APPROXIMATIONS DE π

Elèves de 3ème :
DAVALO Colin, GARRIGUES Adrien et LOGGHE Antoine.
Etablissement :
collège Alain Fournier, 14 rue Alain Fournier, 91 402 Orsay Cedex.
Enseignantes :
ASSELAIN-MISSENARD Claudie et FERRY Florence.
Chercheuse :
AGUILLON Nina

Le sujet :
Pouvez-vous trouver des approximations de π permettant de battre 3,14 ?

1 – Nos premières recherches

Le nombre π intervient dans le périmètre d'un cercle de rayon R : $2\pi R$ et dans l'aire d'un disque de rayon R : πR^2. En choisissant un cercle de rayon R = 1, on peut donc avoir π en étudiant le demi-périmètre de ce cercle et son aire. Nous avons donc cherché à trouver un encadrement de π, en trouvant des figures simples, intérieures et extérieures au cercle de rayon 1, dont on pourrait calculer le périmètre et l'aire.

2 – Encadrement par des polygones réguliers (1)

En traçant les polygones réguliers respectivement inscrit et circonscrit à notre cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1, on trouve un encadrement de π.

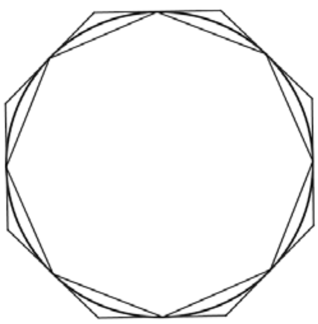


fig1

Notons P_1 et P_2 les périmètres respectifs des polygones réguliers inscrits et circonscrits et P le périmètre de $\mathscr{C}$.

On a : $P_1 < P < P_2$ d'où : $P_1 < 2\pi < P_2$

Donc : $\dfrac{P_1}{2} < \pi < \dfrac{P_2}{2}$

En augmentant le nombre de côtés des deux polygones, leur périmètre se rapprochera de π et donc l'encadrement de π deviendra de plus en plus précis.

a) Calcul de P_1

Soit n le nombre de côtés du polygone régulier inscrit dans $\mathscr{C}$, cercle de centre O de rayon 1.

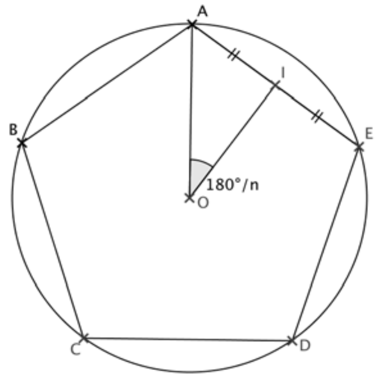


fig2

Dans un polygone régulier à n côtés, l'angle au centre mesure $\dfrac{360°}{n}$ donc ici, en considérant la figure ci-dessus : $AOI = \dfrac{360°}{2n} = \dfrac{180°}{n}$.

Dans le triangle AOI rectangle en I : $\sin\dfrac{180°}{n} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{AI}{1} = AI$.

$P_1 = 2n \times AI = 2n \times \sin\dfrac{180°}{n}$

Donc : $\dfrac{P_1}{2} = n \times \sin\dfrac{180°}{n}$

et donc : $n \times \sin\dfrac{180°}{n} < \pi$.

b) Calcul de P_2

Soit n le nombre de côtés du polygone circonscrit à $\mathscr{C}$, cercle de centre O de rayon 1.

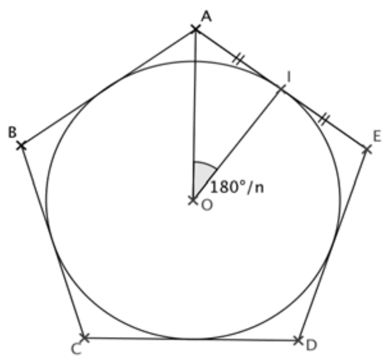


fig3

De la même façon qu'au b), en considérant la figure ci-dessus, on a : $AOI = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}$.

Dans le triangle AOI rectangle en I : $\tan\frac{180°}{n} = \frac{AI}{OI} = \frac{AI}{1} = AI$.

$P_2 = \quad 2n \times AI = 2n \times \tan\frac{180°}{n}$

Donc : $\frac{P_2}{2} \; = \; n \times \tan\frac{180°}{n}$

et donc : $n \times \tan\frac{180°}{n} \; > \pi$.

c) Encadrement de π

Finalement, d'après a) et b), on obtient un encadrement de π :

$n \times \sin\frac{180°}{n} \; < \pi < \; n \times \tan\frac{180°}{n}$

Plus n augmente, plus l'encadrement sera précis.

n	$\frac{P_1}{2}$	$\frac{P_2}{2}$
12	**3,1** 152	**3,1** 954
57	**3,14** 00	**3,14** 47
160	**3,141** 3	**3,141** 9
1187	**3,1415** 8	**3,1415** 9
1396	**3,14159** 0	**3,14159** 7

Il faut cependant aller très loin pour obtenir les premières décimales.

3 – Recherche d'une méthode utilisant le moins possible la trigonométrie

Dans cette partie on reprend un cercle $\mathscr{C}$ de centre O de rayon 1.

a) Calcul de P_1

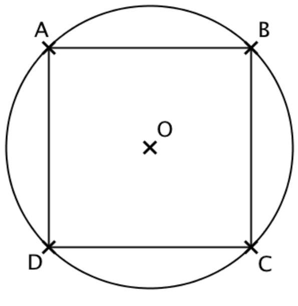


fig4

On considère le carré *ABCD* inscrit dans le cercle. On calcule P_1 (n=4) . *AOB* est rectangle en *O* (les diagonales d'un carré se coupent en angle droit), selon le théorème de Pythagore :

$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Ensuite on calcule P_1 pour n=8 (un octogone inscrit) ; on le place de manière à ce que les quatre sommets du carré soient confondus avec quatre des huit sommets de l'octogone. Soit *E* le milieu de [*AB*]. *E* se situe sur la médiatrice de [*AB*] qui passe par un sommet de l'octogone (appelons le *H*) et par le centre du cercle (*O*). [*AE*] mesure la moitié de *AB* soit $\sqrt{2}/2$.

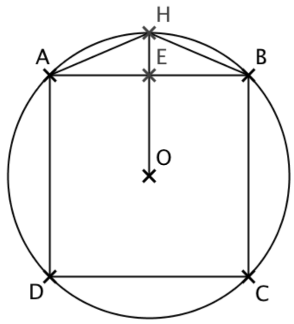


fig5

AEO est rectangle en *E* donc, selon le théorème de Pythagore:

$$EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}}$$

Donc :

$$EO = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ensuite, puisque *E*, *O* et *H* sont alignés:

$$HE = HO - OE = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On calcule maintenant la longueur du côté de l'octogone régulier.

H appartient à la médiatrice de [*AB*] donc :

AH = *HB* et *H* est un sommet de l'octogone.

Donc, selon le théorème de Pythagore dans le triangle *HEA* rectangle en E :

$$HA^2 = AE^2 + HE^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

$$= \frac{2}{4} + 1 + \frac{2}{4} - \frac{2 \times \sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

Donc :

$$HA = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Donc P_1 mesure $\quad 8 \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Donc: $\pi > \quad 4 \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Ensuite, on a cherché à calculer P_1 pour n=16 en procédant de la même manière. On place *F* au milieu de [*HA*] et on place *I* de façon à ce que [*HI*] soit un côté du polygone régulier et inscrit à $\mathscr{C}$ avec 16 cotés.

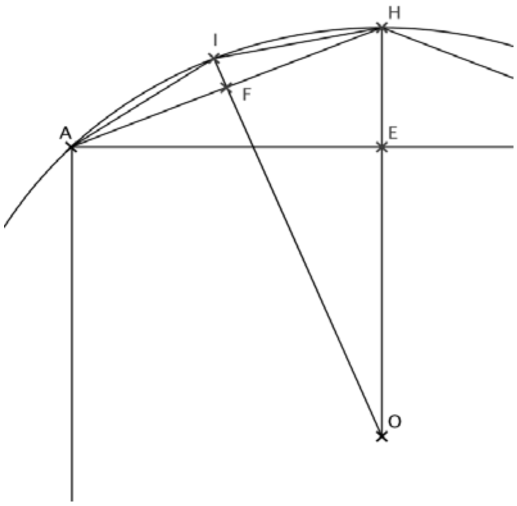


fig6

[*HF*] mesure la moitié de *HA* donc:

$$HF=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

On commence par calculer *OF*. *OHF* est rectangle en *F*, selon le théorème de Pythagore :

$$OF^2=OH^2-FH^2=1^2-\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

$$OF^2=1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Donc : $OF=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Puisque *I*, *F*, et *O* sont alignés:

$$IF=IO-FO=1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

HIF est rectangle en *F*, selon le théorème de Pythagore, on a:

$$HI^2=HF^2+FI^2=\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

$$HI^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}+1+\frac{2+\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$HI^2=2-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ Donc :

$$HI=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Donc P_1 mesure $16\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Donc: $\pi > 8\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

On calcule de la même façon P_1 pour n=32 et on obtient : P_1= $32\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

Donc: $\pi > 16\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

On remarque qu'à chaque fois que l'on double le nombre de côtés du polygone, on rajoute à la longueur du côté du polygone un « $+\sqrt{2}$ » sous la dernière racine. On a donc cherché à le démontrer.

<u>Généralisation:</u>

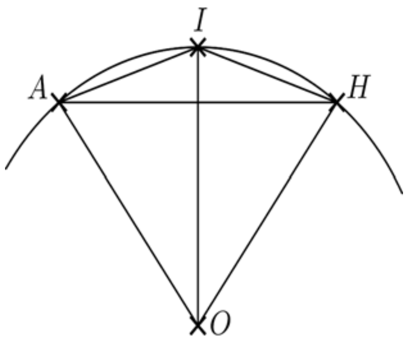


fig7

Soit *IAOH* un cerf-volant tel que *A* et *H* soient sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre *O* et de rayon 1 et tel que *I* soit à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la médiatrice de [*AH*] (voir *fig 6)*

On place le point *F* À l'intersection de (*AH*) et (*IO*).

On considère que la valeur de la longueur *AH* puisse s'écrire sous la forme $\sqrt{2-x}$ avec *x* un nombre inférieur à 2.

F est le milieu de [*AH*] donc $AF=\frac{\sqrt{2-x}}{2}$

On essaie de calculer la longueur *AI* de la même manière que précédemment. Dans *AOF* rectangle en F, selon le théorème de Pythagore, on a:

$$FO^2=AO^2-AF^2=1^2-\left(\frac{\sqrt{2-x}}{2}\right)^2$$

$$FO^2=1-\frac{2-x}{4}=\frac{2+x}{4}$$

$$FO=\frac{\sqrt{2+x}}{2}$$

IFO sont alignés donc:

$$IF=IO-FO=1-\frac{\sqrt{2+x}}{2}$$

Et enfin, selon le théorème de Pythagore:

$$AI^2=IF^2+AF^2=\left(1-\frac{\sqrt{2+x}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2-x}}{2}\right)^2$$

$$AI^2=1+\frac{2+x}{4}-\sqrt{2+x}+\frac{2-x}{4}$$

$AI^2 = 2-\sqrt{2+x}$

$AI = \sqrt{2-\sqrt{2+x}}$

Donc, on s'aperçoit qu'à chaque fois que l'on multiplie le nombre de côtés par deux, on ajoute à la valeur du côté du polygone, après le $\sqrt{2-...}$, un $+\sqrt{2+...}$ suivi du reste des racines.

Donc :

si n=4 (soit 2^2)

$\frac{P_1}{2} = 2^1 \times \sqrt{2}$ *(1 radical)*

si n=8 (soit 2^3)

$\frac{P_1}{2} = 2^2 \times \sqrt{2-\sqrt{2}}$ *(2 radicaux)*

si n=16 (soit 2^4)

$\frac{P_1}{2} = 2^3 \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ *(3 radicaux)*

si n=32 (soit 2^5),

$\frac{P_1}{2} = 2^4 \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ *(4 radicaux)*

si n=64 (soit 2^6),

$\frac{P_1}{2} = 2^5 \times \sqrt{2-\underset{\uparrow}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$ *(5 radicaux)*

on a ajouté cette racine

etc...

Puisque les polygones auront comme nombre de cotés des puissances de 2, on va prendre un nombre m tel que: $n = 2^m$

Le nombre de racines vaut m-1 donc notre formule finale est:

$$\frac{P_1}{2} = 2^{m-1} \times \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}_{\text{m-1 racines carrées}}$$

Voici la première partie de notre encadrement de π :

$$\boxed{2^{m-1} \times \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}_{\text{m-1 racines carrées}} < \pi}$$

b) <u>Calcul de P_2</u>

On a commencé par essayer de calculer P_2 comme P_1 , mais on n'a pas réussi.

On est donc revenu à notre première méthode:

$\frac{\overbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}^{\text{m-1 racines carrées}}}{2}$ est la valeur d'un demi-côté de polygone à 2^m côtés ; donc d'après 2) a) :

$$\frac{\overbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}^{\text{m-1 racines carrées}}}{2} = \sin(180/2^m)$$

Selon les relations trigonométriques , pour a et b deux angles aigus, on a :

($(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$

donc $\sqrt{1-(\sin a)^2} = \cos a$

On a alors :

$$\cos(180/2^m) = \sqrt{1-(\sin(180/2^m))^2}$$
$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}{\underbrace{2}_{\text{m-1 racines carrées}}}$$

De plus *:* $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$

donc : $\tan(180/2^m) = \frac{\sin(180/2^m)}{\cos(180/2^m)}$

$$= \frac{\overbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}^{\text{m-1 racines carrées}}}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}_{\text{m-1 racines carrées}}}$$

On sait que, d'après 2)b) : $\pi < n \times \tan(180/n)$

Donc on a notre seconde partie de l'encadrement de π:

$$\boxed{\pi < 2^m \times \frac{\overbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}^{\text{m-1 racines carrées}}}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}_{\text{m-1 racines carrées}}}}$$

On a donc un encadrement de π :

$$2^{m-1}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}} < \pi < 2^{m}\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}$$

On a réussi à avoir une formule finale sans trigonométrie mais cette formule reste difficile à calculer sans calculatrice (c'est possible grâce à la méthode d'Héron mais c'est extrêmement long).

Nous avons rentré ces formules sur tableur, voici quelques résultats :

2^m	$\frac{P_1}{2}$	$\frac{P_2}{2}$
8	**3,1** 2144	**3,1** 5172
32	**3,14** 0331	**3,14** 411
128	**3,141** 5138	**3,141** 7503
4096	**3,141592** 57	**3,141592** 80

(2)

4 – Aires et quadrillages

On sait que π intervient dans l'aire d'un cercle (πR^2). On va donc remplir un cercle avec le plus de formes géométriques possibles, ce qui va former une sorte de pavage. On va ensuite calculer l'aire de ce quadrillage ; plus celui-ci sera petit plus on se rapprochera de l'aire du disque et donc de π : pour trouver π il nous suffira de diviser cette surface par le rayon du disque au carré.

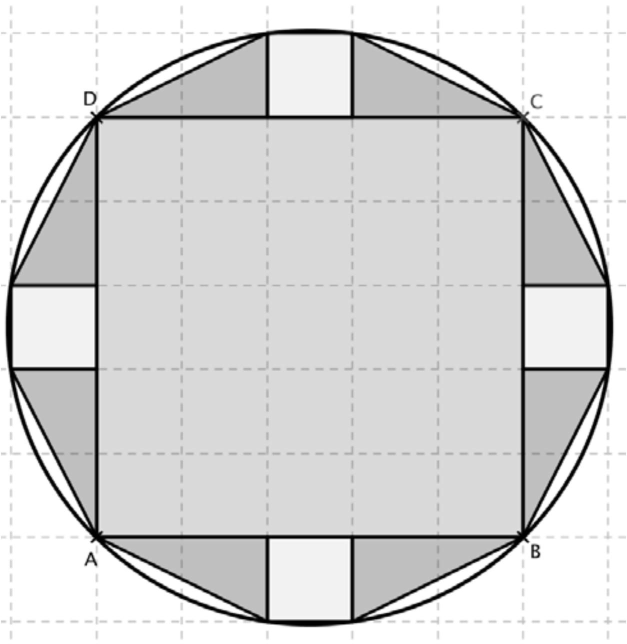


fig8

- Côté du grand carré : 10 cm
  Son aire : 100 cm²
- Côté d'un petit carré : 10/5 = 2 cm
  Son aire : 4 cm²
- Aire d'un triangle rectangle = (2x4)/2 = 4 cm²
- Aire totale de la surface grisée :
  100+4x4+4x8 = 148 cm²

Ici le rayon est la demi-diagonale d'un carré de côté 10 cm, c'est à dire $5\times\sqrt{2}$ cm

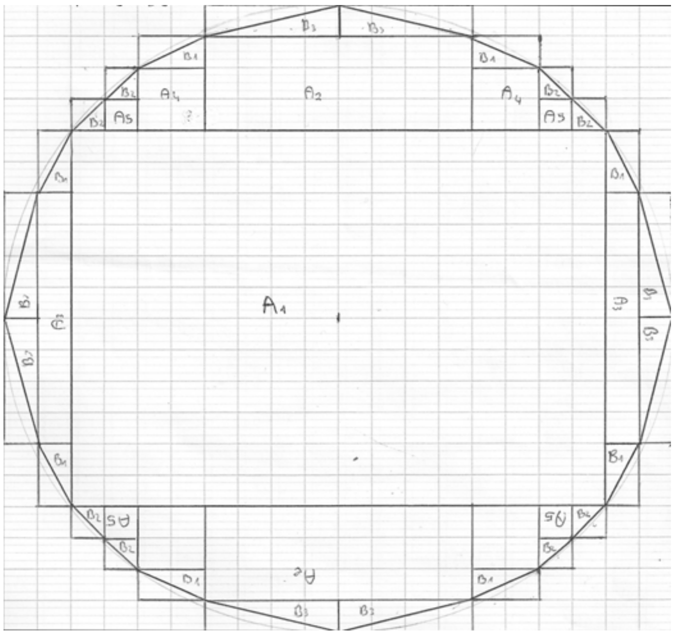
La **valeur approchée** de π est donc ici:

$$\frac{148}{(5\sqrt{2})^2}=\frac{148}{50}\approx 2{,}96\,cm$$

Ce n'est pas très précis : pour plus de précision il faut affiner le pavage.

Voici un autre exemple de pavage (que l'on a fait à la main) grâce à un quadrillage intérieur et un autre extérieur.

R = 10 cm



Aire du disque : π x 10 x 10 = 100 π

Aire du quadrillage intérieur : 276 + 28 = 304

Aire du quadrillage extérieur : 304 + 28 = 332

Donc : $304 < \pi \times R^2 < 332$

Donc : $3{,}04 < \pi < 3{,}32$

Nous n'avons pas terminé cette partie, pour trouver une valeur qui bat celle de la calculatrice nous devons affiner le quadrillage. **(3)**

Notes d'édition

(1) Il est ici implicitement admis qu'un polygone régulier contenant/contenu dans un cercle a un périmètre plus grand/plus petit que celui-ci. Cette propriété peut en réalité se révéler difficile à prouver, car il est possible de définir des polygones (non réguliers) ayant un périmètre infini pour une aire finie.

(2) Il est fait mention de la méthode de Héron pour calculer les racines carrées sans calculatrice. Il faut toutefois noter qu'il s'agit ici de calculer des racines carrées successives. Il est compliqué de déterminer quelle sera la précision du résultat final en fonction du nombre de décimales calculées à chaque racine carrée. En effet, à chaque calcul de racine carrée, une petite approximation est faite (en tronquant le résultat à une certaine décimale). Ces approximations peuvent s'accumuler au fur et à mesure du calcul. Pour que le résultat final soit précis à dix décimales, il faudra s'assurer de calculer les racines carrées intermédiares avec une précision suffisante, et probablement supérieure à dix décimales.

(3) Il s'agit de travaux exploratoires, et donc non terminés. En particulier, il est nécessaire de remarquer ici que dans les figures proposées, certains coins du quadrillage sont considérés comme étant sur le cercle, alors que s'ils en sont proches visuellement, ils ne sont pas nécessairement dessus. Ainsi un pavage dit « intérieur » ou « extérieur » ne l'est pas forcément.