) \leq P_{0.5}(D)$

  $\iff \frac{x-0.5}{n} + \left(1 - \frac{x-0.5}{n}\right) \times \left(\frac{x-0.5}{n-1}\right) \leq \frac{2x}{n} \times \frac{2x-1}{n-1}$

  $\iff x \geq 0.4n - 0.1$

  On a donc $\ell = 0.4n - 0.1$ [9].

- On considère $E(x) = x$

  On remplace dans l'inéquation :

  $P_1(D) \leq P_{0.5}(D)$

  $\Longleftrightarrow \frac{x}{n} + \left(1 - \frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{x}{n-1}\right) \leq \frac{2x}{n} \times \frac{2x-1}{n-1}$

  $\Longleftrightarrow x \geq 0.4n + 0.2$

  On a donc $\ell = 0.4n + 0.2$

➽ Le Seuil peut donc être déterminé pour un nombre n de gâteaux donné.
Mais quel cas utiliser ?
Comment prévoir si la valeur Seuil pour un n donné correspond à $E(x) = x$ ou $E(x) = x - 0.5$?

6.3 Déterminer le Seuil en fonction du nombre de gâteaux

Propriétés [10]

1. Si $n = 5k - 2$ ou $n = 5k + 2$ avec $k \in N$, les deux formules donnent le même résultat après arrondi
2. Sinon les deux résultats sont différents et on conjecture que :
   (a) Pour $n = 5k - 1$ ou $n = 5k + 1$ avec $k \in N$, $\ell = 0.4n - 0.1$
   (b) Pour $n = 5k$ avec $k \in N$, $\ell = 0.4n + 0.2$

Exemple, propriété 1

Pour $n = 7$:
$n = 5 \times 1 + 2$ donc les deux formules fonctionnent
En effet, $0.4n + 0.2 = 3$ et $0.4n - 0.1 = 2.7$
donc $S = 3$

Donc à partir de 3g de somnifère, il sera plus avantageux de le diviser en 0,5g, mais si l'on en a moins, il vaut mieux le diviser en 1 uniquement.

Démonstration, propriété 1

- Pour $n = 5k - 2$,
  - $0.4n + 0.2 = 0.4(5k-2) + 0.2 = 2k - 0.6$, arrondi à $2k - 0.5$
  - $0.4n - 0.1 = 0.4(5k-2) - 0.1) = 2k - 0.9$, arrondi à $2k - 0.5$

  donc les deux formules donnent le même résultat après arrondi.
- Pour $n = 5k + 2$,
  - $0.4n + 0.2 = 0.4(5k+2) + 0.2 = 2k + 1$
  - $0.4n - 0.1 = 0.4(5k+2) - 0.1 = 2k + 0.7$, arrondi à $2k + 1$

  donc les deux formules donnent le même résultat après arrondi.

Exemple, conjecture 2.(a)

Pour $n = 11$; soit $n = 5 \times 2 + 1$

- $0.4n + 0.2 = 4.6$ arrondi à 5
- $0.4n - 0.1 = 4.3$ arrondi à 4.5

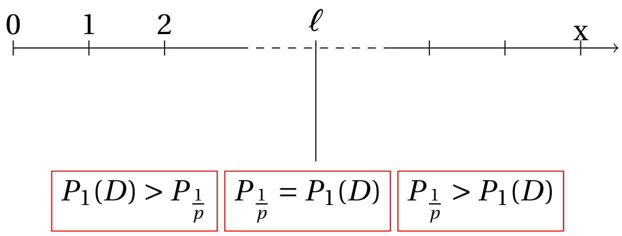
Pour $x = 5, P_1(D) = \frac{8}{11}$ et $P_{0.5}(D) = \frac{9}{11}$, donc $P_{0.5}(D) \geq P_1(D)$
Mais pour $x = 4.5, P_1(D) = \frac{34}{55}$ et $P_{0.5}(D) = \frac{36}{55}$, donc $P_{0.5}(D) \geq P_1(D)$

Donc $S = 4.5$

7 Conclusion

Pour endormir son professeur à coup sûr s'il mange deux gâteaux, il faut donc utiliser au moins $\frac{n}{2}$ grammes de somnifère, mais si la quantité de somnifère est limitée alors il faudra le répartir soit en doses de 1g soit en doses de 0.5g selon le nombre de gâteaux et la quantité de somnifère.
Pour un nombre de gâteaux donné, la probabilité d'endormir son professeur sera plus élevée avec une configuration en 1g pour des petites doses de somnifère. La configuration en 0.5g deviendra plus avantageuse à partir d'une certaine quantité de somnifère appelée le seuil. Nous avons déterminé expérimentalement cette valeur mais nous ne l'avons pas prouvé dans tous les cas.

Nous avons également conjecturé que si le professeur prend non plus deux gâteaux mais p gâteaux alors pour un nombre de gâteaux donné et des doses croissantes de somnifère, il faudra d'abord diviser le somnifère en doses de 1 gramme dans un maximum de gâteaux, puis, une fois la valeur seuil dépassée, il faudra le répartir en doses de $\frac{1}{p}$ gramme.

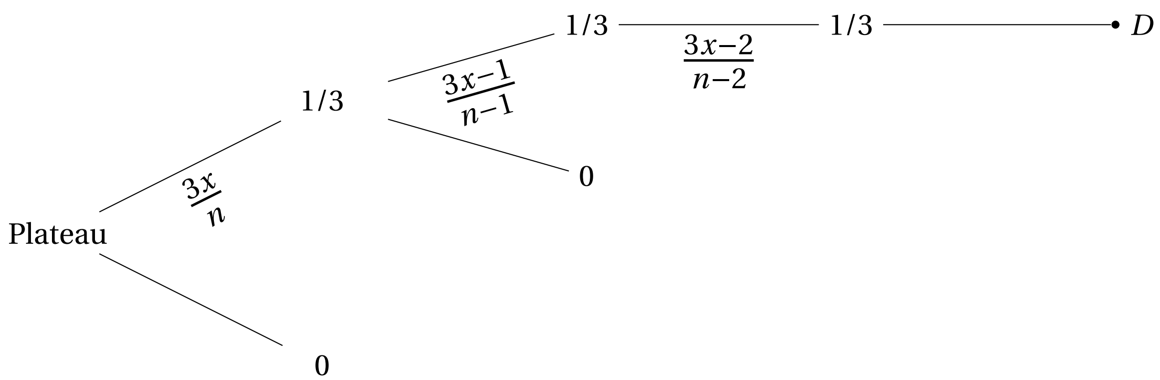


Exemple

Si $p = 3$, pour des quantités de somnifère inférieures au seuil, il faudrait le diviser en 1g, puis ensuite en doses de $\frac{1}{p} = \frac{1}{3}$g,.

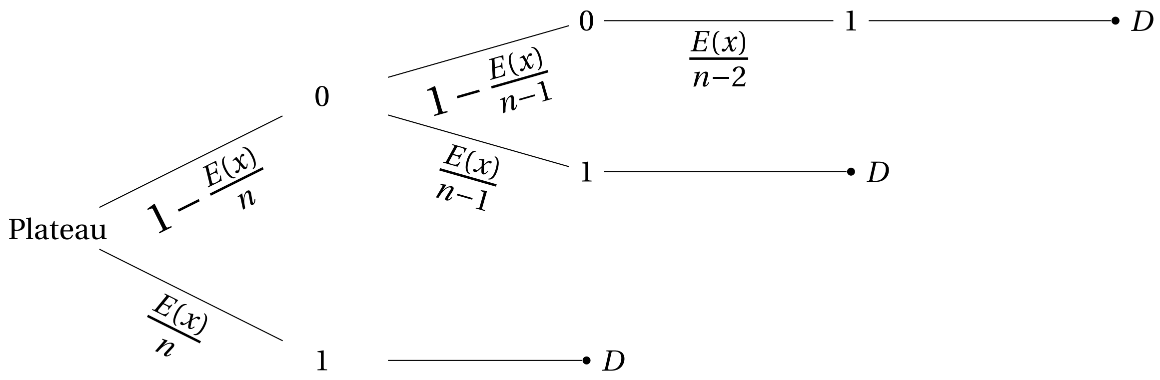
On considère que x varie de $1/3$ en $1/3$ et on exprime les $P(D)$ pour différentes configurations.

Répartiton en 1/3 uniquement



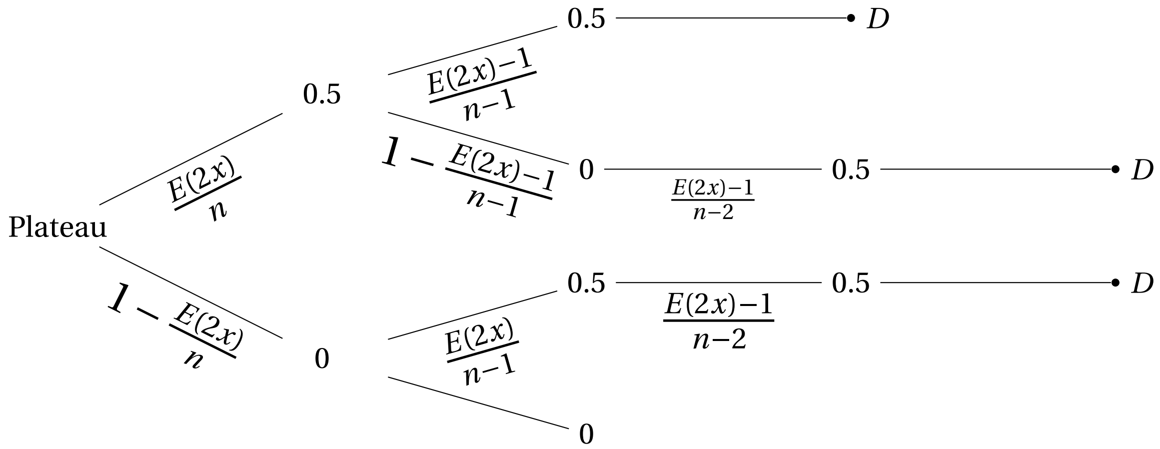
$$P_{1/3}(D) = \frac{3x}{n} \times \frac{3x-1}{n-1} \times \frac{3x-2}{n-2}$$

Répartition en 1 uniquement



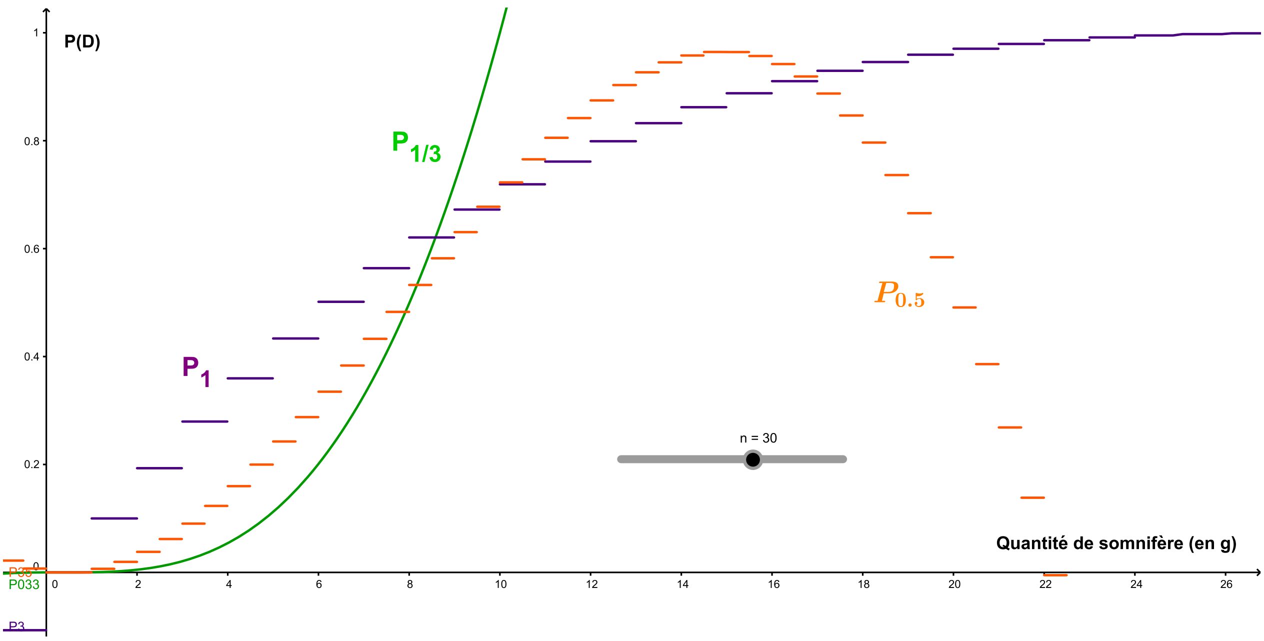
$$P_1(D) = \frac{E(x)}{n} + (1-\frac{E(x)}{n}) \times \frac{E(x)}{n-1} + (1-\frac{E(x)}{n}) \times (1-\frac{E(x)}{n-1}) \times \frac{E(x)}{n-2}$$

Répartition en 0.5 uniquement



$$P_{0.5}(D) = \frac{E(2x)}{n} \times \frac{E(2x)-1}{n-1} + \frac{E(2x)}{n} \times (1-\frac{E(2x)-1}{n-1}) \times \frac{E(2x)-1}{n-2} + (1-\frac{E(2x)}{n-1}) \times \frac{E(2x)}{n-1} \times \frac{E(2x)-1}{n-2}$$

On obtient alors la représentation graphique suivante, illustrant les conjectures énoncées précédemment.



8 Annexes

	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
5	4/10	7/10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	5/15	9/15	10/15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	6/21	11/21	11/21	15/21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	7/28	13/28	13/28	18/28	21/28	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	8/36	15/36	15/36	21/36	21/36	26/36	1	1	1	1	1	1	1	1
10	9/45	17/45	17/45	24/45	24/45	30/45	36/45	1	1	1	1	1	1	1
11	10/55	19/55	19/55	27/55	27/55	34/55	34/55	40/55				1	1	1
12	11/66	21/66	21/66	30/66	30/66	38/66	38/66	45/66	55/66			1	1	1
13	12/78	23/78	23/78	33/78	33/78	42/78	42/78	50/78	54/78	57/78		1	1	1
14	13/91	25/91	25/91	36/91	36/91	46/91	46/91	55/91	55/91	63/91	76/91	1	1	1

Résultats vérifiés

Résultats déduits par les suites logiques

Résultats recalculés

Démonstration (suite)

2e cas : on suppose que $P_1(D) \geq P_{0.5}(D)$ et on montre que $P_1(D) \geq P_{1.5}(D)$ [11]

• $P_1(D) \geq P_{0.5}(D)$

$\Leftrightarrow \frac{E(x)}{n} + (1 - \frac{E(x)}{n}) \times (\frac{E(x)}{n-1}) \geq \frac{2x}{n} \times \frac{2x-1}{n-1}$

$\Leftrightarrow \frac{2nE(x)-E(x)-E(x)^2}{n(n-1)} \geq \frac{4x^2-2x}{n(n-1)}$

$\Leftrightarrow 2nE(x) - E(x) - E(x)^2 \geq 4x^2 - 2x$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{4x^2-2x+E(x)+E(x)^2}{2E(x)} \leq n}$ *2

• On cherche à montrer que $P_1(D) \geq P_{1.5}(D)$

$\Leftrightarrow \frac{E(x)}{n} + (1 - \frac{E(x)}{n}) \times (\frac{E(x)}{n-1}) \geq \frac{3y^2+y+2yn+4x^2-2x-8xy}{n(n-1)}$

$\Leftrightarrow 2nE(x) - E(x) - E(x)^2 \geq 2yn + 3y^2 + y + 4x^2 - 2x - 8xy$

$\Leftrightarrow \frac{E(x)+E(x)^2+3y^2+y+4x^2-2x-8xy}{2E(x)-2y} \leq n$

• Si on montre que $\frac{E(x)+E(x)^2+3y^2+y+4x^2-2x-8xy}{2E(x)-2y} \leq \frac{4x^2-2x+E(x)+E(x)^2}{2E(x)} \leq n$ (d'après *2), alors l'égalité est démontrée.

Démontrons que $\frac{E(x)+E(x)^2+3y^2+y+4x^2-2x-8xy}{2E(x)-2y} \leq \frac{4x^2-2x+E(x)+E(x)^2}{2E(x)}$.

De même $E(x)$ est la partie entière de x et x est un multiple de 0.5 donc $x = E(x) + 0$ ou $x = E(x) + 0.5$

➢ Si $E(x) = x$, on a : $\frac{5x^2-x+3y^2+y-8xy}{2x-2y} \leq \frac{5x^2+x}{2x}$

$\Leftrightarrow 10x^3 - 2x^2 + 6xy^2 + 2xy - 16x^2y \leq 10x^3 + 2x^2 - 10x^2y - 2xy$

$\Leftrightarrow 4y + 6y^2 \leq 4x + 6xy$

Or $x > y$

Donc l'inégalité est vérifiée.

Démonstration (suite)

➣ Si $E(x) = x - 0.5$, on a : $\frac{(x-0.5)+(x-0.5)^2+3y^2+y+4x^2-2x-8xy}{2(x-0.5)-2y} \leq \frac{4x^2-2x+(x-0.5)+(x-0.5)^2}{2(x-0.5)}$

$\Leftrightarrow -3xy + 0.75y - 3y^2x + 1.5y^2 + 3x^2y \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3y - 3y^2)^2 - 4 \times 3 \times (0.75y + 1.5y^2) = 9y^4 > 0$

Donc deux racines réelles x_1 et x_2.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = y + \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$y+\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe		+	0	-	0	+	

Or pour tout x réel, $x \geq y + \frac{1}{2}$

Donc l'inégalité est vérifiée.

Donc $P_1(D) \geq P_{0.5}(D) \Rightarrow P_1(D) \geq P_{1.5}(D)$

Notes d'édition

[1] On suppose ici qu'il y a exactement 8 couples sur 10 qui "fonctionnent" ; alors les deux moins dosés, et seulement eux, ne fonctionnent pas. Si on suppose qu'une répartition donne plus de 8 chances sur 10, on a encore que les 8 autres couples fonctionnent et la suite de la démonstration est valable.

[2] Il manque l'indication du choix faits pour les découpages, et aussi quelles "suites logiques" sont utilisées. De plus, le tableau page 22 comporte quelques petites erreurs (que l'on peut rectifier à l'aide des formules données par la suite).

[3] Ici, on choisit de répartir le somnifère uniquement en parts de 1 gramme. En procédant comme avant, on compte 42 paires fonctionnant avec le premier gâteau empoisonné , 41 avec le deuxième,... et 20 avec le dernier.
Cependant dans cet exemple, en répartissant les 21.5 des 23 grammes en doses de $\frac{1}{2}$ gramme on endormirait sûrement le professeur.

[4] Et on suppose maintenant que la quantité x de somnifère est un entier ou un entier plus $\frac{1}{2}$.

[5] Dans les 3 schémas, il s'agit des quantités ingérées à chaque étape. Dans le premier, le "ou 0.5" est là pour le cas où x n'est pas entier et qu'on a mis les 0.5 g restants dans un gâteau sans dose de 1 g; il en faudrait un second à l'extrémité de la dernière branche. Dans le troisième, page 12, ne sont représentées que les branches conduisant à l'endormissement du professeur.

[6] Dans le calcul qui suit, les formules supposent que $E(x)$ et y sont non nuls, ce qui est justifié puisque x est supposé≥ 1 et que si $y = 0$ on est dans le cas de la répartition en doses de 0.5 uniquement.
[7] Cette phrase est autant une proposition qu'une définition ; elle sera démontrée par les calculs, ce qui justifie aussi la définition de S. De fait, ℓ sera une valeur intermédiaire, calculée séparément selon qu'on considère les quantités x entières ou entières plus 0.5.
[8] Dans ce graphique, il faudrait limiter la représentation de P_1 à $0 \leq x \leq n$ et celle de $P_{0.5}$ à $0 \leq x \leq \frac{n}{2}$. En dehors, les calculs de probabilité ne sont plus valables. Et de même pour le graphique page 21.
[9] Dans le calcul, on a simplifié par $x - 0.5$, ce qui est correct car la valeur $x = 0.5$ est exclue. De même dans le calcul suivant on peut simplifier par x.
Les valeurs calculées pour ℓ ne tiennent pas compte des conditions $E(x) = x - 0.5$ ou $E(x) = x$) du calcul. Pour trouver le "seuil" S il faudra comparer les arrondis des valeurs obtenues pour ℓ à l'entier 0.5 supérieur dans le premier cas et à l'entier supérieur dans le second.Comme ces deux valeurs ne diffèrent que de 0.5, S est égal à plus petite des deux.
[10] Comme dit ci-dessus, pour la première formule on ne doit considérer que l'arrondi supérieur à un entier plus 0.5, et pour la seconde que l'arrondi entier supérieur. Pour $n = 5k-2$, seule la première donne réellement l'arrondi $S = 2k-0.5$et pour $n = 5k+2$, seule la seconde donne l'arrondi $S = 2k+1$.
Le (a) de la conjecture est vérifié ; il se démontre de même que le 1. (démonstration page suivante). Par contre, si $n = 5k$, l'arrondi de $0.4n-0.1 = 2k-0.1$ au demi-entier supérieur donne $2k+0.5$ alors que celui de $0.4n+0.2$ à l'entier supérieur donne $2k+1$. C'est donc la première formule qui donne la bonne valeur de S.
[11] Les formules supposent que $E(x) \neq 0$, ce qui est justifié de même que pour le premier cas, et $y \neq E(x)$, que l'ont peut aussi exclure : alors, si x est entier on aurait une répartition en doses de 1 gramme uniquement et sinon on aurait un unique gâteau avec 0.5 gramme de somnifère, et dans ces deux cas les probabilités P_1 et $P_{1.5}$ sont égales.