modélisation du hasard

par M. Sylvain Driancourt, M. Stéphane Chrétien, M. Olivier Lebret, M. Laurent Vanitou, M. Jean-Christophe Avoix, M. Jérôme Tyfel, élèves de première et terminale S du **lycée Jean Rostand de Mantes la Jolie (78)**, établissement jumelé avec le **lycée St Exupéry de Mantes la Jolie (78)**

enseignant :
M. Jean-Pierre Vallon

chercheur :
M. Laurent Mazliak

coordination article : Driancourt Sylvain

Pas de compte-rendu de parrainage.

P — La modélisation du hasard. **33**

Qu'est-ce que le hasard ?

Comment modéliser un jeu de dés, le tiercé ?

Comment s'y prendre s'il y a une infinité de combinaisons possibles ?

Sujet.

Comment modéliser un tiercé, une partie de dé ? Comment modéliser le hasard lorsqu'il y a une infinité de résultats possibles ?

Petite introduction historique et philosophique : les trois définitions du hasard.

Lorsque nous ouvrons plusieurs encyclopédies pour tenter de définir le mot « hasard », nous trouvons de nombreuses définitions qui présentent souvent des différences :

— Grand Larousse : • puissance considérée comme la cause d'événements apparemment fortuits ou inexplicables. • circonstance de caractère imprévu ou imprévisible.

— Larousse encyclopédie : • cause fictive des événements considérés comme soumis à la seule loi des probabilités.

Dans certains exemples (jeux de cartes), la chance est donnée comme synonyme du hasard. De même on trouve : « par hasard » = de façon accidentelle, fortuite.

Le mot « hasard » est employé dans une multitude de situations différentes, mais la difficulté à le définir se rencontre constamment. Qu'est-ce que le hasard ? Peut-on réellement donner une définition « universelle » pour tenter de diminuer sa dimension d'action et ainsi laisser davantage de liberté de manœuvre à un déterminisme parfait des événements ?

Certains cherchent à écarter le hasard, ou à l'ignorer, pour valoriser l'idée d'un déterminisme absolu : la totalité des déterminations permet de dire que le système est totalement décrit. C'est le cas, par exemple, du physicien célèbre qu'est Albert Einstein dont l'expression connue à ce sujet est : « Dieu ne joue pas aux dés ». Il avait en effet du mal à admettre l'idée de hasard, l'idée du non-déterminisme. En physique ou en biologie (où des phénomènes obéissent à des lois hautement déterministes), l'idée d'un hasard était pour lui durement acceptable.

Bien souvent de nos jours on remplace la géométrie du hasard [= l'analyse de sa fabrication spatiale précise] par la loi des grands nombres [où la "probabilité" est vue comme "fréquence limite"] et on comprend ainsi les tables de fréquences étudiées en statistiques.

Les débuts de notre recherche.

Nous nous sommes tout d'abord penchés sur deux expériences simples :

• L'expérience qui consiste à jeter une pièce et à s'intéresser au résultat (pile ou face)

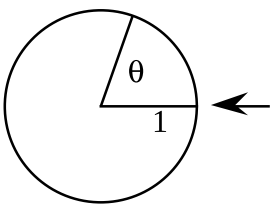
• L'expérience semblable qui consiste à lancer un dé à six faces et à s'intéresser au résultat (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Nous nous sommes aperçus que le nombre de résultats possibles pour ces deux expériences étant fixé et connu d'avance ; nous retombions sur des choses vues et apprises en cours de mathématiques.

Craignant de voir notre recherche réduite ou tout du moins gênée par le fait que l'on nous avait déjà donné des notions à ce sujet, nous avons décidé de ne pas continuer dans cette voie et de nous intéresser à une expérience qui possède une infinité de résultats possibles.

Présentation de l'expérience.

Nous disposons d'une roue de rayon égal à 1 pouvant pivoter sur son axe, et d'une flèche dirigée vers le centre de la roue comme le montre le schéma ci-après.

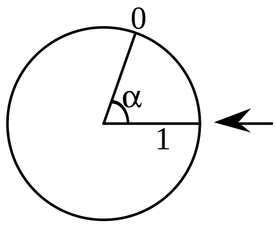


[NDLC : il s'agit, on l'aura reconnu, d'une roue de loterie ; certains secteurs de la roue nous intéressent, d'autres non, et on veut évaluer les chances de gagner.]

Notre travail de recherche.

Définitions de départ :

• Un résultat est défini par un angle α formé par un rayon fixe noté 0 et le rayon indiqué par la flèche. Il y a donc autant de résultats possibles qu'il y a de points à la périphérie de la roue, c'est-à-dire une infinité.



• On va appeler **événement élémentaire** chaque résultat possible. D'après la définition d'un résultat, nous pouvons donc dire qu'il existe une infinité d'événements élémentaires. [NDLR : ainsi peut-on considérer qu'un secteur angulaire précis est un évènement, en tant qu'ensemble des angles qui définissent un résultat dans ce secteur. En fait, ici, un évènement élémentaire est aussi bien défini comme un point sur le bord du disque, que comme un segment radial, et un évènement est aussi bien un angle qu'un secteur angulaire ou qu'un arc de cercle, puisque ces éléments se correspondent.] [NDLC : j'ai pas compris le NDLR, mais je m'en fiche parce que … je suis sûrement pas la seule !]

• On appelle événement tout ensemble regroupant des événements élémentaires. [NDLC : si tout le monde s'appelle évènement, je vois pas à quoi ça sert d'en donner une définition … ça me fait penser à « à partir de dorénavant, et jusqu'à désormais, on fera comme avant ! »]

Modélisation du hasard par les probabilités :

La modélisation du hasard passe bien souvent de nos jours par l'étude des probabilités, c'est pourquoi notre étude porte principalement sur le calcul de probabilités d'événements divers.

Première définition de la probabilité :

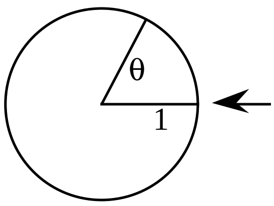
Nous avons tout d'abord travaillé avec la définition d'une probabilité que nous avions apprise en cours, c'est-à-dire le quotient du nombre de cas favorables sur le nombre total de cas. Il vous semblera sans doute aberrant que nous ayons pu pendant quelques semaines travailler avec une telle définition de la probabilité qui, on le voit, est inutilisable dans le cas de notre expérience où le nombre total de cas est infini. Nous évitions en quelque sorte le problème car nous raisonnions de la façon suivante :

Pour calculer la probabilité d'un secteur angulaire de la roue d'angle θ, nous faisions le quotient de cet angle avec l'angle total, c'est-à-dire 2π.

Exemple : Pour calculer la probabilité du secteur angulaire d'angle 60°, nous faisions :

$$P(\text{"}\theta\text{"}) = \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

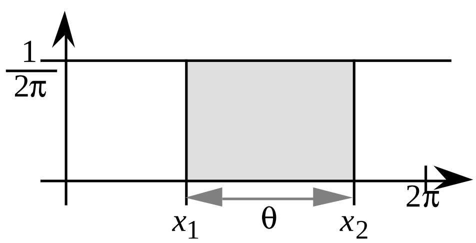
$\theta = \pi/3$ rad



Nous ne rencontrions donc pas de problèmes pour calculer la probabilité d'événements de cette sorte. Mais étant donnée la forme prise par les événements dont nous allions tenter par la suite de déterminer la probabilité, nous avons été obligés de définir la probabilité d'une manière différente.

Deuxième définition de la probabilité :

Notre deuxième définition de la probabilité est basée sur le fait que nous avons affaire à des aires. Notre nouvelle probabilité sera donc représentée par une aire, et définie comme nous l'expliquons ci-après.



La probabilité est l'aire comprise entre :
• les droites d'équations $y = 0$ (axe des abscisses) et $y = 1/(2\pi)$.
• les droites verticales d'équations $x = x_1$ et $x = x_2$; x_1 et x_2 étant les valeurs extrêmes des angles délimitant l'événement dont il est question.

Si l'événement est discontinu, alors la probabilité de l'événement est la somme des aires des "petits événements".

Nous retrouvons donc la plupart des propriétés que possèdent les probabilités apprises en cours, c'est-à-dire :
• la probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
• la probabilité d'un secteur angulaire d'angle égal à 0 est 0.

Explications à propos du schéma : d'où viennent le « 2π » et le « 1/(2π) » ?

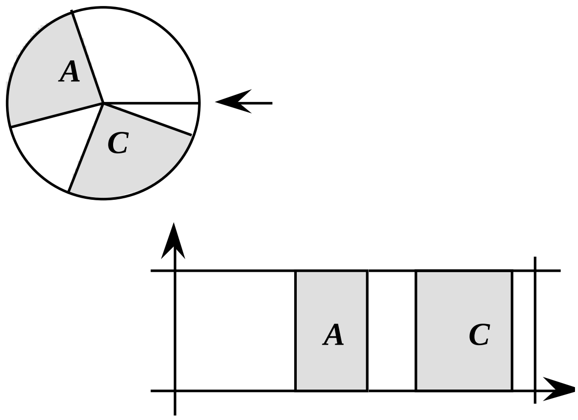
Tout d'abord le « 2π » est le périmètre de notre roue ($p = 2 \times \pi \times R$), et donc la longueur délimitant un secteur angulaire est égale à 2π au maximum.

Ensuite le « 1/(2π) » provient du fait que nous souhaitions conserver le nombre 1 comme maximum de probabilité, car c'est plus pratique ainsi, et on peut se relier très facilement au contexte des statistiques en conservant la probabilité et la transformant ainsi en fréquence (pourcentage). Avec le « 1/(2π) » la probabilité maximale, et donc l'aire maximale, est $2\pi \times 1/(2\pi) = 1$.

Calculs de probabilités et observations :

Nous pouvons tout d'abord remarquer que le calcul de la probabilité d'un événement revient à l'étude de la longueur que représente cet événement sur la périphérie de la roue.
Nous allons poser que, comme dans le cas de la première définition de la probabilité, la probabilité d'un événement est égale à la somme des événements le constituant.

Pour rendre tout cela plus clair nous allons maintenant proposer un petit exemple.



La probabilité de l’événement constitué des deux secteurs angulaires A et C (schéma de gauche) est égale à l’aire ombrée sur le schéma de droite .

observations

D’après la définition de notre roue, nous pouvons dire que la probabilité d’un événement élémentaire est égale à 0.

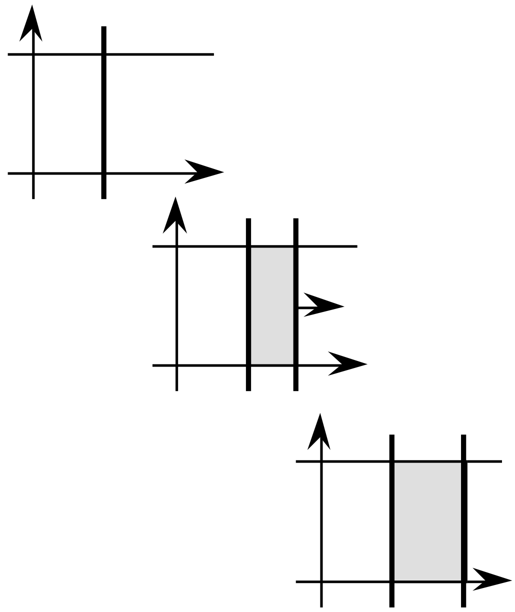
Nous avons admis que la probabilité d’un événement est égale à la somme des événements le constituant.

Dans ce cas une contradiction s’est montrée à nous. D’après les deux hypothèses précédentes nous pourrions conclure que la probabilité de tout événement est égale à 0, ce qui rendrait absurdes nos calculs. Le problème vient du fait qu’un arc de cercle, si petit qu’il soit, est constitué d’une infinité de points et que l’on n’a pas d’outils pour effectuer l’addition d’une infinité de 0.

Mais ce problème peut être résolu avec une petite explication et un schéma :

Pour calculer la probabilité d’un secteur angulaire, par exemple, on doit raisonner comme suit :

1ère étape : On fixe un des segments délimitant le secteur angulaire.



2ème étape : On “ tire “ le segment vers la droite afin de passer par tous les événements élémentaires.

3ème étape : On s’arrête à l’autre segment délimitant le secteur angulaire. Notre segment est ainsi « passé » par tous les événements élémentaires et l’on s’aperçoit alors que nous obtenons une surface.

théorème

C’est à ce moment de notre réflexion que nous avons fait une découverte :

Théorème :
La probabilité d’un événement constitué d’un nombre fini « n » de points à la périphérie de la roue est égale à 0.

Démonstration :
Soit A un événement constitué d’un nombre fini d’événements élémentaires. On a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\{x_3\}\cup \dots \cup\{x_n\}) \\ &= P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + \dots + P(x_n) \end{aligned}$$

Or $\{x_1\}$, $\{x_2\}$,$\{x_3\}$, ..., $\{x_n\}$ sont des événements élémentaires de probabilité égale à 0, donc la probabilité de A est la somme d’un nombre fini de “0”. La probabilité de A est donc égale à 0.

grave erreur !

Tout heureux de notre théorème, nous étions prêts à affirmer sur notre lancée que réciproquement, un événement dont la probabilité serait égale à 0 serait forcément un événement constitué d'un nombre fini d'événements élémentaires. Heureusement nous avons pu trouver récemment un contre-exemple, avec l'aide de notre professeur.

En effet notre professeur nous a expliqué qu'un chercheur a démontré qu'il existait dans l'ensemble des réels une infinité de fois plus d'irrationnels que de rationnels [NDLR : Renseignements pris, le chercheur s'appelait Cantor. Son résultat est que l'ensemble des irrationnels ne peut être mis en correspondance bijective avec celui des rationnels : « l'infinité » des irrationnels est « plus grande » que celle des rationnels. La propriété qui est utile ici est différente : il s'agit de la possibilité de construire une infinité de « copies » Q_1, Q_2, Q_3, … de l'ensemble Q des nombres rationnels (chaque Q_n est en correspondance bijective avec Q) de telle manière que les éléments de chaque Q_n soient irrationnels et que les ensembles Q_1, Q_2, Q_3, … soient mutuellement disjoints (= sans éléments communs) ; ainsi peut-on dire que les irrationnels contiennent une infinité de fois autant que les rationnels.]

Donc nous aurions :

$$P(\text{“rationnel”}) + P(\text{“irrationnel”}) = 1$$

d'où :

$$P(\text{“rationnel”}) + \infty \times P(\text{“rationnel”}) = 1$$

[NDLR : cette écriture est bien sûr symbolique et pourrait être mathématisée …]

d'où :

$$P(\text{“rationnel”}) = 0$$

Comme quoi il ne faut jamais se fier aux premières impressions ou intuitions :

La réciproque de notre théorème est donc fausse, car la probabilité que l'angle α soit un rationnel est égale à 0 bien qu'il existe une infinité de rationnels dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

Là où nous en sommes :

Ici s'achève notre recherche au jour présent. Mais nous sentons que nous ne sommes pas arrivés au bout du chemin. Nous aimerions maintenant démontrer par nous-mêmes qu'il existe une infinité de fois plus d'irrationnels que de rationnels dans un ensemble donné.

[NDLR : On notera que la démarche suivie ici rejoint la démarche “axiomatique” de définition des aires (comparer avec l'article « **mesure des surfaces** », pp. 193-195).

Des propriétés admises pour les probabilités d'évènements (chaque évènement est vu comme *un ensemble* d'évènements élémentaires) sont les suivantes :

(a) si $A \subset B$ alors $\text{Prob}(A) \leq \text{Prob}(B)$ [voir inclus]

(b) si A et B sont “isomorphes” (c'est-à-dire par exemple que B se déduit de A par une transformation bijective qui laisse invariant l'espace total des évènements), alors

$$\text{Prob}(A) = \text{Prob}(B)$$

(c) si A et B sont disjoints, ou si, plus généralement, $\text{Prob}(A \cap B) = 0$, alors

$$\text{Prob}(A \cup B) = \text{Prob}(A) + \text{Prob}(B).]$$

[NDLC : bijection ? bijective ?] [NDLR : une bijection, ou une correspondance bijective entre deux ensembles met en relation chaque élément de l'un avec un seul élément de l'autre. Dans une famille, on peut mettre en bijection les enfants avec leurs prénoms ; dans un ensemble de personnes plus grand (une classe), on peut mettre en correspondance bijective les personnes (les élèves) avec nom & prénom ; à l'échelle d'un pays comme la France, il risque d'y avoir des homonymies, et on met les habitants en bijection avec le numéro INSEE.] [NDLC : nous ne sommes pas des numéros !] [NDLR : non, mais on peut énumérer les habitants lors d'un recensement, il y a donc une *correspondance* bijective entre les habitants et les numéros … pas une *égalité*.]