# Dessinons un mot plié

Alice Sartre[1], Amandine Prat[1], Bastien Bernagaud[1], Chloé Chalot[1], Julie Delort[1], Emmanuelle Fayette[2], Marco Sa Dias[2], Marie Bernaudon[2], Matthieu Moussine-Pouchkine[2], Romain Massou[2], Solange Garbit[2], Théotime Brun[2], Sylvie Di Fazio[3], Delphine Therez[3], Magali Favre[3], Aline Parreau[4] et Valentin Gledel[4]

[1]Lycée Jean-Paul Sartre, Bron
[2]Lycée Édouard Herriot, Lyon
[3]Professeures
[4]Chercheurs, Laboratoire LIRIS, Université Lyon 1 - CNRS

Années 2018–2019

**Résumé**

Prenez une longue bande de papier et pliez la en deux en ramenant le côté droit sur le côté gauche. Recommencez ainsi jusqu'à ne plus pouvoir plier (toujours en ramenant le côté droit sur la gauche). Marquez bien tous les plis puis dépliez. Sur le morceau de papier, il y a une suite de plis creux ($C$) et de plis bosse ($B$). Si l'on a plié trois fois la bande, on devrait obtenir la séquence (appelée mot) suivante : $CCBCCBB$. Pouvez-vous deviner quelle serait le mot obtenu en pliant plus de fois la bande ?

Si on reprend notre morceau de papier qu'on laisse naturellement le papier se plier avec des angles à 90° (sens trigonométrique pour les plis bosse et horaire pour les plis creux), quelle forme obtient-on ?

Voici les questions que nous nous sommes posées et auxquelles nous avons tâché de répondre. Pour ce faire, nous avons trouvé deux méthodes pour construire les mots sans papier. De ces méthodes nous avons dégagé des propriétés. Nous avons ensuite étudié la représentation géométrique des mots. Enfin à l'aide de la série génératrice de la suite des lettres du mot nous avons montré qu'elles formaient un nombre transcendant en les voyant comme les chiffres d'un nombre en base deux.

# 1 La construction des mots et les propriétés qui en découlent

## 1.1 Première méthode : la symétrie inversée

### 1.1.1 Description de la méthode

Prenons donc une bande de papier et plions là comme indiqué plus haut. En la dépliant, nous obtenons un creux, que nous nommons C qui sépare la bande en deux faces.

Lorsque nous réitérons l'opération, nous divisons à nouveau la bande en deux. Sur les trois plis obtenus alors, nous observons : un creux, un creux et une bosse. Nous le noterons : CCB. Ils forment ce que nous appellerons une symétrie inversée par rapport au creux issu du premier pliage, le creux central : À gauche du creux central il y a un creux, et à sa droite, symétriquement par rapport au creux central, une bosse.

Cela s'explique par la présence d'un « ancien » pli, ici le creux central, issu d'un précédent pliage, qui crée deux plis miroir pour permettre la superposition des faces lorsqu'on replie la bande.

Nous en déduisons alors que lorsque l'on plie cette bande, donc qu'on divise les anciennes faces, on crée un nouveau pli entre chaque ancien, qui est symétriquement inversé par rapport au creux central, à un autre nouveau pli.

Cela nous permet de prévoir le mot d'un pliage sans même plier la feuille. En effet, il nous suffit de regarder le mot précédent pour trouver la moitié du mot cherché, puis, en ajoutant le creux central, à appliquer la symétrie inversée.

| $n$ | $n$-ième mot |
|---|---|
| 1 | C |
| 2 | CCB |
| 3 | CCBCCBB |
| 4 | CCBCCBBCCCBBCBB |
| 5 | CCBCCBBCCCBBCBBCCCBCCBBBCCBBCBB |

TABLE 1 – Premiers mots pliés.

## 1.2 Propriétés dûes à la méthode

### 1.2.1 Notations et définitions

I. Soit $\mathcal{P}(n)$ le mot obtenu après $n$ pliages.

II. Soit $\mathcal{L}_n$ la longueur du mot après $n$ pliages ; c'est-à-dire le nombre total de lettres composant le mot après $n$ pliages (la longueur de $\mathcal{P}(n)$).

III. Soit $\mathcal{C}_n$ le nombres de lettres « C » dans un mot après $n$ pliages.

IV. Soit $\mathcal{B}_n$ le nombres de lettres « B » dans un mot après $n$ pliages.

V. Soit $\ell_n$ la $n$-ième lettre d'un mot plié.

VI. Le symétrique inversé d'un mot $\mathcal{P}(n)$ est noté $\overline{\mathcal{P}(n)}$ et consiste en une composition de deux transformations : un retournement du mot et un inversement des lettres (changement de « B » par des « C » et inversement). Cela est illustré dans la TABLE 2.

Nous remarquons sur cet exemple qu'après transformation, $\mathcal{L}_n$ ne change pas, mais $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{B}_n$ si.

### 1.2.2 Théorèmes

**Théorème 1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{L}_n = 2^n - 1$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ell_n$ | C | C | B | C | C | B | B |
| mot $\mathcal{P}(3)$ retourné | B | B | C | C | B | C | C |
| mot $\mathcal{P}(3)$ inversé | B | B | C | B | B | C | C |
| $\overline{\mathcal{P}(3)}$ | C | C | B | B | C | B | B |

TABLE 2 – Lettres relatives à $\mathcal{P}(3)$.

*Démonstration.* On va chercher à démontrer le **Théorème 1** par principe de récurrence.

INITIALISATION :

- ◇ D'une part, après $n = 1$ pliage, on obtient le mot $\mathcal{P}(1) = \text{C}$. Il n'y a qu'une seule lettre donc la longueur du mot est de 1.
- ◇ D'autre part, $\mathcal{L}_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.

Pour $n = 1$, l'hypothèse est vraie.

HÉRÉDITÉ :

On suppose que pour un k fixé, la longueur du mot après k pliages, c'est-à-dire de $\mathcal{P}(k)$, est donnée par la suite $\mathcal{L}_k = 2^k - 1$. Pour passer du mot $\mathcal{P}(k)$ au mot $\mathcal{P}(k+1)$, on applique la technique de la symétrie inversé expliquée précédemment. Cette technique, pour construire le mot $\mathcal{P}(k+1)$, consiste à prendre le mot $\mathcal{P}(k)$, à lui ajouter un C et à ajouter $\overline{\mathcal{P}(k)}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{k+1} &= \mathcal{L}_k + 1 + \mathcal{L}_k \\
&= 2\mathcal{L}_k + 1 \\
&= 2(2^k - 1) + 1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= 2^{k+1} - 2 + 1 \\
&= 2^{k+1} - 1
\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

CONCLUSION :

Par raisonnement par récurrence, nous avons démontré que pour tout nombre naturel non nul $n$, $\mathcal{L}_n = 2^n - 1$.

□

**Théorème 2.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{C}_n = 2^{n-1}$$

**Préambule :** Essayons d'évaluer le nombre de « C » dans la séquence de lettres après retournement et inversement, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{P}(n)}$. Tout d'abord, notre mot est composé deux types de lettres : « B » et « C ». Le retournement ne change pas le nombre de "C" et de "B". Après inversement, les « B » deviennent des « C » et les « C » deviennent des « B ». C'est à dire qu'évaluer le nombre de « C » dans une séquence après le retournement et inversement de celle-ci revient à évaluer le nombre de « B » dans la séquence originelle. Or le mot étant composée d'uniquement deux types de lettres, nous pouvons évaluer le nombre de « B » $\mathcal{B}_n$ en prenant le nombre total de lettres $\mathcal{L}_n$ et en lui enlevant le nombre de « C » $\mathcal{C}_n$.

*Démonstration.* Pour passer du mot $\mathcal{P}(n)$ au mot $\mathcal{P}(n+1)$, on applique la technique de la symétrie inversée expliquée précédemment. Cette technique, pour construire le mot $\mathcal{P}(n+1)$, consiste à prendre le mot $\mathcal{P}(n)$, à lui ajouter un $C$ et à ajouter le symétrique inversé de $\mathcal{P}(n)$ ; d'où, d'après le préambule pour tout $n$ entier naturel non nul :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{n+1} &= \mathcal{C}_n + 1 + (\mathcal{L}_n - \mathcal{C}_n) \\
&= 1 + \mathcal{L}_n \\
&= 1 + 2^n - 1 \\
&= 2^n
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}_n = 2^{n-1}$ □

**Théorème 3.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{B}_n = 2^{n-1} - 1$$

*Démonstration.* Pour compter le nombre de « B », on peut raisonner par négation et compter le nombre de lettres qui ne sont pas des « B ». Un mot est composé uniquement de deux types de lettres, les « B » et les « C », ainsi toutes les lettres qui ne sont pas des « B » sont des « C ». Or nous connaissons le nombre total de lettres $\mathcal{L}_n$ et le nombre de « C » $\mathcal{C}_n$.

Par conséquent le nombre de « B » égale le nombre total de lettres $\mathcal{L}_n$ auquel on retranche le nombre de lettres qui ne sont pas des « B » c'est à dire des « C », donc $\mathcal{C}_n$. D'où, pour tout $n$ naturel non nul :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_n &= \mathcal{L}_n - \mathcal{C}_n \\
&= 2^n - 1 - 2^{n-1} \\
&= 2^{n-1}(2-1) - 1 \\
&= 2^{n-1} \times 1 - 1 \\
&= 2^{n-1} - 1
\end{aligned}$$

□

À partir d'ici $\mathcal{P}(n)$ désignera le mot obtenu après $n$ pliages et transformé en nombre en base deux, avec $C = 1$ et $B = 0$.

| $n$ | $n$-ième mot | $\mathcal{P}(n)$ |
|---|---|---|
| 1 | C | 1 |
| 2 | CCB | 110 |
| 3 | CCBCCBB | 1101100 |
| 4 | CCBCCBBCCCBBCBB | 110110011100100 |

TABLE 3 – Premières valeurs de $\mathcal{P}(n)$.

Dans tout ce qui suit, et lorsqu'il y a une ambiguïté, la base dans laquelle est écrite un nombre est indiquée en indice après celui-ci. Par exemple :

$$\mathcal{P}(3_{10}) = 108_{10} = 1101100_2.$$

Dans le doute, s'il n'y a pas d'indications, alors c'est probablement de la base dix.

Dans la suite, nous cherchons à donner une expression algébrique de la symétrie inversée, ce qui permettra de calculer la valeur de $\mathcal{P}(n)$. Avant d'aller plus loin il nous faut reformuler le principe de la « symétrie inversée ».

L'élément central d'une liste ordonnée dont le premier élément est l'élément d'ordinal 1 (donc le premier et non pas le zéroième) et de $n$ éléments est l'élément d'ordinal $\frac{n+1}{2}$. En particulier pour la liste des lettres de $\mathcal{P}(n)$, l'élément central est la lettre dont la position est $\frac{\mathcal{L}_n+1}{2}$. On note ce nombre $\mathfrak{c}$.

Pour tout naturel $i$ tel que $1 \leq i \leq \mathcal{L}_n$, on note $\neg\ell_i$ la lettre que $\ell_i$ n'est pas, c'est-à-dire :

$$\neg\ell_i = \begin{cases} 1 \text{ si } \ell_i = 0 \\ 0 \text{ si } \ell_i = 1 \end{cases}$$

Avec ces notations on peut formaliser ce qu'on appelle la « symétrie inversée » comme suit :
Pour tous naturels non nuls $n$ et $k$ tel que $1 \leq k \leq \mathcal{L}_n$ et $k \neq \mathfrak{c}$,

$$\begin{cases} \ell_{\mathfrak{c}} = 1 \\ \ell_k = \neg\ell_{\mathcal{L}_n-k+1} \end{cases}.$$

Pour voir des exemples on peut encore se référer à la Table **??**.

Nous devons maintenant définir deux fonctions. La première est la fonction « retourner », notée $\mathfrak{R}$. Elle traduit le fait de retourner les lettres d'un mot, en associant à chaque lettre son symétrique par rapport à la lettre centrale $\ell_{\mathfrak{c}}$. De cette manière on a :

$$\mathfrak{R}(\ell_k) = \ell_{\mathcal{L}_n-k+1}$$

où $n$ est le nombre de pliages. On notera aussi

$$\mathfrak{R}((\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)) = (\mathfrak{R}(\ell_1), \mathfrak{R}(\ell_2), \ldots, \mathfrak{R}(\ell_n)).$$

Si l'on voit le nombre $\mathcal{P}(n_0)$ comme une suite de symboles, son retourné est alors $\mathfrak{R}(\mathcal{P}(n_0))$.

La deuxième fonction est la fonction « inverser », notée $\mathfrak{I}$. Elle consiste simplement à transformer les uns en zéros et les zéros en uns. Plus formellement cela donne, pour tout naturel $k$ tel que $1 \leq k \leq \mathcal{L}_n$ :

$$\mathfrak{I}(\ell_k) = \neg\ell_k.$$

On peut noter que si l'on pose $G = \{\mathrm{id}_G, \mathfrak{R}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I} \circ \mathfrak{R}\}$ où $\mathrm{id}_G$ est la fonction « ne pas changer le mot », alors $(G, \circ)$ est un groupe abélien d'ordre 4.

**Théorème 4.** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{\mathcal{P}(n)} = \mathcal{P}(n) - 2^{2^{n-1}-1}$

*Démonstration.* Par définition, $\overline{\mathcal{P}(n)} = (\mathfrak{I} \circ \mathfrak{R})(\mathcal{P}(n))$. Ici la composition de fonctions est commutative. On sépare les lettres en deux catégories : la lettre centrale $\ell_{\mathfrak{c}}$ qui existe toujours puisque $\mathcal{L}_n$ est impair et les autres lettres. On calcule séparément leurs valeurs après inversion et retournement.

D'une part, pour $(\mathfrak{I} \circ \mathfrak{R})(\ell_{\mathfrak{c}})$, nous devons d'abord connaître $\mathcal{L}_n - \mathfrak{c} + 1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n - \mathfrak{c} + 1 &= \mathcal{L}_n - \frac{\mathcal{L}_n + 1}{2} + 1 \\
&= \frac{2\mathcal{L}_n - \mathcal{L}_n - 1 + 2}{2} \\
&= \frac{\mathcal{L}_n + 1}{2} \\
&= \mathfrak{c}
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc maintenant simplement calculer le retourné inversé de la lettre centrale $(\mathfrak{I} \circ \mathfrak{R})(\ell_{\mathfrak{c}}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{R}(\ell_{\mathfrak{c}})) = \mathfrak{I}(\ell_{\mathcal{L}_n - \mathfrak{c}+1}) = \mathfrak{I}(\ell_{\mathfrak{c}}) = \neg\ell_{\mathfrak{c}} = \neg 1 = 0$

D'autre part, pour tout $k$ naturel tel que $1 \leq k \leq \mathcal{L}_n$ et $k \neq \mathfrak{c}$, $(\mathfrak{I} \circ \mathfrak{R})(\ell_k) = \mathfrak{I}(\mathfrak{R}(\ell_k)) = \mathfrak{I}(\ell_{\mathcal{L}_n - k+1}) = \neg\ell_{\mathcal{L}_n - k+1} = \ell_k$.

Donc nous avons $(\mathfrak{I} \circ \mathfrak{R})(\ell_{\mathfrak{c}}) = \neg\ell_{\mathfrak{c}}$ et $(\mathfrak{I} \circ \mathfrak{R})(\ell_k) = \ell_k$. Ainsi après inversion et retournement, seule la lettre du milieu change, elle égalait 1 et prend la valeur 0. Il faut donc uniquement changer cette lettre si l'on veut transformer $\mathcal{P}(n)$ en $\overline{\mathcal{P}(n)}$. Pour le faire, il faut retrancher la quantité qui correspond à la lettre centrale au mot. En lisant de gauche à droite la lettre centrale est la lettre de rang $\mathfrak{c}$, mais en lisant de droite à gauche c'est la lettre $\mathfrak{c} - 1$ puisque $\mathcal{L}_n$ est impair. Par suite le nombre à retrancher à $\mathcal{P}(n)$ pour obtenir $\overline{\mathcal{P}(n)}$ est $2^{\mathfrak{c}-1} = 2^{\frac{\mathcal{L}_n+1}{2}-1} = 2^{\frac{(2^n-1)+1}{2}-1} = 2^{2^{n-1}-1}$

□

**Théorème 5.** *$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ peut être défini par :*

$$\begin{cases} \mathcal{P}(1) = 1 \\ \mathcal{P}(n+1) = \mathcal{P}(n) \times 2^{2^n} + 2^{2^n - 1} + \mathcal{P}(n) - 2^{2^{n-1}-1} \end{cases}.$$

Pour la démonstration on utilisera l'observation, que nous avons appelé de manière informelle la « construction par symétrie inversée » qu'on peut traduire par le fait qu'un mot est obtenu par la concaténation du mot précédent, d'un «1» et du mot précédent inversé et retourné $\overline{\mathcal{P}(n)}$. On peut donc écrire :

$$\mathcal{P}(n+1) = \operatorname{concat}(\mathcal{P}(n), 1, \overline{\mathcal{P}(n)}).$$

*Démonstration.* Pour des raisons de clarté et de compréhension la démonstration est agrémentée d'exemples pour éclairer et illustrer les affirmations qui le nécessitent. Les exemples suivent un cas particulier, celui de $\mathcal{P}(3)$ et comment former à partir de ce dernier le mot $\mathcal{P}(4)$.

**Partie I.** On commence par décaler le mot précédent pour le mettre au début du nouveau mot. Il faut d'abord déterminer de combien de places il le faut décaler. Derrière le mot obtenu à la suite de cette opération il y aura un «1» et $\overline{\mathcal{P}(n)}$. $\overline{\mathcal{P}(n)}$ a la même longueur que $\mathcal{P}(n)$, donc d'après le **Théorème ??**, $\overline{\mathcal{P}(n)}$ fait $\mathcal{L}_n = 2^n - 1$ de long. Le «1» fait un chiffre de long. En additionnant les deux, on trouve qu'il faut décaler le mot précédent de $(2^n - 1) + (1) = 2^n$ places. Pour ce faire, on le multiplie simplement par $2^{2^n}$, en exploitant les règles des puissances.

**Exemple 1** $\mathcal{P}(3)$ peut être vu comme ceci :

$$\mathcal{P}(3) = \underbrace{110}_{\mathcal{P}(2)}\underbrace{1}_{1}\underbrace{100}_{\overline{\mathcal{P}(2)}}{}_2$$

On se rappelle qu'en base dix, on a par exemple

$$42 = 42.$$

Pour décaler de 2 :

$$42 \times 10^2 = 42\underbrace{00}_{2}.$$

Pour décaler de 5 :

$$42 \times 10^5 = 42\underbrace{00000}_{5}.$$

Donc pour décaler un nombre en base dix de $n$ places, il suffit de multiplier par $10^n$. C'est le même fonctionnement en base deux : on multiplie par $2^n$ pour décaler de $n$ places. Ici on veut décaler $\mathcal{P}(3)$ de $2^3$ places, on fait donc :

$$\mathcal{P}(3) \times 2^{2^3} = 110110000000000_2$$

**Partie II.** Ensuite on doit insérer le «1», qui doit se trouver dans la position du milieu. La position du milieu du nouveau mot est la $2^n - 1$. Insérer le «1» revient donc à ajouter $2^{2^n - 1}$.

**Exemple 2** On veut maintenant insérer le «1» au milieu, on fait donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(3) \times 2^{2^3} + 2^{2^3 - 1} &= 110110000000000_2 \\ &+ 000000010000000_2 \\ &= 110110010000000_2 \end{aligned} \tag{1}$$

**Partie III.** Enfin il faut rajouter $\overline{\mathcal{P}(n)}$. D'après le **Théorème ??**, $\overline{\mathcal{P}(n)} = \mathcal{P}(n) - 2^{2^{n-1}-1}$. Et la suite est maintenant construite. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc formé par la somme de $\mathcal{P}(n)$ décalé, le «1» et enfin $\overline{\mathcal{P}(n)}$ que l'on sait tous les trois construire.

**Exemple 3** Revenons maintenant sur $\mathcal{P}(3)$. On se rappelle que

$$\mathcal{P}(3) = 1101100$$

Observons que

$$\overline{\mathcal{P}(3)} = 1100100.$$

C'est bien $\mathcal{P}(3)$ mais avec la lettre centrale inversée (le «1» est devenu un «0») il faut donc soustraire ce «1» de $\mathcal{P}(3)$ pour obtenir $\overline{\mathcal{P}(3)}$ comme ceci :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(3) - 2^{2^{3-1}-1} &= 1101100_2 \\ &- 0001000_2 \\ &= 1100100_2 \\ &= \overline{\mathcal{P}(3)}\end{aligned}$$

En ajoutant cette expression de $\overline{\mathcal{P}(3)}$ dans (1), on obtient bien

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(3) \times 2^{2^3} + 2^{2^3-1} + \mathcal{P}(3) - 2^{2^{3-1}-1} &= 110110010000000_2 \\ &\qquad\qquad + 1100100_2 \\ &= 110110011100100_2 \\ &= \mathcal{P}(4)\end{aligned}$$

On observe que cette expression de $\mathcal{P}(4)$ correspond bien à la formule du **Théorème ??**.

□

## 1.3 Deuxième méthode : l'alternance

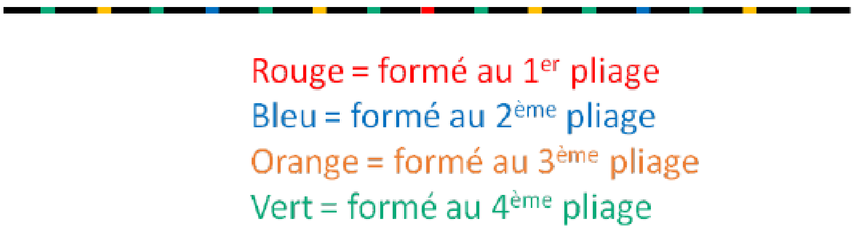
Après avoir ajouté un pliage supplémentaire, on peut observer que les nouveaux plis sont tous intercalés entre les plis déjà existants. Quand on fait un pliage, chacune des faces est donc partagée en deux nouvelles faces, une dans un sens et l'autre dans l'autre sens. Le pli suivant donnera donc un C sur l'une et un B sur l'autre. On intercale donc entre les lettres déjà existantes une succession de C et de B, en commençant par un C avant la 1ère lettre.

*Exemple du passage du mot du 3eme pliage au 4eme pliage*

| 3eme pliage | | C | | C | | B | | C | | C | | B | | B | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4eme pliage | C | C | B | C | C | B | B | C | C | C | B | B | C | B | B |

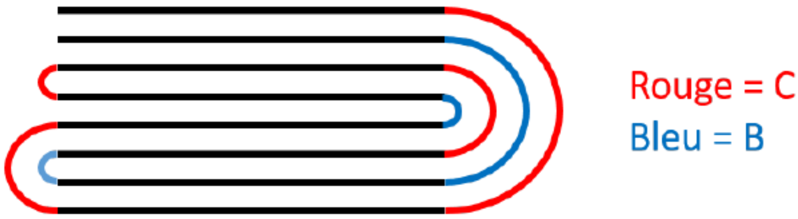
*Visualisation graphie de cette alternance*

Après 4 pliages, nous obtenons ce résultat que nous allons développer ci-dessous.

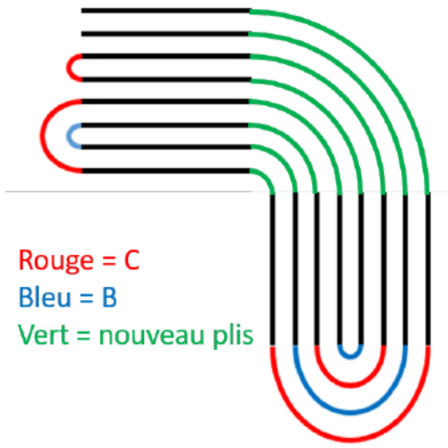



Cette représentation graphique permet de voir que tous les plis ajoutés lors du 4ème pliage sont intercalés entre les plis déjà existants. Pour comprendre comment ces plis s'intercalent entre ceux déjà existants, il faut observer le profil de la bande de papier quand on la plie.

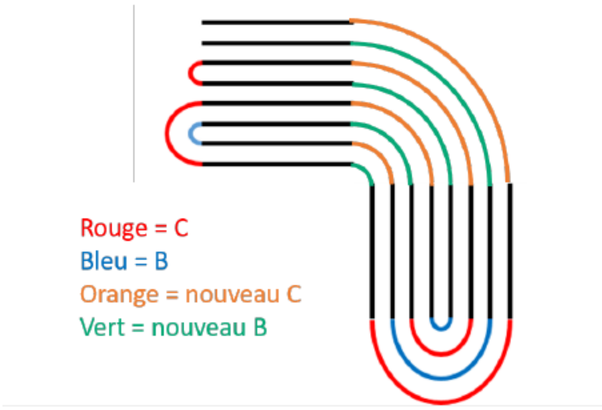
Avec 3 pliages, nous avons les plis suivants



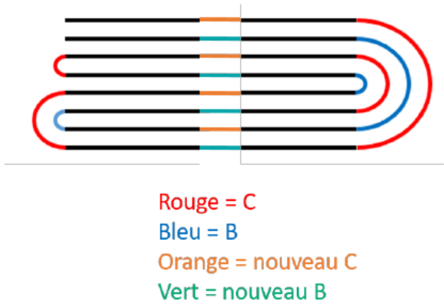

Quand on plie une nouvelle fois, cela donne :



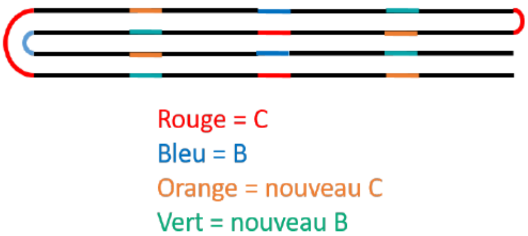

Chaque face est coupée en deux en son milieu, créant un pli entre les deux plis qui l'entouraient. Lorsqu'on suit le tracé de la bande, on peut voir que ces nouveaux plis sont une alternance de C et de B :



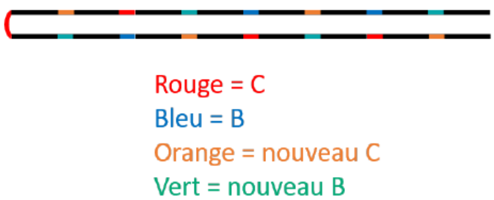

Cela peut s'expliquer par la façon dont on plie la bande de papier. On le voit notamment lors du dépliage :



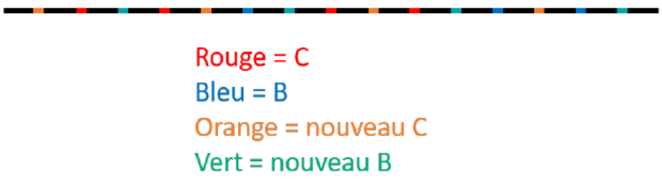

Première étape du dépliage




Deuxième étape du dépliage




Troisième étage du dépliage




Quatrième étape du dépliage

## 2 Prédiction des lettres

Dans cette partie, on cherche à prédire une lettre en connaissant seulement son rang et sans calculer tout le mot. D'après la méthode de symétrie inversée, le mot commence toujours par le mot précédent, ainsi une fois le mot assez long, la lettre d'un certain rang ne change plus.

On sait avec la deuxième méthode que lorsqu'on ajoute un pliage à la bande, une alternance de C et de B se crée entre les lettres déjà existantes, en commençant par un C. Ainsi, les lettres dont le rang (noté x) est impair, forment une alternance de C et de B.

Par exemple pour le 4ème mot :

| 4eme pliage | C | C | B | C | C | B | B | C | C | C | B | B | C | B | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Grâce à cela, on peut prédire les lettres du mot en connaissant leur rang.

**Prédiction pour les plis avec x impair :**

Les lettres avec x impair représentent la moitié de l'ensemble des lettres, et parmi ces lettres avec x impair, la moitié est un C. Donc, une lettre sur 4 (la moitié de la moitié) est un C prévisible.

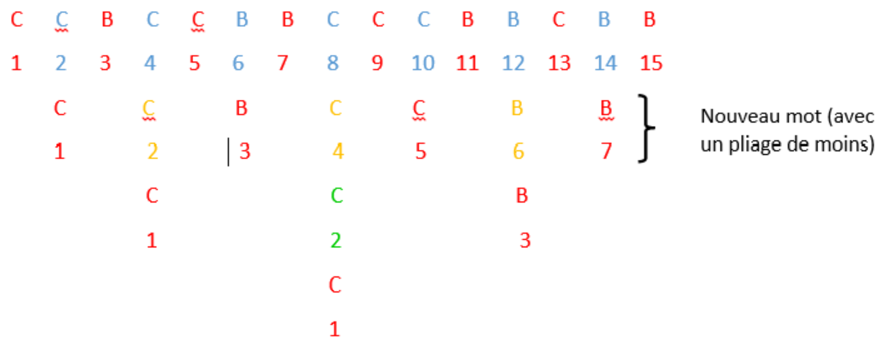
| 4eme pliage | C | C | B | C | C | B | B | C | C | C | B | B | C | B | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Rang-1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

Mais lorsqu'on observe le rang qui est associé à ces C prévisibles, ce ne sont pas des multiples de 4, mais des multiples de 4 + 1. Pour simplifier les calculs, on enlève donc 1 à x pour compter à partir de 0 ; ainsi la première lettre qui est un C prévisible a pour nouveau rang 0, un multiple de 4 (0 x 4 = 0).

En conclusion, pour prédire la lettre d'un pli avec x impair, il faut calculer x-1, et si ce nombre est un multiple de 4, il s'agira d'un C, sinon d'un B (car si ce n'est pas un C, c'est forcément un B).

**Prédiction pour les plis avec x pair :**

Pour prédire la lettre d'un pli avec x pair, il faut savoir que les lettres avec x impair sont ajoutées quand on fait un pliage de plus. On peut donc dire que les lettres avec x pair forment le mot avec un pliage de moins. On peut donc créer un nouveau mot, composé uniquement des lettres avec x pair.




Ainsi on peut les renuméroter en divisant leur x par deux (on enlève la moitié des lettres précédentes, il y a donc deux fois moins de lettres avant celle concernée). De cette manière, certaines lettres qui avaient x pair vont devenir des lettres avec x impair, qui sont prévisibles comme vu précédemment. Si elles restent avec x pair, on renouvelle le procédé.

On peut donc dire que la 8ème lettre est la même que la 4ème lettre, qui est la même que la 2ème lettre, qui est la même que la 1ère lettre.

En conclusion, pour prédire une lettre avec x pair, il faut diviser x jusqu'à ce qu'il soit impair et utiliser la méthode pour les x impairs.

Ce qui pourrait s'écrire sous forme d'algorithme de la manière suivante :

```
Tant que x est pair
   Diviser x par 2
Si (x-1) est un multiple de 4
   Alors la lettre de rang x est C
Sinon
   La lettre de rang x est B
```

*Exemple :* Pour prédire la lettre de rang 52, cela donnerait :
- On teste $x = 52 \rightarrow$ pair, on divise par 2
- On teste $x = 26 \rightarrow$ pair, on divise par 2
- On teste $x = 13 \rightarrow$ impair
- On teste $x - 1 = 12 \rightarrow$ multiple de 4 : la lettre est un C.

## 3 Mots possibles et impossibles

Nous avons appelé sous-mots de n lettres toute combinaison de n lettres formée de C et de B. On dit qu'un sous-mot est possible dès que cette combinaison apparait dans un mot obtenu par pliage. Tous les sous-mots de 1, 2 ou 3 lettres sont possibles. Pour la longueur 4, certains sous-mots nous sont apparus rapidement impossibles : BBBB ou CCCC ne contiennent pas d'alternance. Nous avons alors cherché tous les sous-mots impossibles pour 4, 5, 6 et 7 lettres. Puis grâce à un programme nous avons trouvé le nombre de sous-mots possibles et impossibles jusqu'à 24 lettres.

| Nombre de lettres | Nombre de sous-mots possibles | Nombre de sous-mots impossibles | Nombre total de sous-mots |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | 4 | 0 | 4 |
| 3 | 8 | 0 | 8 |
| 4 | 12 | 4 | 16 |
| 5 | 20 | 12 | 32 |
| 6 | 23 | 41 | 64 |
| 7 | 28 | 100 | 128 |
| 8 | 32 | 224 | 256 |
| 9 | 36 | 476 | 512 |
| 10 | 40 | 984 | 1024 |
| ... | | | |
| 24 | 96 | 16 777 120 | 16 777 216 |

Grâce à ce tableau nous avons constaté que, à partir de 7 lettres et au moins jusqu'à 24, le nombre de sous-mots impossibles augmenterait de 4 à chaque fois qu'on rajoutait une lettre mais nous n'avons pas pu prouver ce résultat.

Par nos premières recherches nous avons établi deux règles de base pour qu'un sous-mot soit impossible :

- on ne peut pas avoir 4 fois la même lettre de suite
- on ne peut pas avoir une alternance de B et de C sur 4 lettres consécutives.

Ces deux règles découlent de l'alternance de C et de B entre chaque pli déjà existant.

Pour les sous-mots plus longs, nous avons dû généraliser notre méthode. Grâce au principe de l'alternance, il apparaît qu'un sous-mot est forcément impossible s'il ne contient pas d'alternance. Afin de déterminer les autres sous-mots possibles ou impossibles, nous utilisons la méthode de la prédiction des lettres présentée précédemment.

*Exemple* : le sous-mot CCBBCCBCCBBCCCB existe-t-il ?

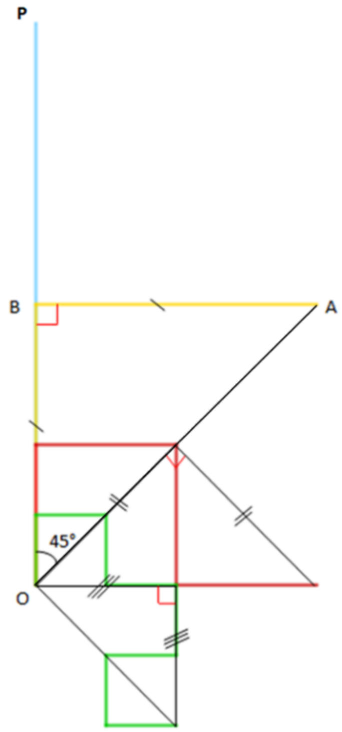
Etape 1 : Il y a alternance en rouge et pas en noir : CCBBCCBCCBBCCCB

Etape 2 : On supprime les rouges qui sont les lettres rajoutées lors du dernier pliage : CBCCBCC. Il n'y a d'alternance ni en vert ni en noir, le sous-mot est impossible et a fortiori le sous-mot initial.

## 4 Construction géométrique - Prévoir le point d'arrivée

Nous nous sommes ensuite intéressés à une autre représentation de nos pliages : nous plaçons à plat la bande de papier de longueur fixe et en «dépliant» chaque Creux ou Bosse sous la forme d'un angle droit (creux : on tourne vers la droite, Bosse, vers la gauche) et observons le chemin fait par la bande de papier en fonction du nombre de pliages effectués. Nous avons tout d'abord cherché si l'on pouvait prévoir le point d'arrivée de notre bande de papier.

Voilà les tracés pour les premiers pliages :



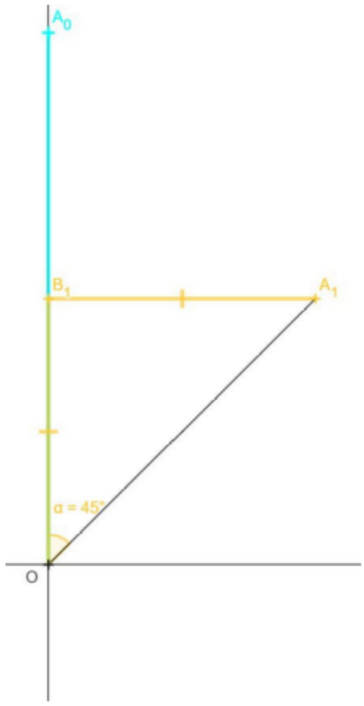

On sait qu'il y a une symétrie inversée du mot par rapport au creux C. Donc les segments reliant le point correspondant à la lettre C centrale dans le mot à chacune des extrémités de la bande ont la même longueur.

De plus, le C central correspond géométriquement à un angle de 90°. Il induit donc une rotation de 90° entre ces deux segments qui forment donc un triangle isocèle rectangle avec le segment reliant les deux extrémités de la bande.

Les autres angles de ce triangle sont par conséquent égaux à 45°, en particulier celui qui a pour sommet l'origine O. La droite qui passe par l'origine et par le point d'arrivée du (n+1)-ième pliage a donc subi une rotation de 45° par rapport à celle du n-ième pliage.

On adoptera les notations suivantes :

- $A_n$ désigne le point d'arrivée du n-ième pliage
- $B_n$ désigne le milieu du segment $[OA_{n-1}]$
- $u_n = OA_n$




Il y a des triangles rectangles isocèles, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OA_{n+1}^2 = OB_{n+1}^2 + A_{n+1}B_{n+1}^2$$
$$u_{n+1}^2 = (\frac{u_n}{2})^2 + (\frac{u_n}{2})^2$$
$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$$

Donc $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $u_n = u_0 \times q^n$.

La suite qui indique la longueur entre le point de départ et le point d'arrivée $A_n$ de $n$ pliages a pour terme général $u_n = u_0 \times q^n$, avec $u_0$ la longueur de la bande de départ. On peut déterminer l'emplacement du point d'arrivée en divisant le nombre de pliages par 8 : le quotient de la division euclidienne donne le nombre de tours que le point d'arrivée du pliage a effectué autour du point de départ du pliage O. Le reste de la division donne le nombre de rotations de 45° par rapport à l'emplacement de la bande de départ.

Prolongement : Nous aurions souhaité étudier d'autres caractéristiques de cette représentation graphique, comme la possibilité pour la bande de repasser deux fois par un même point ou celle de repasser deux fois sur une même arête. Nous avons pu faire quelques observations : la bande semble pouvoir repasser sur un point mais pas sur une arête, mais nous n'avons pas prouvé ces résultats.

## 5 Pour aller plus loin

La partie suivante a été développée par un élève en classe de terminale, seul. Cet élève, passionné par les mathématiques a cherché par lui-même ce qui suit sans aide de l'extérieur. Ce travail dépasse les connaissances d'un élève de lycée.

Le théorème suivant est bien connu mais nous avons jugé bon de le rappeler aux lecteur·rices en raison du nombre de fois où nous l'utilisons et pour que la suite soit le plus clair possible.

**Théorème 6.** *Pour tout $x$ tel que $|x| < 1$,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

*Démonstration.* Soient $x$ tel que $|x| < 1$ et $S = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n. \tag{1}$$

En multipliant les deux côtés de l'équation par $x$ :

$$x \cdot S = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1}. \tag{2}$$

En retranchant (2) à (1) on obtient :

$$S(1-x) = 1 - x^{n+1}. \tag{3}$$

De manière équivalente comme $x \neq 1$

$$S = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}. \tag{4}$$

En passant à la limite on a :

$$\lim_{n \to +\infty} S = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

□

À partir d'ici $(\ell_n)$ est la suite des lettres d'un mot en partant de la gauche écrite en base deux, et $\ell_0 = 0$. Ses premières valeurs sont données dans TABLE **??**.

Soit $\rho = 0{,}11011001\ldots_2$.

On observe qu'on peut exprimer $\rho$ de la manière suivante :

$$\rho = \frac{1}{10_2} + \frac{1}{100_2} + \frac{0}{100_2} + \frac{1}{1000_2} + \frac{1}{10000_2} + \cdots.$$

On a donc

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ell_n}{2^n}.$$

**Théorème 7.** *$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ell_n}{2^n}$ converge.*

*Démonstration.* Soit $a_n = \frac{\ell_n}{2^n}$ et $b_n = \frac{2}{2^n}$.

$\ell_n$ égale 1 ou 0 donc en particulier $\ell_n \leq 2$. De manière équivalente $\frac{\ell_n}{2^n} \leq \frac{2}{2^n}$ et donc $a_n \leq b_n$.

On considère la somme des termes de $(b_n)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'après **Théorème ??** on a :

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. Or $0 \leq a_n \leq b_n$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge aussi. □

Nous rappelons qu'une fonction $g(x)$ est algébrique si et seulement s'il existe un entier naturel $n$ tel que

$$\mathrm{P}(g) = a_n(x)g(x)^n + a_{n-1}(x)g(x)^{n-1} + \cdots + a_1(x)g(x) + a_0(x) = 0$$

où les coefficients $a_i(x)$ sont des polynômes et P est un polynôme sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ (penser à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ par exemple).

Par exemple, la fonction inverse $h : x \mapsto 1/x$ et la fonction racine carrée $r : x \mapsto \sqrt{x}$ sont des fonctions algébriques puisqu'elles satisfont respectivement l'équation $xh(x) - 1 = 0$ et $r(x)^2 - x = 0$.

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ell_n = 0 \times x^0 + 1 \times x^1 + 1 \times x^2 + 0 \times x^3 + 1 \times x^4 + 1 \times x^5 + \cdots . \quad (5)$$

**Lemme 1.** *Soit $g(x)$ la somme d'une série entière sur $\mathbb{F}_2[x]$ de la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ avec $u_i = 0$ ou $u_i = 1$. Alors $g(x^2) = g(x)^2$.*

Avant de commencer la démonstration, nous allons introduire quelques concepts.

- Une série entière est une suite de la forme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k x^k$ où $u_k$ est une autre suite. Si $S_n$ converge alors sa limite est appelée somme de la série et est notée $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$
- On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{1}, \overline{0}\}$. Pour un ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{k}$ est la classe d'équivalence de $k$ modulo $n$, c'est-à-dire que $\overline{k} := k \pmod{n}$. Par exemple, la grande aiguille d'une horloge représente $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$, donc $\overline{50}+\overline{20} = \overline{70} = \overline{10}$, en effet il n'y a pas de différence entre 70 minutes et 10 minutes pour la grande aiguille. Dans le cas de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a aussi par exemple $\overline{1} + \overline{1} = \overline{2} = \overline{0}$. Lorsque l'on équipe cet ensemble de la multiplication et de

l'addition des entiers modulo 2, c'est un corps commutatif [1], il l'est aussi si lui est adjoint $x$, le corps obtenu ainsi est alors noté $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ ou $\mathbb{F}_2[x]$.

- On connais bien la formule suivante dans le corps commutatif des réels $\mathbb{R}$ :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{6}$$

Elle peut se généraliser pour l'élévation à une puissance arbitraire et s'appelle la formule de binôme de Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{7}$$

On observe que (6) est le cas particulier de (7) lorsque $n = 2$ Il se trouve quelle peut être encore plus généralisée pour un nombre arbitraire d'éléments dans la parenthèse et s'appelle alors la formule du multinôme de Newton.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{j=1}^{m} x_j^{k_j} \tag{8}$$

Où $k_1+k_2+\cdots+k_m = n$ signifie que la somme porte sur toutes les combinaisons de $m$ nombres naturels dont la somme égale $n$, $\Pi$ est l'équivalent de la notation $\Sigma$ mais pour le produit et les

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!}$$

sont les coefficients multinomiaux.

On observe que (7) est le cas particulier de (8) lorsque $m = 2$ et (6) est le cas particulier de (8) lorsque $m = n = 2$.

Nous pouvons donc maintenant passer à la démonstration du **Lemme 1**.

*Démonstration.* Ici nous élevons la somme au carré, c'est à dire à la puissance $n = 2$, (8) devient alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=2} \frac{2!}{\prod_{q=1}^{m} x_q!} \prod_{j=1}^{m} x_j^{k_j}. \tag{9}$$

Il y a deux manières de choisir $m$ nombres naturels tels que leur somme égale deux.

**Cas 1.** Il existe deux nombres naturels $a_1$ et $a_2$ tels que $1 \leq a_1 < a_2 \leq m$, $k_{a_1} = k_{a_2} = 1$ et tous les autres $k$ sont nuls. On aurait ainsi :

$$\begin{aligned} 2 &= k_1 + k_2 + \cdots + k_{a_1} + k_{a_2} + \cdots + k_{m-1} + k_m \\ &= 0 + 0 + \cdots + 1 + 1 + \cdots + 0 + 0. \end{aligned}$$

1. En effet il vérifie tous les axiomes : les deux opérations sont associatives et distributives et admettent des éléments neutres ($\overline{0}$ pour l'addition et $\overline{1}$ pour la multiplication) et tous les éléments admettent des inverses à l'exception de $\overline{0}$ pour la multiplication (l'opposé de $\overline{0}$ est $\overline{0}$, celui de $\overline{1}$ est $\overline{1}$, l'inverse multiplicatif de $\overline{1}$ est $\overline{1}$). De plus les deux opérations sont commutatives comme leurs homologues dans les nombres naturels.

Mais alors les coefficients multinomiaux deviendraient :

$$\binom{2}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{2!}{(1!1!)(0! \cdots 0!)} = 2.$$

Donc en replaçant dans le second membre de l'équation (9) :

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=2} 2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{k_j}.$$

Or dans $\mathbb{F}_2[x]$, $2 = 0$. Donc tous les termes qui satisfont le **Cas 1** disparaissent.

**Cas 2.** Il existe un nombre naturel $b$ tel que $1 \leq b \leq m$, $k_b = 2$ et tous les autres $k$ sont nuls. Les coefficients multinomiaux deviennent alors :

$$\binom{2}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{2!}{(2!)(0! \cdots 0!)} = \frac{2!}{2!} = 1.$$

L'équation (9) est donc uniquement composée des termes du **Cas 2**, c'est-à-dire lorsque un $k$ égale 2 et les autres 0.

Il y a $m$ combinaisons qui satisfont le **Cas 2**, puisqu'on peut avoir $k_1 = 2$ et les autres $k$ nuls, ou bien $k_2 = 2$ et les autres $k$ nuls, ou bien etc... jusqu'à $k_m = 2$ et les autres $k$ nuls. En substituant ces informations dans (9), on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 = \sum_{k} \prod_{j=1}^{m} x_j^k. \tag{10}$$

Le produit $\prod_{j=1}^{m} x_j^k$ se simplifie puisque tous les $k$ égalent 0 sauf un d'entre eux qui égale 2, disons le $p$-ième, on a alors $\prod_{j=1}^{m} x_j^k = x_p^2$ En remplaçant dans (10) :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 = \sum_{p=1}^{m} x_p^2.$$

En laissant tendre $m$ vers l'infini et en remarquant que $u_i^2 = u_i$ puisque par hypothèse $u_i = 1 = 1^2$ ou bien $u_i = 0 = 0^2$, on a pour toute série entière $g(x)$ sur $\mathbb{F}_2$ :

$$g(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n x^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (x^2)^n = g(x^2)$$

□

Une démonstration plus difficile mais plus intéressante et plus rigoureuse aurait été de prendre le produit de Cauchy de $g(x)$. Elle aurait évité d'avoir à supposer que la propriété est vraie aussi pour les polynômes infinis.

Nous devons maintenant introduire la fonction indicatrice de $4n+1$, notée $\mathbf{1}_{4n+1}(n)$, qui vaut 1 quand $n$ est de la forme $4n+1$ et 0 sinon. Plus formellement, $\mathbf{1}_{4n+1}(n)$ est définie par :

$$\mathbf{1}_{4n+1}(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in \{4k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Ses valeurs sont également disponible dans la TABLE 1

**Théorème 8.** *$f(x)$ est algébrique.*

*Démonstration.* Tout d'abord, grâce à la méthode de construction par intercalage, on sait que $\ell_{4n+1}$ est forcément un «1», puisque l'on intercale des zéros et des uns entre chaque lettre. En retranchant tous ces uns à $\ell_n$, on obtient donc $\ell_n$, mais avec des zéros intercalés. En d'autres termes, on a

$$\ell_n - \mathbf{1}_{4n+1}(n) = \begin{cases} \ell_{n/2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

Encore une fois cela est plus clair dans la TABLE 1.

On reviens maintenant à $f(x)$. En utilisant ce qui a été vu précédemment, on en déduis que :

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ell_n &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \ell_n \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n \ell_n \\ &= x \times \frac{1}{1-x^4} + f(x^2). \end{aligned} \tag{11}$$

Nous avons utilisé dans la dernière étape le **Théorème ??** et la définition de $f(x)$. D'après le **Lemme 1**, sur $\mathbb{F}_2[x]$, $f(x^2) = f(x)^2$, nous obtenons donc en réinjectant dans (8) :

$$f(x) = \frac{x}{1-x^4} + f(x)^2$$

ou :

$$f(x)^2 - f(x) + \frac{x}{1-x^4} = 0.$$

□

Le théorème de Christol [?] postule que si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ est algébrique, alors $u_n$ est automatique. $\ell_n$ est donc une suite automatique, c'est à dire qu'elle peut être construite par un automate fini déterministe.

D'après la méthode de Mahler [?, ?, ?, ?] on sait que si $u_n$ est une suite dont la construction dans une base est automatique (dans notre cas en base deux), alors

$$\forall \alpha \in ]0,1[, \sum_{n=0}^{\infty} u_n \alpha^n \notin \mathbb{A}.$$

Où $\mathbb{A}$ est l'ensemble des nombres algébriques, c'est à dire l'ensemble des nombres qui sont des racines d'un polynôme non-nul à coefficients entiers. Par exemple 1, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ sont des nombres algébriques, mais $\pi$ et $e$ ne le sont pas. En d'autres termes, ce nombre est transcendant. Donc en particulier il est irrationnel, et par définition son développement dans aucune base n'est périodique. Dans notre cas $\ell_n$ joue le rôle de $u_n$ et 0,5 celui de $\alpha$.

La suite des lettres du mot obtenu par pliage de papier n'est donc pas périodique.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ell_n$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\mathbf{1}_{4n+1}(n)$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\ell_n - \mathbf{1}_{4n+1}(n)$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

TABLE 4 – Premières valeurs de $\ell_n$.

# Références


[1] F.Pellarin, "An introduction to Mahler's method for transcendence and algebraic independence", preprint, 2010

[2] K. Mahler. Arithmetische Eigenschaften der L osungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, Math. Ann. 101 (1929), 342-366.

[3] K. Mahler. Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen, Math. Z. 32 (1930), 545-585.

[4] K. Mahler. Uber das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Ver anderlichen in speziellen Punktfolgen. Math. Ann. 103 (1930), 573–587.

[5] G. Christol, Ensembles presque-périodiques k-reconnaissables, Theorical Computer Science, 9 (1979), 141-145.