tous les nombres peuvent-ils s'écrire sous forme de fractions ?

Par Mlle Agathe Lahousse (1°S), Mlle Anne-Laure Cadon (1°S), Mlle Aurélie Guihard (1°ES), élèves du **lycée Fragonard de l'Isle Adam (95)** et Mlle Sabrina Potier (TES), Mlle Leila Bendakhlia (2[nde]), élèves du **lycée Georges Braque d'Argenteuil (95)**

enseignantes :
Mmes Annick Boisseau, Joëlle Richard

chercheur :
M. Stéphane Labbé

coordination article : Potier Sabrina

compte-rendu de parrainage :

Il s'agit de chercher quels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme fractionnaire.
• il a été tout d'abord démontré que, comme $1/9 = 0{,}1111\ldots$ et que $9/9 = 1 = 9 \times 1/9 = 0{,}99999\ldots$ on peut considérer que $0{,}999999\ldots = 1$ peut donc s'écrire sous forme fractionnaire.
• Ensuite, il est montré que $\sqrt{2} \notin Q$ et que $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$ appartiennent à Q équivaut à $x = y^2$.
•Enfin, il est montré que parmi les réels, seuls les nombres décimaux et les nombres à décimales infinies périodiques sont fractionnaires.

Pour calculer, les Egyptiens utilisaient les nombres entiers et la division de l'unité en parties égales (fractions de la forme $1/n$). Peut-on tout calculer avec de telles fractions ? avec des fractions plus générales ?

Résumé.

Nous nous sommes intéressées au problème de savoir si tous les nombres pouvaient s'écrire sous une forme fractionnaire : nous aimons manier les nombres, et l'étude de leur nature ne se fait malheureusement pas dans l'enseignement secondaire.

Ce sujet nous interroge sur la façon d'écrire avec de simples chiffres certains nombres comme π (le rapport de la circonférence d'un cercle sur son diamètre) et $\sqrt{2}$ (la diagonale d'un carré de côté 1), que l'on rencontre dans la nature.

Existe-t-il d'autres nombres entre ceux que l'on sait écrire plus ou moins facilement ?

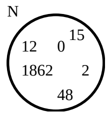
Introduction.

Dès notre plus jeune âge, nous manipulons des nombres, « des tout simples » pour apprendre à compter, des moins simples comme les fractions pour partager des gâteaux, et des mystérieux comme ce fameux « 3,14… » que l'on utilise sans état d'âme dans les calculs de circonférences, est-ce vraiment π ?

Ces nombres, même s'ils nous sont familiers, ne cachent-ils pas quelque secret derrière l'apparente facilité de leur utilisation ?

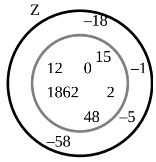
Ils ont peut-être diverses écritures possibles : tous les nombres peuvent-ils s'écrire sous forme de fractions ?

Les ensembles de nombres.



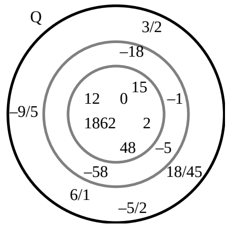
Les nombres sont regroupés en ensembles : le plus petit ensemble est celui des entiers naturels N, il contient [zéro et] tous les entiers positifs

(0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … 15 ; … 1578 ; …).



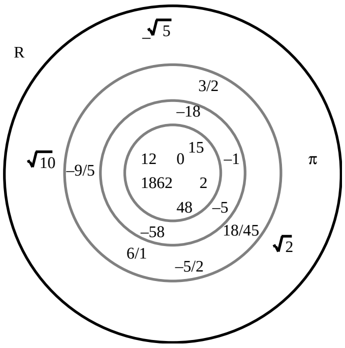
Cet ensemble est inclus **w** dans celui des entiers relatifs Z dans lequel se trouvent tous les nombres entiers, qu'ils soient positifs ou négatifs

(…–30 ; …;–3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ;…30 ; …).



Z est inclus dans l'ensemble des décimaux D qui contient également les nombres décimaux ayant une suite limitée de chiffres non tous nuls après la virgule

(… ; –3,2 ; … –2 ; … –1,572 ; … 0; … 1 ; … 2,3293 ; …).



D est inclus dans Q, l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire les nombres pouvant s'écrire sous forme de fraction de nombres entiers

$$(\ldots;\frac{23}{1};\frac{-3}{4};\frac{-10}{9};0;\frac{15}{17};\ldots)$$

Q est inclus dans l'ensemble des réels R qui, aux rationnels, ajoute des nombres ayant une écriture décimale infinie :

$$\pi\ ;\ \frac{3}{4};\sqrt{2};0;\frac{-18}{25};-\sqrt{15};\frac{79}{2};\ldots.$$

Etude des racines carrées.

Racines de nombres entiers.

❖ L'**exemple** de $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ peut-il s'écrire sous forme de fraction de nombres entiers ?

réponse : non ; démonstration par l'absurde… P et Q appartiennent à Z, $Q \neq 0$.

Si $\sqrt{2} = P/Q$ alors $2 = P^2/Q^2$

$$P^2 = 2Q^2$$
$$P \times P = 2Q^2$$

Donc P comporte au moins un 2 dans sa décomposition en facteurs premiers :

$$P = 2^{\alpha} \times \ldots$$
$$P^2 = 2^{2\alpha} \times \ldots$$
(α appartient à N – {0}).

L'égalité $P^2 = 2Q^2$ devient :

$$2^{2\alpha} \times \ldots = 2Q^2$$
$$2^{2\alpha-1} \times \ldots = Q^2$$

Q comporte au moins un 2 dans sa décomposition en facteurs premiers :

$$Q = 2^{\beta} \times \ldots$$
$$Q^2 = 2^{2\beta} \times \ldots$$
(β appartient à N – {0}).

$P^2 = 2Q^2$ devient :

$$2^{2\alpha} \times \ldots = 2 \times 2^{2\beta} \times \ldots$$
$$2^{2\alpha} \times \ldots = 2^{2\beta+1} \times \ldots$$
$$2^{\text{exposant pair}} \times \ldots = 2^{\text{exposant impair}} \times \ldots$$
… impossible.

$\sqrt{2}$ ne peut donc pas s'écrire sous forme de fraction.

❖ **Généralisation** : racine d'un nombre n qui appartient à N et n'est pas un carré parfait dans N. [NDLR : les élèves proposent ici une démonstration calquée sur la précédente, qui convient bien si n est un nombre premier, mais plus pour $n = 12$ par exemple.]

Si $\sqrt{n} = P/Q$ alors $n = P^2/Q^2$

$$P^2 = nQ^2.$$

P doit avoir au moins un n dans sa décomposition. [NDLR : c'est ici que $n = 12$ pose problème. Que $P^2 = 12Q^2$ ne prouve pas que 12 figure dans la décomposition en facteurs premiers de P ; par contre, 2 et 3 figurant dans la décomposition en facteurs premiers de P^2, figurent aussi dans celle de P. C'est un théorème d'arithmétique : si un nombre premier, par exemple ici 2 ou 3 mais pas 12, divise un produit de nombres, ici $P \times P$, alors ce nombre premier divise l'un des nombres du produit, donc ici forcément P. Si on suppose n premier, ce qui suit est correct.]

$$P = n^{\alpha} \times \ldots$$
$$P^2 = n^{2\alpha} \times \ldots$$
(α appartient à N – {0}).

L'égalité $P^2 = nQ^2$ devient :

$$n^{2\alpha} \times \ldots = nQ^2$$
$$n^{2\alpha-1} \times \ldots = Q^2$$

Q comporte au moins un n dans sa décomposition.

$$Q = n^{\beta} \times \ldots$$
$$Q^2 = n^{2\beta} \times \ldots$$
(β appartient à N – {0}).

$P^2 = nQ^2$ devient :

$$n^{2\alpha} \times \ldots = n \times n^{2\beta} \times \ldots$$
$$n^{2\alpha} \times \ldots = n^{2\beta+1} \times \ldots$$
$$n^{\text{exposant pair}} \times \ldots = n^{\text{exposant impair}} \times \ldots$$

… impossible. $\sqrt{n}$ n'appartient pas à Q lorsque n n'est pas un carré parfait. [NDLR : le résultat est juste ; mais la démonstration est à adapter au cas où n n'est pas un nombre premier.]

Racines de rationnels.

❖ Exemple : $\sqrt{\frac{3}{2}}$ peut-il s'écrire sous forme de fraction de nombres entiers ?

réponse : non ; démonstration par l'absurde…

si $\sqrt{\frac{3}{2}} = P/Q$ alors $3/2 = P^2/Q^2$

$$P^2 = (3/2)\,Q^2$$
$$2P^2 = 3Q^2$$

Q comporte au moins un 2 dans sa décomposition en facteurs premiers :

$$Q = 2^{\alpha} \times \dots$$
$$Q^2 = 2^{2\alpha} \times \dots$$
(α appartient à N – {0}).

$2P^2 = 3Q^2$ devient : $2P^2 = 3 \times 2^{2\alpha} \times \dots$

P comporte au moins un 2 dans sa décomposition en facteurs premiers :

$$P = 2^{\beta} \times \dots$$
$$P^2 = 2^{2\beta} \times \dots$$
(β appartient à N – {0}).

L'égalité $2P^2 = 3Q^2$ devient :

$$2 \times 2^{2\beta} \times \dots = 3 \times 2^{2\alpha} \times \dots$$
$$2^{2\beta+1} \times \dots = 3 \times 2^{2\alpha} \times \dots$$
$$2^{\text{exposant impair}} \times \dots = 3 \times 2^{\text{exposant pair}} \times \dots$$
… impossible.

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ ne peut donc pas s'écrire sous forme de fraction de nombres entiers.

❖ [NDLR : la généralisation au cas de la racine d'une fraction qui n'est pas un carré parfait dans Q pose les mêmes problèmes que dans N lorsqu'on écrit les décompositions en facteurs premiers … même si les élèves traitent le cas de a/b où a et b sont des nombres premiers entre eux, c'est-à-dire que a/b n'est pas réductible.

Car le cas $a = 3$ et $b = 2$ se généralise facilement à a premier et b premier ; mais le fait que a et b soient des *nombres premiers entre eux* n'empêche pas que l'un ou l'autre (ou les deux) aient des facteurs avec exposant supérieur à 1 dans leur décomposition (exemple : 27/8). Laissons ouvert le problème de cette généralisation.]

Racine d'un carré parfait.

[NDLR : un énoncé assez obscur dans le manuscrit nous paraît pouvoir être restitué comme suit :]

Théorème :

Quelque soit x, réel positif, les nombres

$\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$ sont des rationnels

si et seulement si

x est un rationnel de la forme y^2,
où y est un rationnel.

Démonstration :

• Si $x = y^2$ alors $x = P^2/Q^2$ donc

$$\sqrt{x} = P/Q \text{ et } -\sqrt{x} = -P/Q$$

Donc $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$ appartiennent à Q.

• Réciproque :

$\sqrt{x}$ appartient à Q ssi $\sqrt{x} = P/Q$

$$x = P^2/Q^2$$

$-\sqrt{x}$ appartient à Q ssi $-\sqrt{x} = P/Q$

$$x = (-\sqrt{x})(-\sqrt{x}) = P^2/Q^2.$$

donc $x = y^2$.

Les décimaux illimités.

Un cas particulier.

Au fil de nos recherches nous avons remarqué un cas particulier qui concerne tous les entiers. On sait que :

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111111\ldots$$

et que :

$$9 \times \frac{1}{9} = 0{,}9999999\ldots$$

Or : $\frac{9}{9} = 1$ donc $0{,}9999999\ldots = 1$. Donc :

$$1 = 1{,}00000\ldots = 0{,}99999\ldots$$

De plus, pour tout entier n, on a : $n = n \times 1$. On peut donc dire que chaque nombre entier a deux écritures décimales illimitées. Un entier s'écrit toujours sous la forme d'une fraction, exemple :

$$n = \frac{n}{1}$$

Une écriture décimale pour ce nombre est $n{,}0000000\ldots$ ou bien $(n-1){,}99999\ldots$

Les écritures décimales.

Ce qu'on appelle couramment un décimal, par exemple 5,27, est un nombre dont la partie décimale est formée d'un nombre limité de chiffres non tous nuls. Ce nombre s'écrit aussi sous la forme fractionnaire

$$5{,}27 = \frac{527}{100}$$

Son écriture décimale est aussi 5,27000… Mais nous savons que certains nombres ont des écritures décimales illimitées dans lesquelles n'apparaissent pas que des zéros. Exemples : 2,345454545…
70,145327034568…

Dans le premier cas on voit apparaître une séquence « 45 » qui se répète. Nous l'appellerons période. Dans le second cas, les chiffres semblent se succéder de manière totalement aléatoire, on ne voit pas apparaître de période.

Nombres à suite décimale illimitée.

Intéressons-nous aux nombres représentés par une suite décimale illimitée. Nous distinguerons ceux qui ont une suite décimale illimitée périodique (la période n'étant pas constituée uniquement de 0) et ceux qui ont une suite de chiffres illimitée non périodique. Nous désignerons les premiers par : nombres de type SDIP et les seconds par : nombres de type SDINP.

Pour chacun d'eux, posons-nous la question :

« Est-il ou non rationnel ?»

Commençons par les nombres de type SDIP.

Tout nombre de type SDIP est-il rationnel ?

Soit donc un décimal avec une séquence qui se répète. Exemple : $Y = 43{,}525252\ldots$ On multiplie par 10^2.

$$10^2Y = 4352{,}52525252\ldots$$
$$Y - 10^2Y = 43{,}52525252\ldots - 4352{,}525252\ldots$$
$$Y - 10^2Y = -4309$$
$$Y = -4309/(1 - 10^2)$$
$$Y = 4309/99$$

Donc c'est bien un rationnel.

Cas général (ou presque car nous n'avons pris que 3 chiffres dans la période).

$Y = x,\ abc\ abc\ abc\ abc\ \ldots$
$10^3.(Y) = xabc,\ abc\ abc\ abc\ \ldots$
$Y - 10^3.Y = (x - xabc),000\ldots$
$Y - 10^3\ Y = x - xabc$
$Y\,(1 - 10^3) = x - xabc$

$Y = (x - xabc)/(1-10^3)$

$x - xabc$ et $1-10^3$ sont des entiers donc Y est un rationnel. Si on désigne par

Q : ensemble des rationnels
P : ensemble de nombres de type SDIP

$$\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$$

Tout nombre de type SDIP est un rationnel.

Inversement, **tout rationnel est-il de type SDIP ? C'est-à-dire tout élément de Q appartient-il à P ?**

Exemple : le nombre 38/7 a-t-il une suite décimale illimitée périodique ?

Si on divise 38 par 7, on a : $38 = 7 \times 5 + 3$

$$\begin{array}{l|l} 38 & 7 \\ \hline \;30 & 5{,}4285714 \\ \;\;20 & \\ \;\;\;60 & \\ \;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;2 & \end{array}$$

On peut écrire successivement :

$$3 \times 10 = 7 \times 4 + 2$$
$$2 \times 10 = 7 \times 2 + 6$$
$$6 \times 10 = 7 \times 8 + 4$$
$$4 \times 10 = 7 \times 5 + 5$$
$$5 \times 10 = 7 \times 7 + 1$$
$$1 \times 10 = 7 \times 1 + 3$$

puis on retrouve :

$$3 \times 10 = 7 \times 4 + 2$$

$38/7 = 5{,}428571\ 428571$

Cas général : On divise p par q (p et q sont des entiers relatifs, $q \neq 0$). Sans restreindre la généralité, on peut choisir : $p < q$.

On sait que $p = q \times n + r_1$ avec $r_1 < q$.

$$10 \times r_1 = q \times a + r_2$$
$$10 \times r_2 = q \times b + r_3$$
$$10 \times r_3 = q \times c + r_4$$

Nous avons tout au plus $q - 1$ restes : r_1, r_2, r_3, r_4, … Après $q - 1$ opérations au plus, on retrouve un des restes précédents, donc aussi la même séquence de chiffres de la partie décimale du quotient.

Nous avons ainsi démontré que tout rationnel a bien une écriture décimale illimitée périodique. On peut donc écrire $\mathrm{Q} \subset \mathrm{P}$; comme nous avions déjà $\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$, nous pouvons conclure :

☞ **P = Q.**

Nous allons poursuivre avec les nombres de type SDINP, c'est-à-dire ceux dont la partie décimale est une suite illimitée non périodique. Essayons d'abord de répondre à la question : **entre deux rationnels même très proches, y a-t-il toujours un rationnel ?**

Prenons un exemple. Ecrivons un rationnel :

a = 4,372468 372468 372468 372468 372468 …

• ajoutons-lui 10^{-25}, c'est-à-dire :

0,000000 000000 000000 000000 1

• on obtient le rationnel :

b = 4,372468 372468 372468 472468 372468 …

C'est bien un rationnel car la séquence "372468" se reproduit dès le 31ème rang.

$b - a = 10^{-25}$; a et b sont deux rationnels "assez" proches. Si on ajoute à "a" une puissance de dix très petite, 10^{-m}, on obtient un autre rationnel encore plus proche de a.

Entre a et b qui sont des rationnels déjà proches, on peut insérer tous les rationnels de la forme $a + 10^{-m}$ (m entier naturel).

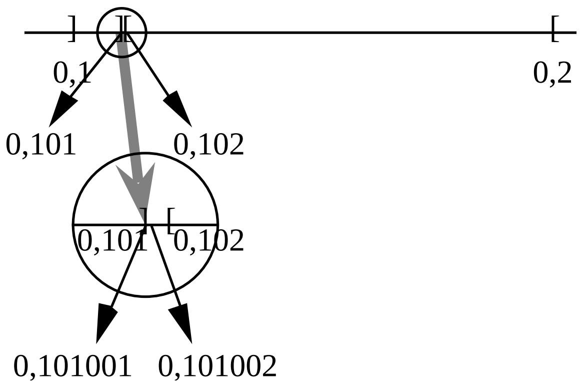
Cela signifie que **des rationnels, il y en a beaucoup**, il y en a même une infinité. Mais entre 2 rationnels même très proches, y a-t-il un trou, une lacune, dans lequel on peut mettre autre chose ?

Vers les irrationnels.

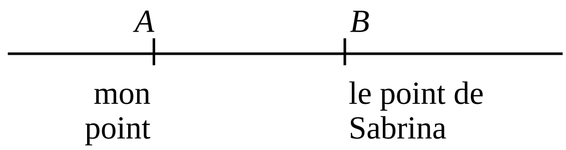
Il est tout à fait possible d'écrire ou de fabriquer un nombre dont la partie décimale est une suite illimitée non périodique, tout en lui gardant une certaine régularité. Nous empruntons l'exemple à Rozsa Péter dans JEUX AVEC L'INFINI (Editions du seuil) : x = 0,10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000 1… Un tel nombre n'est pas rationnel puisque par sa formation, on voit que la suite ne peut avoir de période, les chiffres 1 n'étant jamais à des intervalles égaux. Nous remarquons que :

$$0{,}1 < x < 0{,}2$$
$$0{,}101 < x < 0{,}102$$
$$0{,}101001 < x < 0{,}101002$$
$$\dots$$

On peut faire la représentation suivante en emboîtant les intervalles :



On peut continuer à emboîter indéfiniment ces intervalles. Le dernier intervalle trouvé est commun à tous. On peut démontrer, comme l'a fait Rozsa Péter, qu'**il n'y a qu'un seul point appartenant à tous ces intervalles**. Supposons que moi, Leïla, j'aie trouvé un tel point. Sabrina me contredit et prétend en avoir trouvé un autre, lui aussi commun à tous les intervalles :



La distance entre ces 2 points peut être très petite. Supposons qu'elle soit 1/1000000. Or, la longueur des intervalles emboîtés tend vers zéro, donc il arrivera un moment où elle sera inférieure à 1/1000000, par exemple, 1/2000000.

Donc si A est dans le dernier intervalle, B ne peut pas s'y trouver. Il ne peut pas être non plus dans les intervalles suivants. Il ne peut donc être commun à tous les intervalles. **Mon point A est donc le seul**.

A ce point ne correspond aucun nombre parmi les rationnels. Si nous essayons de mesurer la distance du point 0 au point A, nous ne pouvons trouver ni un nombre entier ni un nombre fractionnaire. Nous pouvons écrire ce nombre sous la forme 0,1010010001000010000001…

☞ On dira que ce nombre est **irrationnel**.

Comment trouver un rationnel entre deux irrationnels ?

Soient deux nombres non périodiques et appartenant à R tels que $x < y$. Il existe une infinité de nombres entre x et y. Pour trouver un nombre décimal illimité et périodique n appartenant à l'intervalle $]x\,;\,y[$, on doit procéder en trois étapes.

♦ Tout d'abord on doit déterminer à partir de quel chiffre les nombres x et y se différencient pour la première fois.

Exemple 1:

$x = 3{,}\underline{1}0100100010000100000100\ldots$
$y = 3{,}\underline{3}72337233772337722333772\ldots$

La première différence remarquable entre ces deux nombres se situe au niveau des dixièmes.

♦ Une fois cette “ première différence ” repérée, on peut modifier un chiffre de x ou y, au niveau de la différence ou après.

♦ On peut alors apposer une période derrière le chiffre modifié afin d'obtenir un nombre périodique. Lors de ces deux dernières étapes on doit prêter attention au fait que le nombre périodique ainsi construit appartient bien à l'intervalle $]x\,;\,y[$. Si l'on reprend notre premier exemple on pourrait ainsi déterminer les nombres périodiques n_1, n_2, n_3, proposés mais aussi bien d'autres encore.

$n_1 = 3{,}1111111\ldots$
$n_2 = 3{,}234234234\ldots$
$n_3 = 3{,}372182182182\ldots$

Dans ces trois cas n appartient à l'intervalle $]x\,;\,y[$. On peut appliquer cette méthode à n'importe quels nombres x et y respectant la condition initiale. Voici un second exemple.

Exemple 2 :

$x = 121{,}12468532\underline{1}49224922449222\ldots$
$y = 121{,}12468532\underline{3}1024886886688666\ldots$
$n_1 = 121{,}124685321249522222\ldots$
$n_2 = 121{,}124685322013013013\ldots$
$n_3 = 121{,}1246853231004004004\ldots$
Dans ces trois cas n appartient à l'intervalle $]x\,;\,y[$.

Conclusion.

Les résultats de notre recherche nous permettent de dire que seuls les nombres pouvant s'écrire avec une suite décimale illimitée périodique possèdent une écriture fractionnaire : c'est l'ensemble des rationnels. Parmi ces nombres, on trouve les entiers et les racines de carrés parfaits.

D'autre part les nombres à écriture fractionnaire sont répartis dans l'ensemble des réels. En effet entre deux réels non rationnels on peut toujours trouver un nombre fractionnaire et entre deux nombres rationnels, même très proches, on peut trouver un rationnel mais aussi un irrationnel.

Nous pensons avoir éclairé le sujet tel qu'il nous a été proposé, et espérons être en mesure de répondre à vos éventuelles questions.

[NDLR : pour des termes tels que *inclus*, *premier*, *facteurs premiers*, etc, voir le *glossaire* en fin de brochure, page 311.]