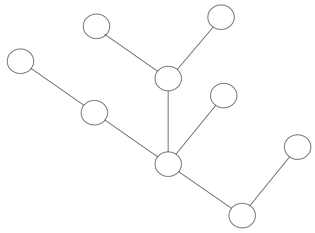
Arbres gracieux

Année 2014 - 2015

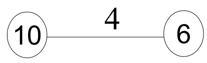
Elèves de 3è : Crystal Guillemin, Elsa Da Costa, Hugo Raoul, Sarah Vigneron.
Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.
Chercheur : Céline ABRAHAM, université Paris-Sud Orsay.

Le sujet

Un arbre mathématique est constitué de sommets reliés par des arêtes. (1)

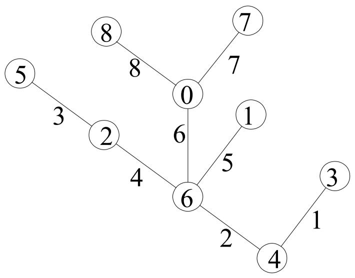


Une numérotation gracieuse d'un arbre à n arêtes, n étant un entier strictement positif, est donnée par les règles suivantes:

- On numérote les arêtes de 1 à n, sans répétition.
- On numérote les sommets de 0 à n, sans répétition.
- Le numéro de chaque arête doit être égal à la différence positive des numéros des deux sommets qu'elle relie. Par exemple : 

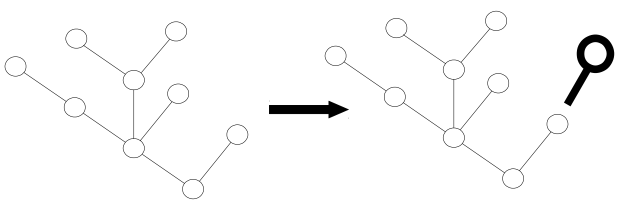
Tout arbre a-t-il une numérotation gracieuse ?

Illustration du sujet : voici un arbre gracieux avec $n = 8$.



Remarque préalable : soit n un nombre entier strictement positif ; si un arbre a n arêtes, alors il a $n+1$ sommets. En effet :

- L'arbre le plus petit a 1 arête et 2 sommets  . Il a donc bien un sommet de plus.
- Lorsqu'on rajoute un sommet à un arbre, on rajoute également une arête.



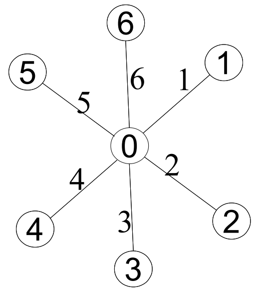
Il y a donc toujours un sommet de plus que d'arêtes.

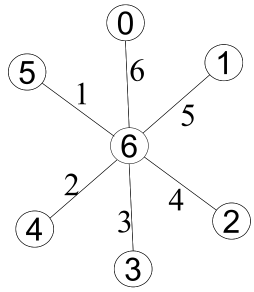
Pour structurer nos recherches nous avons classé les arbres suivant leur forme et nous avons cherché une méthode pour qu'ils soient gracieux. Dans la suite on appellera arbre d'ordre *n*, un arbre à *n* arêtes.

1- <u>L'exemple de l'étoile</u>

Nous allons appeler étoile un arbre avec des branches ayant une seule arête réparties autour d'un sommet.

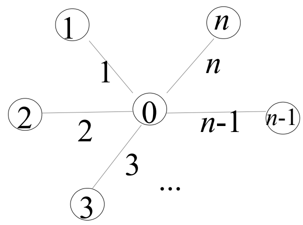
Voici les seules étoiles gracieuses d'ordre 6 : (2)





Les nombres aux extrémités des branches peuvent être placés n'importe où. 0 et 6 ne peuvent pas être tous les deux sur des extrémités puisque, pour obtenir une différence de 6, seule 6 – 0 donne ce résultat ; il faut donc que 6 et 0 soient reliés.
Au centre on aura obligatoirement 0 ou 6.

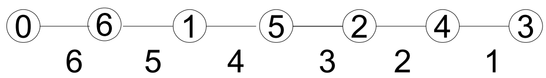
Nous pouvons généraliser cette méthode pour avoir des étoiles gracieuses d'ordre *n :*

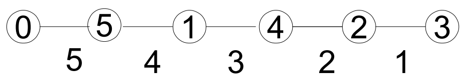


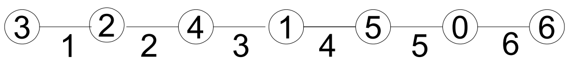
2- <u>L'exemple du chemin</u>

Nous appelons un chemin une suite d'arêtes et de sommets formant une ligne.

Voici quelques exemples de chemins gracieux :



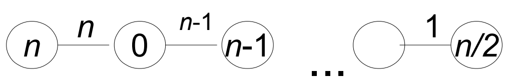




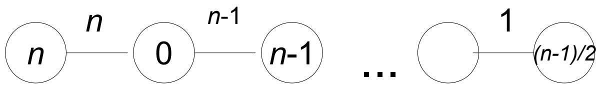
On place le 0 au début du chemin et on met le plus grand nombre (n) à côté. Puis, on place le plus petit des nombres restants (1), puis le plus grand des nombres restants (4), puis on répète l'opération en alternant le plus petit nombre restant puis le plus grand nombre restant jusqu'à arriver à la fin. On peut aussi utiliser cette même technique en commençant par le plus petit puis le plus grand, etc... et commencer à gauche ou à droite du chemin.

Généralisation pour un chemin d'ordre *n :*

- Pour *n* pair :



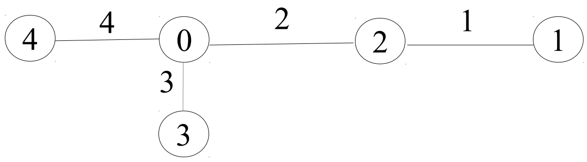
- Pour n impair :



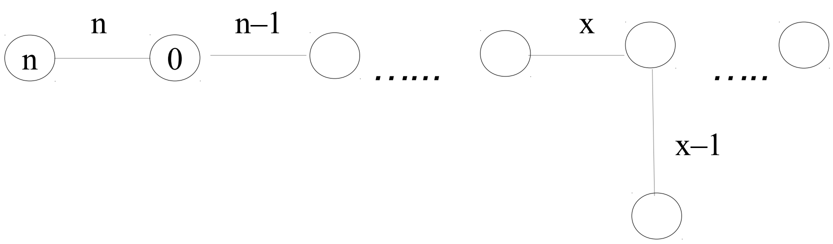
Remarque : les nombres sur les arêtes sont rangés dans l'ordre décroissant de n à 1.

3- <u>L'exemple de la chenille</u>

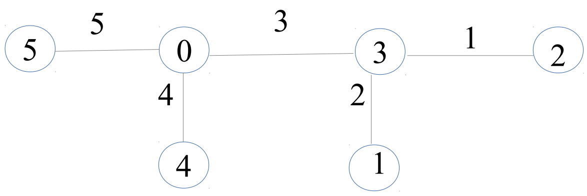
Nous appelons une chenille un arbre de base chemin avec une ou plusieurs branche(s) d'une seule arête.
Voici un exemple chenille gracieuse :



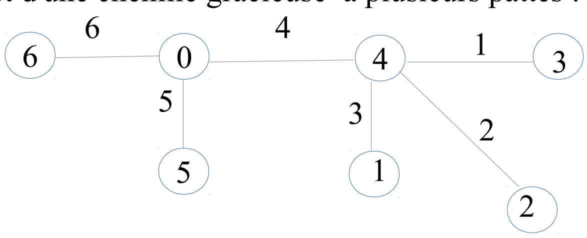
On a utilisé une technique similaire à celle du chemin.
Généralisation pour une chenille d'ordre n : (3)



Voici un exemple de chenille gracieuse à deux pattes :



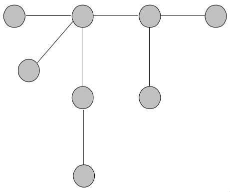
et d'une chenille gracieuse à plusieurs pattes :



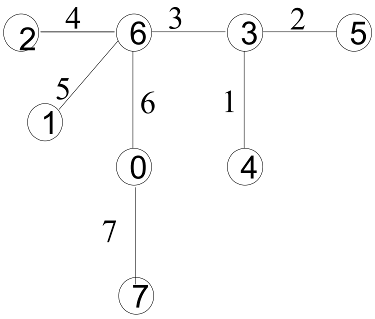
Remarques :
On garde la technique de mettre le plus grand nombre près du plus petit et d'alterner le plus petit puis le plus grand restant.

4- <u>L'exemple du homard</u>

Nous appelons un homard un arbre d'une base chemin ayant une ou plusieurs branches de plusieurs arêtes consécutives. En voici un exemple : (4)

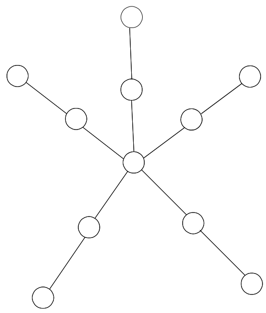


Nous avons réussi à trouver une numérotation gracieuse pour cet arbre mais nous n'avons pas trouvé de généralisation gracieuse pour tous les arbres de cette forme.



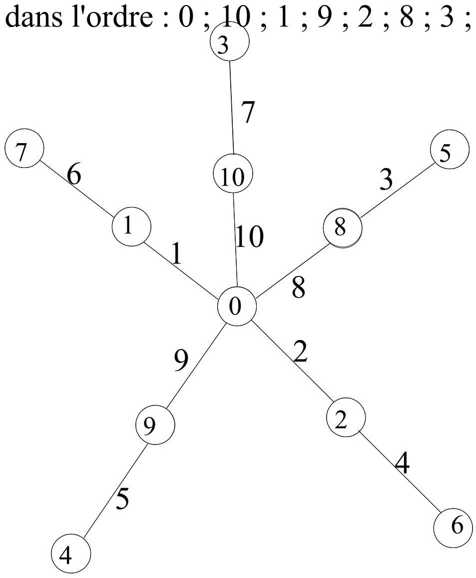
5- <u>L'exemple de l'araignée</u>

Nous appelons une araignée un arbre d'une base étoile ayant une ou plusieurs branches de plusieurs arêtes. En voici un exemple :



<u>Araignée avec un nombre de branches impair</u> (5)

Pour remplir notre étoile avec un nombre de branches impair, nous conservons notre technique qui est de mettre le plus petit nombre 0, le plus grand nombre (ici 10), puis de poursuivre en faisant une spirale. Ainsi on place dans l'ordre : 0 ; 10 ; 1 ; 9 ; 2 ; 8 ; 3 ; 7 ; 4 ; 6 et 5.



Lorsque le nombre de branches est pair ou que le nombre de segments sur les branches varie, nous avons réussi à faire un arbre gracieux mais sans technique particulière.

Conclusion

Nous pensons que tout arbre peut être gracieux : nous avons toujours réussi à trouver une solution quelle que soit la forme de départ de l'arbre. Pour certaines formes, nous avons trouvé une technique particulière pour les remplir. (6)

Notes d'édition

(1) La définition est incomplète. On rajoutera que pour être un arbre, il ne doit pas y avoir de cycle et on doit toujours pouvoir trouver un chemin reliant toute paire de sommets

(2) L'ordre correspond ici au nombre de branches de l'étoile.

(3) En fait, l'algorithme est plutôt celui-ci: on étiquette le premier sommet avec n. Puis on parcours la chenille de gauche à droite (en prenant en compte les branches éventuelles), et on choisit comme valeur de sommet celle qui permet d'avoir les valeurs des arêtes ordonnées de n à 1. On notera qu'à cause des branches, l'alternance "plus grande - plus petite - deuxième plus grande..." n'est pas garantie pour le chemin de base. La preuve de la validité de l'algorithme n'est pas fournie.

(4) En fait, dans la littérature, la taille des branches d'un homard ne peut pas excéder deux arêtes. C'est sans doute le cas ici aussi.

(5) On demande ici que les branches aient toutes la même longueur

(6) En effet, la conjecture que tout arbre est gracieux est assez célèbre et n'a encore jamais été démontrée. Il existe toutefois des preuves informatiques pour tous les arbres ayant au plus 27 sommets.