L’anneau des Nains

Année 2017 – 2018

Laure BAILLOUX, Ophélie BARBOTIN , Pauline HUET, Axel CLAMONT-DRACON, élèves de classe 2nde1 et de classe 2nde4 .

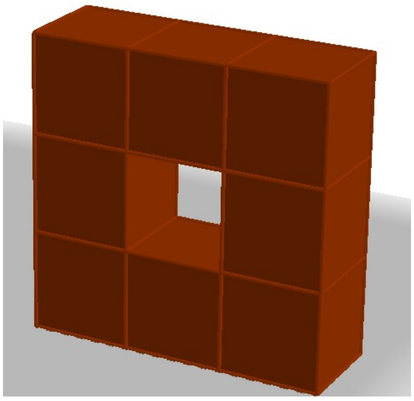
Encadrés par Jildaz COUSIN

Établissements : Lycée Edouard Branly, Châtellerault

Chercheur : Eric Andres, XLIM

1. **Présentation du sujet**

Notre sujet est de venir en aide aux nains pour leur permettre de forger un anneau en or constitué de 8 cubes.
On cherche à réaliser un patron sur une plaque d’or rectangulaire quelconque, formé de 32 carrés identiques. On choisit comme unité l’aire du carré. L’objectif est que notre feuille d’or soit la plus petite possible.



Anneau des nains.

1. **Annonce des conjectures et résultats obtenus**

Le meilleur taux de remplissage trouvé pour la feuille d’or est de $\frac{2}{3}$.

2. **Texte de l’article**

Nous allons vous présenter notre projet réalisé dans le cadre de Maths en Jean. Il s’intitule l’Anneau des Nains. Nous venons du lycée Édouard Branly à Châtellerault dans le 86. Nous avons été aidé par notre professeur de mathématique Jildaz Cousin et du chercheur Eric Andrès.

I. Construction de l’anneau des nains

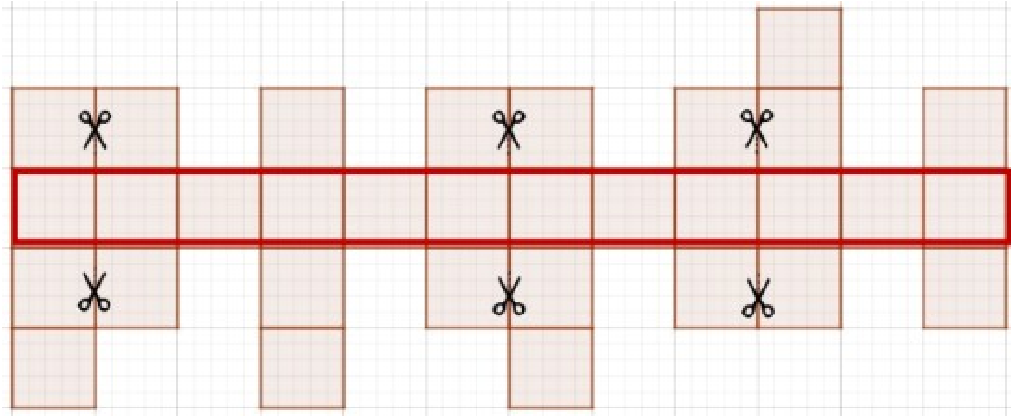
Nous avons tout d’abord réalisé puis construit l’anneau en 3D pour avoir une idée de sa forme en assemblant huit cubes en papier.

Assemblage papier.

II. Premier patron

A. Construction

Nous avons construit notre premier patron en découpant cet anneau, ce qui nous a donné le patrons ci-dessous.



Premier patron.

On remarque sur ce patron une ligne principale qui correspond au tour extérieur de l'anneau .

B. Taux de remplissage

Pour un patron donné, le taux de remplissage est le quotient de la surface du patron sur la surface du plus petit rectangle contenant le patron.

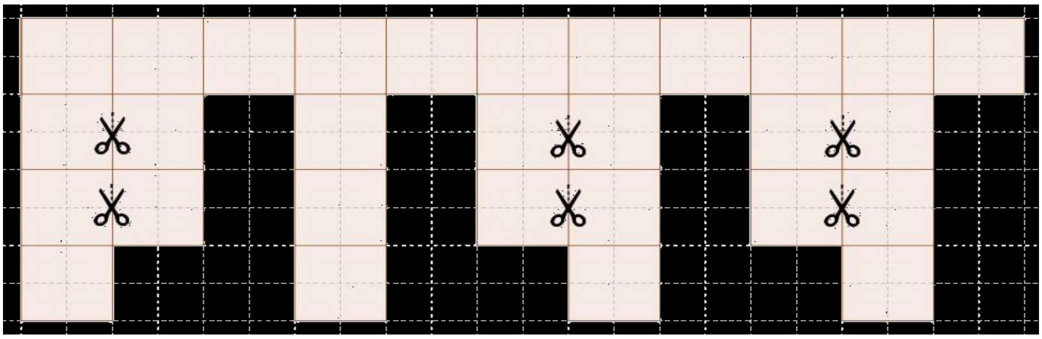
Pour notre premier patron, le taux de remplissage est de $\frac{32}{60}=\frac{8}{15}\approx 53,3\ \%$

Nous allons apporter des modifications à ce patron pour améliorer le taux de remplissage.

III. Amélioration du premier patron

A. Piste de travail 1

En s'appuyant sur le patron précédent , nous avons essayé d'améliorer le patron en passant toutes les faces en dessous de la ligne principale.

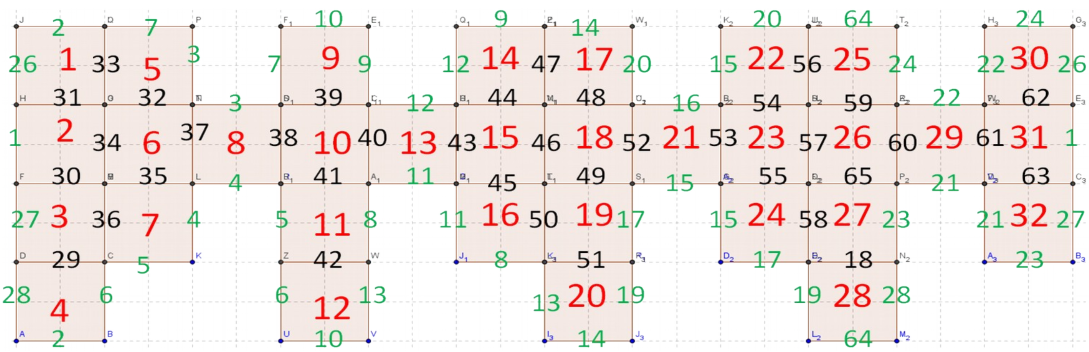


Deuxième patron.

On remarque que le patron obtenu n'est pas intéressant car certaines faces se retrouvent superposées quand on replie le patron et on ne peut pas obtenir l'anneau.

B. Piste de travail 2

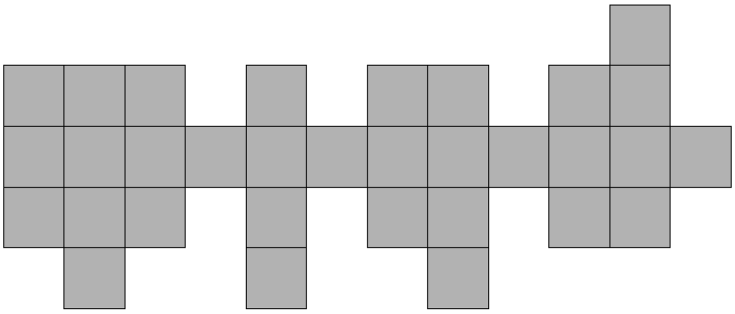
Pour éviter le problème précédent, nous avons numéroté chaque face et chaque arête. Les faces sont numérotées de 1 à 32 tandis que les arêtes sont numérotées de 1 à 63. Vous pouvez remarquer que les numéros verts et noirs correspondent aux arêtes et les rouges correspondent aux faces.



Troisième patron.

Avec cette technique, nous avons déplacé la face 28 qui allait précédemment au-dessus de la face 25, pour la placer en-dessous de la face 27. Ce déplacement nous fait gagner une ligne donc le taux de remplissage va augmenter. On obtient $\frac{32}{48}=\frac{2}{3}\approx 66{,}7\ \%$

On peut aussi par exemple déplacer avec cette technique les 3 carrés de droite (30, 31, 32) pour les ramener à gauche. Mais le taux de remplissage ne diminue pas.



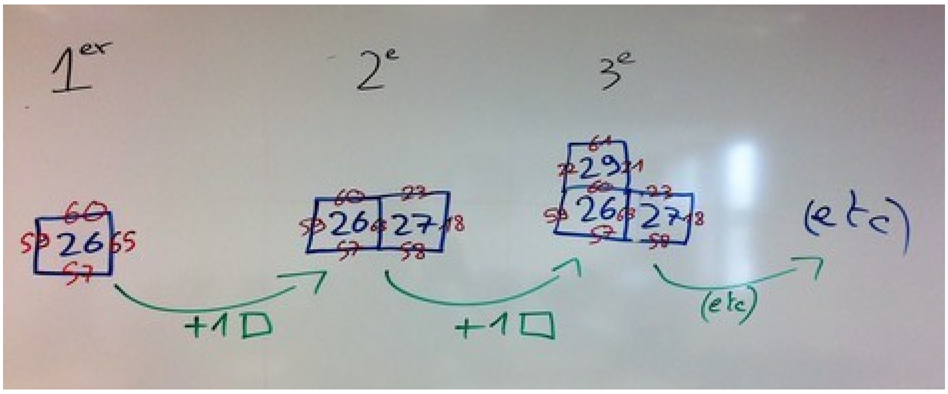
Quatrième patron.

Comme nous n'avons pas pu apporter beaucoup de modifications au premier patron par cette méthode mais nous avons vu qu'avec la numérotation des faces et des arêtes, on pouvait reconstituer complètement de nouveaux patrons.

IV. Nouvelle construction

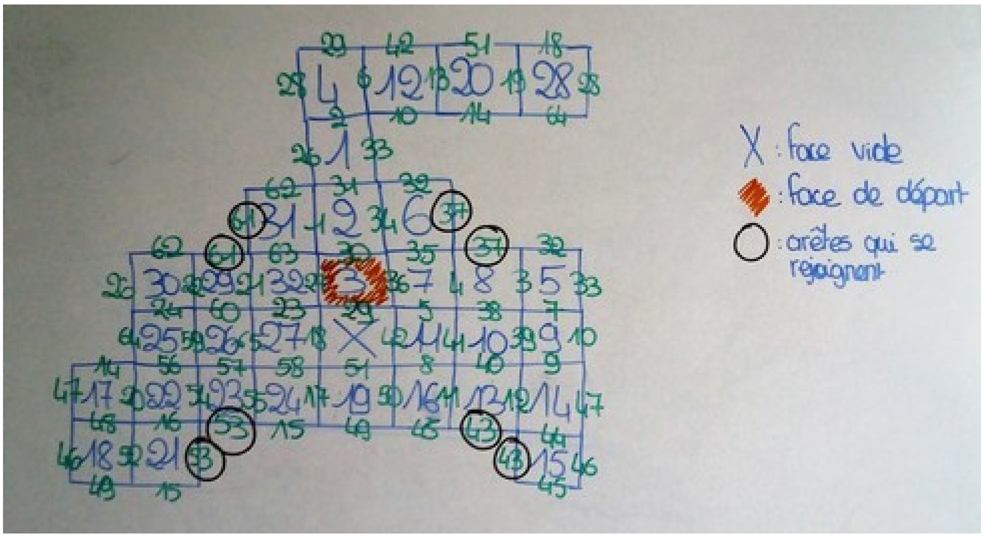
Méthode

- Nous prenons toutes les faces et les arêtes numérotées.
- Nous choisissons une des 32 faces au hasard : elle a 4 arêtes numérotées.
- Parmi les 31 faces restantes, nous choisissons une face ayant une arête avec le même numéro et on l'assemble à la première : la figure a 6 arêtes numérotées.
- On répète le procédé pour assembler les 32 faces.



Premières étapes de la création du cinquième patron.

Après avoir placé toutes les faces nous avons obtenu le patron suivant :



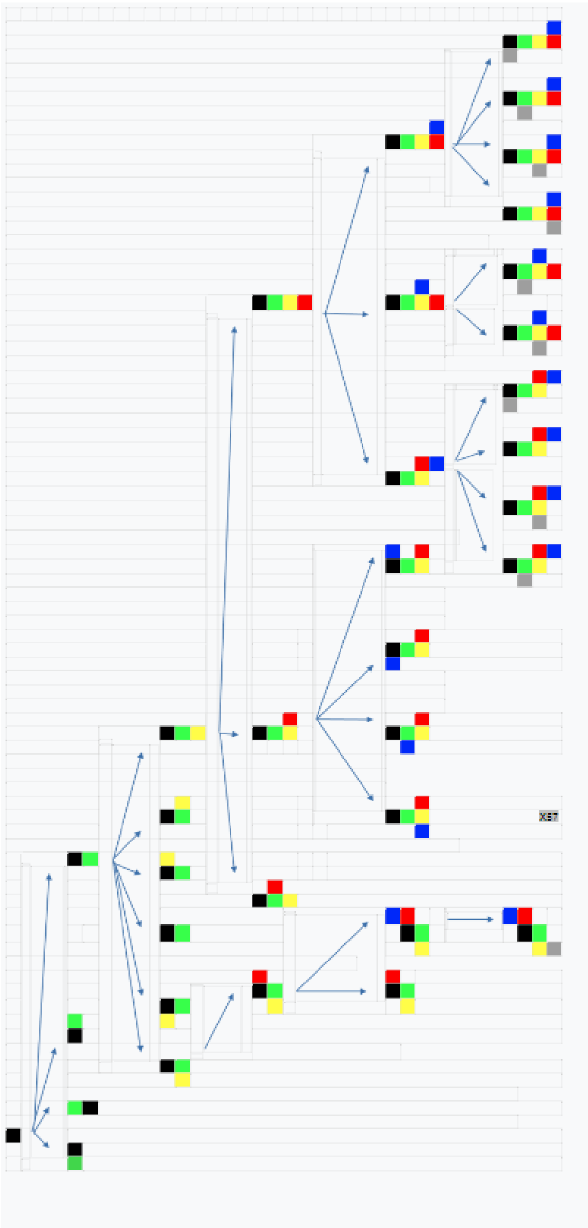
Cinquième patron.

Nous l’avons plié pour vérifier qu’il était correct.

Taux de remplissage du cinquième patron : $\frac{32}{56}=\frac{4}{7}\approx 57{,}1$ %.

V. D’autres patrons…

Nous avions à ce stade plusieurs patrons différents : nous nous sommes demandé si nous pouvions obtenir tous les patrons possibles et si oui comment ?
Pour chercher une méthode, nous avons d’abord commencé par travailler sur un cas plus simple : le cube.
Nous avons fait un arbre répertoriant tous les patrons du cube.
Il s’agit de prendre un carré et d’en rajouter un au fur et a mesure en cherchant toutes les possibilités qui donnent des patrons différents.

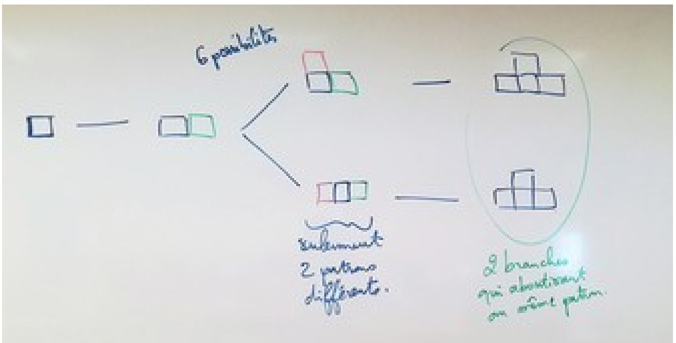


Arbre des patrons du cube.

Nous voulions ensuite reproduire cette technique à l’anneau mais on se rendit compte rapidement que cette technique était extrêmement chronophage car il y a beaucoup de branches à chaque étape et il existe de nombreux chemins dans l’arbre aboutissant à des patrons identiques. Nous avons donc abandonné cette technique.

Comme nous ne pouvions pas trouver tous les patrons de l’anneau à l’aide d’un arbre, nous avons cherché s’il était possible d’estimer le nombre de patrons.
Nous avons eu l’idée de reprendre la construction du troisième patron en comptant à chaque étape le nombre de choix pour le carré suivant jusqu’à la 32ème face.
Nous avons recommencé cette technique dans le cas du cube, mais elle donne des résultats beaucoup trop grands car elle ne prend pas en compte les doublons.

Nous expliquons ces doublons a l’aide du cube :
Comme le montre l’image ci-contre, on constate qu’on peut retrouver exactement les mêmes patrons par deux chemins différents.

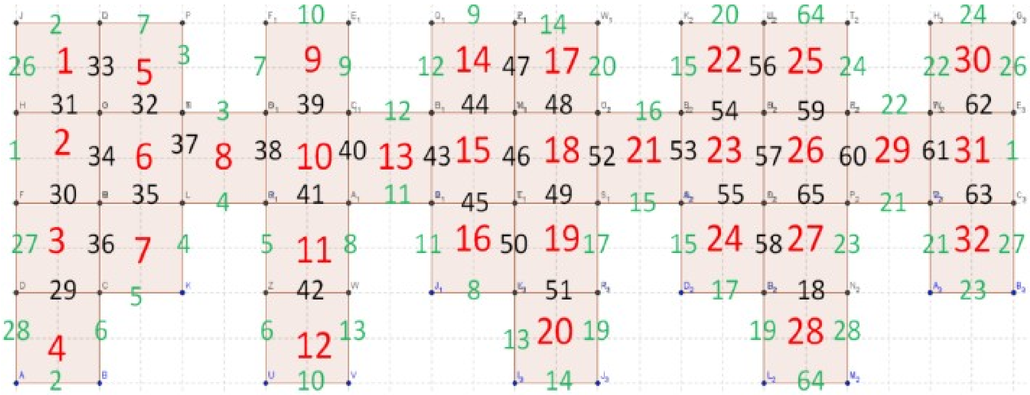


Doublons dans l'arbre des patrons du cube.

En plus de ce problème de doublons, nous avons aussi un problème avec les symétries : nous avons plusieurs fois le même patron mais dans différentes orientations et différents axes.
Nous n’avons pas encore trouvé une méthode permettant d’estimer le nombre de patrons de l’anneau.

VI. Conclusion

Pour l'instant notre meilleur patron est le troisième (ou le quatrième [1]), avec un taux de remplissage de $\frac{2}{3}$.



Meilleur patron obtenu.

Pour trouver des patrons plus performants, nous avons une nouvelle piste : nous pourrions réaliser un patron en utilisant la méthode du grand IV, en ajoutant au fur et à mesure les faces en utilisant les arêtes correspondantes. Mais, contrairement à ce que nous avons fait dans le IV, nous chercherions tout d'abord à réaliser un patron le moins compact possible. Une fois le nouveau patron obtenu, nous pourrons le rendre plus compact en déplaçant certaines faces comme dans la partie III. [2]

Notes d'édition :

[1] Non, seulement le 3ème. Le taux de remplissage du quatrième patron est 32/60 < 2/3.

[2] On aurait aussi pu envisager de regarder tous les formats de feuille ayant moins de 48 carreaux, et chercher si dans chacun d'eux on pouvait mettre un patron de notre anneau.