le sofa

par Pierre Konen, Université d'Aix-Marseille 2

enseignant : Laurent Beddou

chercheur : Christian Mauduit

— le problème du sofa

On cherche le plus grand sofa qui puisse être déménagé en empruntant un couloir coudé. Quelle forme géométrique permet le passage, dans un couloir coudé à angle droit, de l'aire maximale ?

Le problème posé

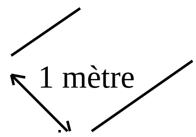
Quelle est l'aire maximale que l'on peut faire passer dans un couloir d'un mètre de large et formant un angle droit ?

Couloir avec un seul angle droit

On nommera dorénavant « **coin** » le coude du couloir.

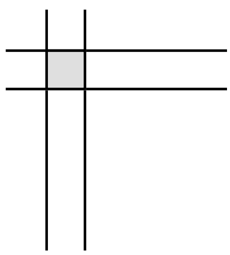
Propriétés de la forme

La forme que l'on veut faire passer aura obligatoirement une largeur maximale inférieure où égale à la largeur du couloir soit 1 mètre, donc sera limité par 2 « bornes » :



[NDLR. L'idée est que le sofa se trouve à tout moment dans une bande de 1 m de large, bande dont l'orientation varie avec celle du sofa. L'expression « limitée par deux bornes » sera dans la suite systématiquement remplacée par « situé dans une bande ».]

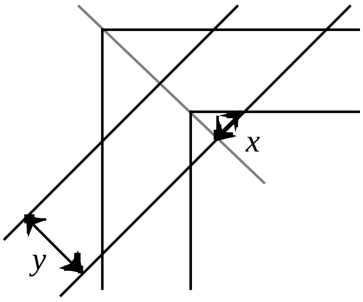
Si on veut une forme plus grande que 1 m^2, il faudra que cette forme effectue une rotation. En effet, si l'on considère les deux parties du couloir c'est-à-dire la partie verticale et la partie horizontale, une forme qui ne subit aucune rotation doit être identique dans les deux parties, et donc sera située dans l'intersection d'un couloir horizontal et d'un couloir vertical, c'est-à-dire dans un carré de 1 mètre de côté.



[NDLC : les unités de longueur et d'aire ayant été fixées, elles ne seront plus indiquées dans la suite.]

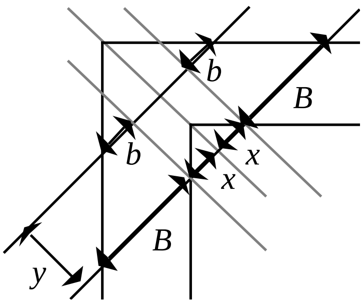
Majorant

Pour trouver un majorant de l'aire cherchée, on suppose que la forme optimale subisse une rotation de 0 à 90 degrés. Cette forme passera donc par un angle de 45 degrés par rapport à son emplacement d'origine et sera située dans une bande inclinée à 45°. Il suffit alors, pour trouver le majorant, de trouver l'intersection maximale entre une telle bande et le couloir :



y correspond à la largeur de la bande ; x correspond à l'emplacement de la bande par rapport au couloir.

L'aire de cette intersection notée S peut se calculer de la façon suivante avec $y \in [0,1]$ et $x \in [0,1]$.



$$S_{(x,y)} = 2\left(\frac{B+b}{2} \times y\right) + 2\,x\,y - 2\,\frac{x^2}{2}$$

[On remarque que $B = b + y = \sqrt{2}$. L'aire S augmentant avec y, on peut en outre supposer $y = 1$.] Ainsi :

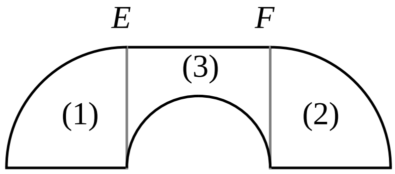
$$S_{(x,\ 1)} = -\,x^2 + 2\,x + \left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

avec un maximum pour $x = 1$.

Un majorant de l'aire est : $\mathbf{2\sqrt{2}}$ $\approx 2{,}83$.

Forme proposée

La forme proposée est celle-ci :

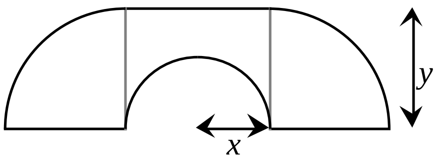


Elle est composée de deux quarts de cercle, (1) et (2), et d'un rectangle diminué d'un demi-cercle, (3). Montrons que la partie supérieure de (3) ne sort pas du couloir.

Soient $E \in (1) \cap (3)$ et $F \in (2) \cap (3)$. Le point E passe, car (1) passe et F passe, car (2) passe. Dire qu'un bout du segment $[EF]$ (donc qu'une partie de (3)) dépasse revient à dire que E ou F ne passe pas. Or comme on sait qu'ils passent, (3) ne sort pas à l'extérieur du couloir.

[NDLR. Tout convaincant qu'il puisse sembler, le raisonnement reste incomplet tant qu'on ne précise pas le mouvement du sofa. Il faudrait également s'assurer du passage de la partie inférieure de (3).]

Calcul de l'aire



De la même manière que pour le majorant, j'introduis les deux variables x et y. Soit $A(x, y)$ l'aire de la forme :

$$A_{(x,\,y)} = \left(\frac{\pi}{4}y^2\right) \times 2 + 2\,x\,y - \frac{\pi}{2}x^2$$
$$= \textit{les 2 cercles} + \textit{le rectangle} - \textit{le cercle cen}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(y^2 - x^2\right) + 2\,x\,y$$

[Comme on peut le justifier aisément, on peut supposer $y = 1$.] Le maximum est alors obtenu pour $x = \pi/2$. D'où :

$$A_{\max} = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} \approx 2{,}24$$

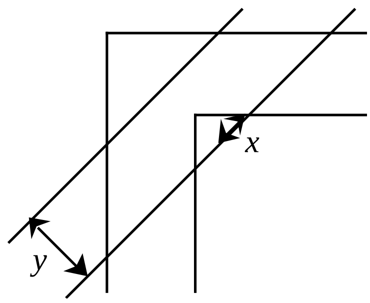
Couloirs avec deux coins

Hypothèse sur la forme

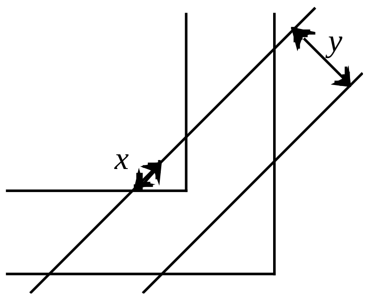
On suppose la forme symétrique par rapport à deux axes perpendiculaires. [Comme précédemment, la forme est sise dans une bande qui la contient et on suppose que le déplacement amène, continûment, le sofa à tourner de 90°.]

Majorant

Une représentation pour majorer la forme au passage dans le premier coin est :

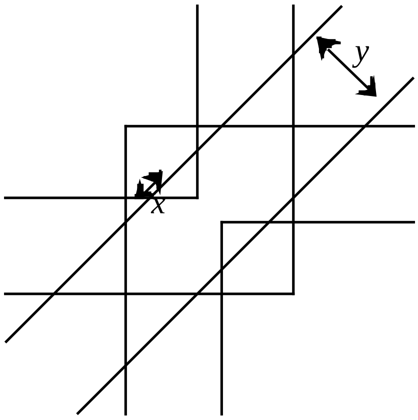


Or, d'après les propriétés de la forme, dans l'autre coin, la représentation se fera de la même manière, et gardant x et y constants.

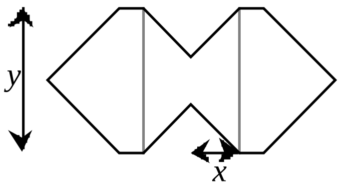


[NDLR. La représentation choisie utilise implicitement une hypothèse supplémentaire : le mouvement de passage du deuxième coin est symétrique de celui utilisé pour le premier coin.]

Pour pouvoir calculer le majorant, il suffit de prendre, pour la même inclinaison de la bande, l'intersection maximale entre les deux couloirs et ces bornes.



L'aire du majorant peut alors se calculer de cette façon, avec $y \in [0,1]$ et $x \in [0,1]$:



L'aire totale sera $S_2(x, y)$:

$S_2(x, y) = 2\,x\,y + 2\sqrt{2}\,y - 1{,}5\,y^2 - 2\,x^2$.

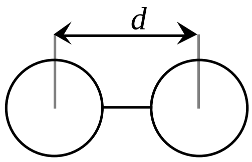
Comme précédemment, on vérifie que le maximum est atteint pour $y = 1$ et $x = 1/2$.

$$S_{2\max} = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1{,}83.$$

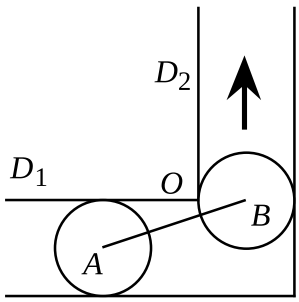
Forme proposée

Préforme

Imaginons d'abord une forme composée de deux cercles de diamètre 1 liés par une tige. On appelle d la distance entre les centres des deux cercles.



[Imaginons que la figure soit dessinée sur une feuille transparente et se déplace comme cela :]

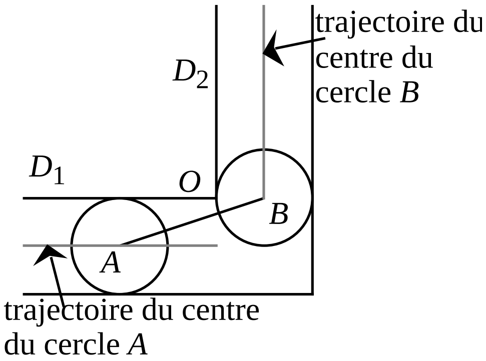


Lors du déplacement de la figure, le point O tracera sur la feuille transparente le contour exact de la forme cherchée, [plus précisément de la partie située] entre les deux cercles. Donc non seulement on remplit les conditions pour que la forme passe, mais on minimise ainsi les pertes de surfaces !

Propriétés

• Le point O commence à tracer sa trajectoire lorsqu'il se trouve sur la tangente du cercle A passant par le centre du cercle B.

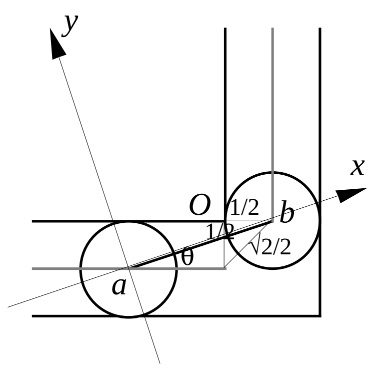
• Lorsque le point O tracera sa trajectoire, le centre du cercle A décrira une droite, ainsi que le centre du cercle B.



Ainsi, on va définir :

a : le centre du cercle A
b : le centre du cercle B
θ : angle entre la droite (ab) et l'horizontale

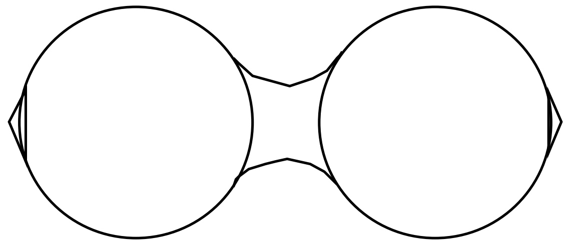
Ainsi, les coordonnées x et y du point O seront déterminées géométriquement dans le repère d'origine a avec (ab) comme axe des abscisses.

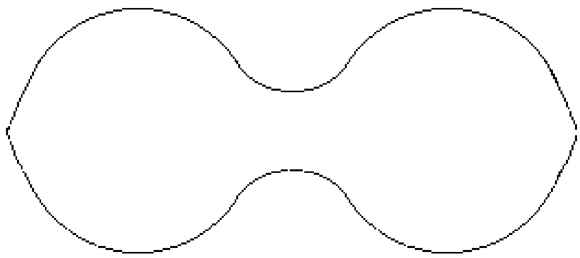


On obtient ainsi une équation paramétrique de la trajectoire du point O :

$$\begin{cases} x = \dfrac{d}{2} + \dfrac{d}{2}\cos(2\theta) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ y = -\dfrac{d}{2}\sin(2\theta) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

On peut aussi, en appliquant une méthode similaire, rajouter deux petites aires aux extrémités de la forme sans empêcher son passage. [NDLR. Les courbes dessinant les pointes sont alors les « enveloppes » des murs extérieurs. L'équation paramétrique correspondante n'a pas été précisée par l'auteur.] On obtient ainsi comme forme :





Calcul de l'aire

Grace aux équations paramétriques trouvées, on peut calculer l'aire.

[NDLR. Les calculs, non évidents, ont été laissés par l'auteur au bon soin du lecteur courageux. Il reste ensuite à choisir *d* pour que l'aire obtenue soit maximale, ce qui n'est peut-être pas une mince affaire. L'auteur indique 1,84 comme résultat final, ce qui est manifestement impossible vu le majorant précédemment trouvé.]

[NDLC. Rappel : le dit-majorant trouvé était ≈ 1,83 qui représente donc une valeur qu'on ne peut pas dépasser … Pour d'autres informations sur le problème du sofa, problème toujours ouvert, voir les actes MATh.en. JEANS 1995, pages 231-232.]