1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181 …

# suites de Fibonacci

par Renaud Richard, Gregory Kron, Pierre-Henri Desportes, Mathieu Verlier, Bertrand Bourcier, Grégoire de Loubens, Benjamin Sevin, Julien Codron, élèves de 1°S des lycées La Fontaine et Buffon de Paris

enseignants : Mmes et MM. Biscarat, Gaudemet, Lattuati et Moscovici.

chercheur : M. Gilles Godefroy.

sujet :

Suite de Fibonacci :

$$x_0 = 0\ ,\ x_1 = 1 \text{ et } x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

avec $n$ dans N.

Montrer que si $n$ divise $k$, alors $x_n$ divise $x_k$.

Montrer que pour que $x_{np}$ soit premier, il faut que $p$ soit premier. Trouver la proportion des $x_p$ ($p$ premier) qui sont des nombres premiers.

[NDLR : certaines preuves données par les élèves auraient dû être émaillées de quelques rectifications ; nous avons préféré ne pas les donner plutôt que de risquer d'obtenir un résultat peu homogène et sans doute pas très éclairant pour le lecteur.]

Leonardo Fibonacci, dit Léonard de Pise, était un mathématicien et homme d'affaires italien (1175-1240). Il importait les épices d'Orient et en même temps les connaissances mathématiques.

La suite de Fibonacci est une suite de nombres, notés $F_n$, qui se calculent de la façon suivante :

- le premier nombre, $F_1$, est égal à 1,
- le deuxième nombre, $F_2$, est égal à 1,
- le troisième nombre, $F_3$, est égal à la somme de $F_1$ et de $F_2$ : $F_3 = 1 + 1 = 2$
- $F_4$ est égal à $F_2 + F_3$, donc $F_4 = 1 + 2 = 3$
- $F_5 = F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5$
- $F_6 = F_4 + F_5 = 3 + 5 = 8$
- de la même façon, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$ … De façon générale :

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1 \text{ et } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Nous présentons quelques-unes des très nombreuses propriétés de cette suite.

***aspects arithmétiques***

**Proposition 1** : Deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.

**Preuve** : Admettons que deux termes consécutifs admettent un diviseur commun $d$, alors par la relation de double récurrence de la suite, le terme précédent admet aussi $d$ pour diviseur. En effet :

$$\begin{aligned} &F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \\ \Leftrightarrow\ & d \times a = d \times b + F_{n-1} \\ \Leftrightarrow\ & F_{n-1} = d \times (a - b). \end{aligned}$$

En réitérant cette opération, on démontre que tous les termes précédents sont divisibles par $d$ donc en particulier $F_2 = 1$. Or 1 n'est divisible que par lui-même. $d$ ne peut donc être que 1, et par là-même, deux termes consécutifs sont premiers entre eux. c.q.f.d.

**Formule utile :**

$$F_n = F_p \times F_{n-p+1} + F_{p-1} \times F_{n-p}$$

pour tout $n$ et tout $p$ de N* tels que $p \leq n$.

**Proposition 2** : $F_p$ divise $F_n$ si et seulement si $p$ divise $n$.

**Preuve** : [Il suffit de la donner pour $p \neq n$ ; la démonstration se fait en deux étapes.]
• Si $p$ divise $n$, $F_p$ divise $F_n$ ?

Si $p$ divise $n$, $p < n$ et $kp = n$ d'où, d'après la “formule utile”,

$$\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{kp} = F_p \times F_{(k-1)p+1} + F_{p-1} \times F_{(k-1)p}$$

soit :

$$F_n = F_p \times F_{(k-1)p+1} + F_{p-1} \times (F_p \times F_{(k-2)p+1} + F_{p-1} \times F_{(k-2)p})$$

et ainsi de suite, on réitère la même opération sur le dernier terme $F_{(k-a)p}$ jusqu'à obtenir $F_p$. On peut alors mettre $F_p$ en facteur dans $F_n$.

• Réciproque :

si $F_p$ divise $F_n$, alors $p$ divise $n$ ?

1°) d'après la “formule utile”,

$$F_{a+b} = F_b \times F_{a+1} + F_{b-1} \times F_a$$

d'où $F_{a+b} \wedge F_a = F_a \wedge F_b$. [NDLC : $n \wedge m$ désigne le plus grand diviseur commun aux deux nombres $n$ et $m$.] En effet, soit $d$ un diviseur commun à $F_{a+b}$ et à $F_a$. Nécessairement $F_b$ admet aussi $d$ comme diviseur car $F_{a+1}$ et $F_a$ sont premiers entre eux et donc $F_{a+1}$ ne peut admettre $d$ pour diviseur. [NDLR : ainsi, tout diviseur commun à $F_{a+b}$ et à $F_a$ divise aussi $F_a$ et $F_b$ ; reste à voir qu'un diviseur de $F_a$ et $F_b$ divise forcément $F_{a+b}$ et $F_a$ …]

2°) $n = pq + r$ donc $p$ divise $n$ ssi $r = 0$.

[On suppose $r = 0$ et on utilise la formule $F_{a+b} \wedge F_a = F_a \wedge F_b$. avec $a = r$ et $b = qp$, et donc $a + b = pq + r = n$ :]

$$F_n \wedge F_p = F_r \wedge F_{qp}$$

Or, $F_p$ divise $F_n$ donc $F_n \wedge F_p = F_p$. On a alors $F_r \wedge F_{qp} = F_p$, donc $r < p$ et $F_p$ divise $F_r$ [mais $F_p$ est supérieur à $F_r$] d'où contradiction. Donc $r = 0$ et : $p$ divise $n$.

**Corollaire** : Si $F_n$ est premier, alors ***n* = 4** ou ***n* est premier**.

**Cependant** la réciproque est fausse : en effet 37 est premier mais $F_{37} = 24157817$ est divisible par 73. [NDLR : lequel 73 ne peut donc pas être un $F_a$, bien sûr.]

Si l'on considère la division euclidienne par $n$, $n \in \mathrm{N}$, $A'$ désigne l'ensemble des nombres admettant le même reste que $A$ dans la division euclidienne par $n$.

[NDLR : Les élèves démontrent le résultat suivant …]

Pour tout $A$ et $B$ de N, $A' + B' = (A + B)'$

[NDLR, suite : … c'est, avec d'autres notations, un des résultats décrits page 148, à laquelle nous renvoyons le lecteur.]

Dans la suite de Fibonacci, on a donc :

$$(F_{n-1} + F_{n-2})' = F_{n-1}' + F_{n-2}'$$

soit :

$$F_n' = F_{n-1}' + F_{n-2}' \quad (*).$$

**Proposition 3 :** Soit $d \in \mathrm{Z}$, il existe une infinité de termes de la suite de Fibonacci divisibles par $d$.

**Preuve :** Il existe $d$ restes possibles si l'on considère la division euclidienne par $d$. Donc, si l'on considère les couples d'ensembles de type $(F_n', F_{n+1}')$, il existe $d^2$ couples distincts. Or, il existe une infinité de termes dans la suite $(F_n)$,il y a donc répétition d'au moins un couple dans les $d^2 + 1$ premiers couples.

Soit $(F_p', F_{p+1}')$ le premier couple à se répéter et soit $(F_n', F_{n+1}')$ le couple qu'il répète. Supposons que ce premier couple à se répéter soit différent de (0, 1), on a :

$$F_p' = F_n' \text{ et } F_{p+1}' = F_{n+1}'$$

donc

$$F_{p+1}' - F_p' = F_{n+1}' - F_n'$$

donc, d'après (*) : $F_{p-1}' = F_{n-1}'$. Il y a donc répétition de $(F_{p-1}', F_p')$ donc le couple $(F_p', F_{p+1}')$ n'est pas le premier à se répéter, ce qui contredit l'hypothèse.

L'hypothèse etait donc fausse et le premier couple à se répéter est le couple : (0, 1). Il y a donc un multiple de $d$ dans les $d^2 + 1$ premiers termes de la suite de Fibonacci et, d'après la **propriété 2** [NDLC : ce qui suit est à lire en retenant sa respiration …] il y a une infinité de multiples de $d$ correspondant aux indices multiples de l'indice du premier multiple de $d$.

***aspects asymptotiques***

[NDLR : les élèves donnent ici de façon un peu abrupte quelques résultats classiques ; pour plus de détails sur ces résultats, le lecteur pourra consulter avec profit la partie *Suites récurrentes* de l'excellent petit livre :
A. I. Markouchévitch, *Quatre cours de mathématiques*, Editions Mir, © Moscou 1973.]

Formule de Binet :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Dans la formule de Binet, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, donc $F_n$ est à l'infini équivalent à $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

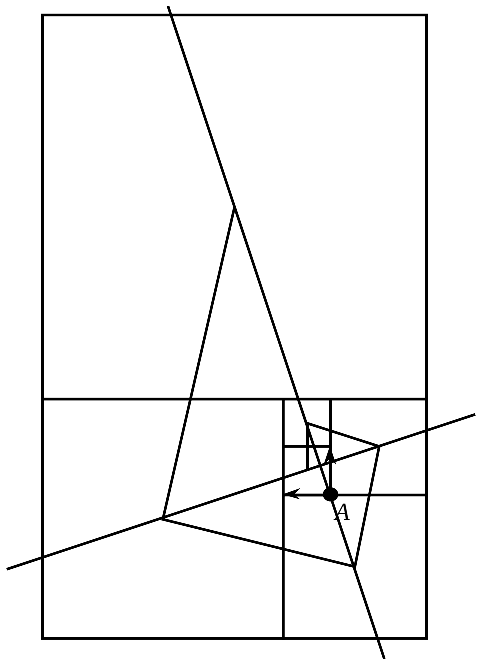
Le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci a pour limite à l'infini $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est le nombre d'or.

***la spirale***

On prend, au départ, deux carrés de côté 1. On forme, ensuite, un carré de côté = la somme des deux carrés précédents. On a ainsi construit 6 carrés. On relie ensuite les centres des carrés successifs. On obtient, alors, une spirale. Finalement, on relie les centres des carrés “alignés”. Cette figure est une représentation de la suite de Fibonacci. Effectivement, la longueur du côté du $n^{\text{ème}}$ carré est égale à la somme des deux précédentes soit : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ avec $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ce qui est aussi la relation de récurrence de la suite de Fibonacci.

Pour travailler sur cette figure, on a pris un repère orthonormé. On a pu ainsi remarquer que l'angle θ qui séparait deux droites reliant les milieux de carrés successifs tendait vers π/2. Pour démontrer cela, on a pris les coordonnées de ces vecteurs ; soit $O_n$ le centre du $n^{\text{ème}}$ carré, on a : $O_1(1/2, 1/2)$ ; $O_2(3/2, 1/2)$ ; $O_3(1, -1)$ ; $O_4(-3/2, -1/2)$ ; … On calcule donc $\angle O_3O_4,O_4O_5$ puis $\angle O_4O_5,O_5O_6$ et ainsi de suite … De là, on remarque que l'angle θ tend vers π/2 quand $n$ croit.

On remarque aussi, que *les centres des carrés sont alignés alternativement* sur *deux droites*. On a vérifié pour les neuf premiers carrés que les points étaient effectivement alignés sur deux droites d'équations respectives : $x - 3y = 0$ et $3x + y + 2 = 0$. On démontre que ces deux droites sont perpendiculaires. Nous avons tenté sans succès de généraliser ces propriétés.




Par contre, on déduit facilement de la figure ci-avant que l'on a :

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 \ldots + F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$$

… la somme des aires des différents carrés est égale au produit du côté correspondant au $n^{\text{ème}}$ carré et de celui du suivant.

***Les rencontres avec la suite de Fibonacci dans la vie plus courante.***

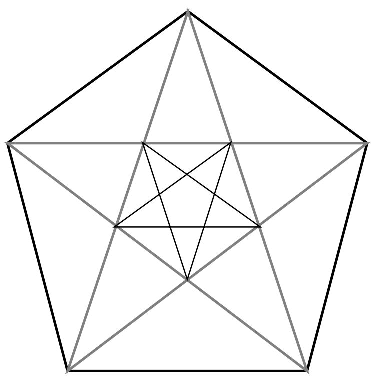
On peut retrouver la suite de Fibonnaci un peu partout dans la vie courante.

**Les plantes** … Que ce soit dans leur croissance ou dans leur répartition spatiale on retrouve la suite de Fibonnaci dans presque toutes les plantes.

**Le tournesol** … Dans le cœur du tournesol, on a des spirales dans deux sens, l'un dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre dans l'autre. En comptant le nombre de spirales dans un sens et dans l'autre, on s'aperçoit de quelque chose de très surprenant : tout d'abord, on n'a pas le même nombre de spirales dans les deux sens. Et ces deux nombres, sont deux nombres consécutifs de la suite de Fibonnaci. Sur les tournesols, on dénombre 21 et 34 spirales. Sur l'ananas, on retrouve aussi des spirales qui sont en général au nombre de 3 et 5. Il en est de même pour la plupart des plantes. Notre groupe l'a, ainsi, vérifié sur les tulipes, les roses, les pommes de pin.

**Les fleurs** … Sur la plupart des fleurs, l'angle entre deux pétales successifs sur la tige est égal à $(\varphi - 1) \times 360°$ où $\varphi$ est le nombre d'or.

**Les bâtiments** … La plupart des bâtiments moyenâgeux sont construit selon le plan d'un rectangle dont la longueur vaut deux fois la largeur. En considérant alors la diagonale plus la largeur, le tout divisé par deux, on s'aperçoit alors que cela vaut le nombre d'or. C'est le cas de la cathédrale de Chartres.



Le Pentagone … On retrouve encore de nombreuses fois le nombre d'or et par conséquent la suite de Fibonacci dans le pentagone. A partir d'un pentagone régulier étoilé, on trace un autre convexe, puis un étoilé, etc.

Dans un pentagone régulier étoilé, on démontre que, par exemple, le rapport de la branche de l'étoile sur le côté est $1/(2\cos 72°) \approx 1.61803398875 \approx \varphi$. On en déduit que l'on passe d'un pentagone au suivant par une rotation de centre celui du pentagone, d'angle $\pi/5$, et un agrandissement de facteur $\varphi^2$. Ainsi, à partir du pentagone central, le prochain aura un côté de longueur $\varphi^2$ plus grande, sautant un terme de la suite de Fibonacci à chaque fois ; par exemple : avec 1 au centre, ensuite environ 3, 8, 13, 34 …

**Le triangle de Pascal** … est construit selon un principe simple. Chaque terme est égal à la somme du terme situé au-dessus de lui et celui à gauche de ce dernier.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | M1 | M1 | | | | |
| 0 | 1 | | M2 | M3 | | | |
| 0 | 1 | 1 | | M5 | M8 | | |
| 0 | **1** | **2** | 1 | | M13 | M21 | |
| 0 | 1 | **3** | 3 | 1 | | M**34** | M55 |
| 0 | 1 | 4 | 6 | 4 | **1** | | M89 |
| 0 | 1 | 5 | 10 | **10** | 5 | 1 | |
| 0 | 1 | 6 | **15** | 20 | 15 | 6 | |
| 0 | 1 | **7** | 21 | 35 | 35 | 21 | |
| 0 | **1** | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | |
| **0** | 1 | 9 | 36 | 84 | … | … | |
| 0 | 1 | 10 | … | … | | | |
| 0 | 1 | … | | | | | |

Si l'on additionne les nombres de chaque diagonale on s'aperçoit ainsi que la suite formée par ces sommes est la suite de Fibonacci. Ce qui est facilement démontrable : effectivement chaque diagonale est la somme des deux précédentes. D'après la propriété du Triangle de Pascal, cela est vérifié pour toutes les diagonales du triangle.

**Problèmes résolus par les élèves laissés à la réflexion du lecteur :**

• Soit l'ensemble composé des $n$ nombres entiers consécutifs allant de 1 à $n$. Combien de sous-ensembles peut-on former sans qu'ils contiennent deux nombres consécutifs ?

• $n$ est un naturel non nul, combien de listes composées uniquement de 1 et de 2 peut-on fabriquer telle que la somme de leurs termes soit égale à $n$ ?