

# polyèdres et formule d'Euler

par ... Deug A, Université de Marseille II

enseignants et chercheurs : MM. Pierre Arnoux et Christian Mauduit

Au départ de notre projet, la relation entre les polyèdres et les graphes nous a semblé évidente. Un polyèdre se définissant à nos yeux comme une intersection de plans dans l'espace, il semblait logique, comme le montre l'exemple du tétraèdre, qu'un polyèdre une fois aplati, avec certaines précautions, représente un graphe.

Mais un nouvel objet, "le cadre", ne correspondait plus à ce que nous avons défini comme polyèdres. Il n'obéissait plus aux mêmes règles. De ce fait, de nouveaux problèmes sont apparus. Il a fallu redéfinir les propriétés sur les graphes et surtout classer les polyèdres. De ces problèmes, beaucoup de questions ont surgi, ce qui a abouti à notre projet. Les résultats, bien qu'incomplets, sont rendus dans les pages suivantes.

[NDLR : ce long article est un témoignage intéressant sur un moment dans un travail de recherche où les idées voisinent avec les outils du cours ; idées fraîches, cours récent, il aurait été passionnant de voir se concrétiser ce travail lors du moment fort que représente le congrès MATH.en.JEANS ; mais les étudiant-e-s de Marseille commençaient alors leur activité de recherche, qui se déroule au second semestre universitaire.]

## *sommaire de l'article*[-fleuve, NDLC]

p. 64 relation entre degrés, arêtes et sommets

p. 65 formule :  $\sum \deg S_i = 2A$

- démonstration
- exemples illustrant cette formule

p. 66 relation entre faces, arêtes et sommets

- apparition de la formule d'Euler
- première "démonstration"

Comment compter le nombre de faces de polyèdres simples autrement ? (p. 67)

p. 68 est-ce que tout squelette de polyèdres est planaire ?

p. 68 quelles sont les propriétés sur l'union de graphes planaires ?

p. 70 récapitulatif et formule

p. 71 introduction aux polyèdres platoniciens

p. 73 démonstrations de la relation d'Euler :

- à partir du nombre cyclomatique (p. 73)
- à partir du cours (p. 77)

p. 78 évaluation de la caractéristique d'Euler dans le cas :

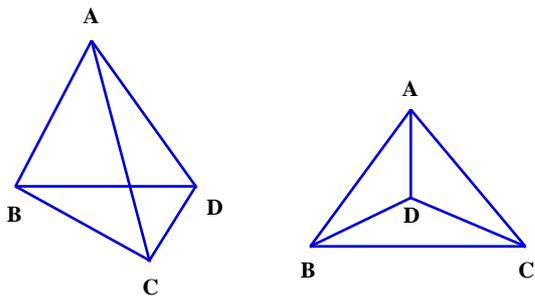
- collé par arêtes (p. 78)
- collé par sommets (p. 81)

p. 81 le cubicuboctaèdre (petit)

---

Note : pour les mots suivis d'une astérisque \* on trouvera des définitions en fin d'article (p. 82). [NDLR : voir aussi le glossaire ...]

*relation entre degré, arêtes et sommets*



Commençons par le polyèdre le plus simple : le tétraèdre. Nous allons travailler à partir d'un graphe ; il faut donc mettre le tétraèdre sous forme de graphe planaire\*. Pour cela, il suffit de l'aplatir, c'est-à-dire "d'écraser" son sommet  $A$  sur la base du polyèdre (voir figures ci-dessus). [NDLR : pour ne pas superposer deux faces, il est utile "d'ouvrir" le polyèdre avant de "l'écraser" : on supprime la face  $ABC$ , on écrase  $D$  dans l'ancien emplacement de la face  $ABC$  ; dans le graphe planaire, la face  $ABC$  se retrouve comme "face infinie", extérieure au polygone  $ABC$ .] [voir l'article précédent, pages 55 à 62]

[NDLR : la "matrice" ci-contre est simplement un tableau, dans lequel un "1" indique la présence d'une arête entre les deux sommets concernés, et un "0" indique l'absence d'arête.

Ainsi, la case de la colonne "B" et de la ligne "C" contient un "1" pour indiquer qu'il y a bien une arête entre les sommets  $B$  et  $C$ .]

**Cherchons une relation entre le degré et les arêtes.**

Considérons un tétraèdre  $A, B, C, D$  dont chacun des sommets est de degré 3. Comptons le nombre d'arêtes. Chaque sommet "part" avec un degré 3. Une arête relie deux sommets entre eux. Partons de  $A$  ; nous pouvons tracer trois arêtes (vers  $B, C, D$ ), ce qui, une fois tracées, enlève trois degrés à  $A$  (donc  $A$  est désormais de degré 0). Les degrés de  $B, C, D$  diminuent chacun de un, ils sont donc désormais à deux. Il nous faut encore tracer deux arêtes .

De  $B$ , on va en  $C$  et  $D$ .  $B$  est donc désormais de degré 0. Il reste un degré pour  $D$  et  $C$ , donc une arête. Après cela, chacun des sommets sera de degré 0. Au total, nous avons donc six arêtes.

Cherchons une autre méthode pour trouver le nombre d'arêtes. Pour cela, écrivons la matrice représentative du graphe planaire du tétraèdre.

$$\begin{array}{cccc|l}
 A & B & C & D & \\
 \hline
 0 & 1 & 1 & 1 & A \\
 1 & 0 & 1 & 1 & B \\
 1 & 1 & 0 & 1 & C \\
 1 & 1 & 1 & 0 & D
 \end{array}$$

On remarque que cette matrice est symétrique. Cela est dû au fait que nous comptons deux fois la même arête : par exemple, nous comptons l'arête qui lie  $A$  à  $B$  et celle de  $B$  à  $A$ . Or nous travaillons sur des graphes non orientés, par conséquent ces arêtes sont les mêmes. On en déduit alors que le nombre d'arêtes est représenté par la demi-matrice, associée au graphe.

$$\begin{array}{cccc|l}
 A & B & C & D & \\
 \hline
 0 & 1 & 1 & 1 & A \\
 1 & 0 & 1 & 1 & B \\
 1 & 1 & 0 & 1 & C \\
 1 & 1 & 1 & 0 & D
 \end{array}$$

**Formule :**  $\sum_i \text{deg } S_i = 2 A$

En traçant le graphe de plusieurs polyèdres, nous en avons déduit une relation :

$$\sum_i \text{deg } S_i = 2 A$$

où  $A$  = nombre d'arêtes,  $\text{deg } S_i$  = degré de chaque sommet.

**démonstration :** démontrons cette formule par récurrence.

**remarques préliminaires :**

- quand on ajoute une arête à un graphe, on augmente le degré de deux des sommets ;
- on peut voir (d'après dessin) que le graphe représentant le tétraèdre comporte 6 arêtes.

**récurrence ...** Relation à démontrer :

$$\sum_i \text{deg } S_i = 2 A$$

- La relation est vérifiée pour le tétraèdre (plus petit polyèdre). En effet :

$$\sum_{i=1}^4 \text{deg } S_i = 3 \times 4 = 12$$

$A = 6$

d'où  $\sum_{i=1}^4 \text{deg } S_i = 2 A$

- Supposons la relation vraie pour un graphe comportant  $n$  sommets ; ajoutons alors à ce graphe une arête.

De ce fait, on augmente deux sommets de 1 en degré. D'où on a :

$\sum \text{deg } S_i + 2$  : le nombre de degré a augmenté de 2 ;  $A + 1$  : on a ajouté 1 arête au graphe.

hypothèse de récurrence :  $\sum \text{deg } S_i = 2 A$  ;  
 $\sum \text{deg } S_i + 2 = 2 A + 2 = 2 (A + 1)$ . On obtient alors :  $\sum \text{deg } S_i + 2 = 2 (A + 1)$ .

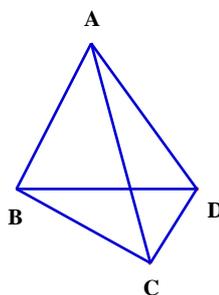
La relation est donc vraie.

On vient de démontrer par récurrence, la relation :

$$\sum_i \text{deg } S_i = 2 A$$

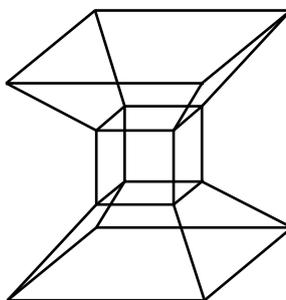
**exemples illustrant cette formule**

**Le tétraèdre**



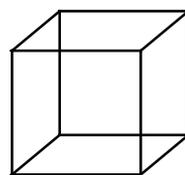
nombre de sommets : 4  
 degré de chaque sommet : 3  
 nombre d'arêtes : 6

**Le "papillon"**



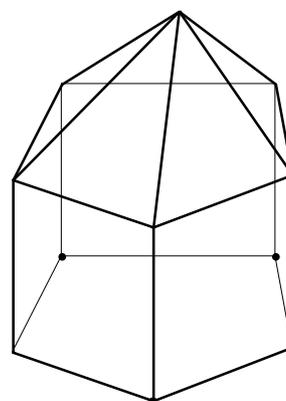
8 sommets de degré 3  
 8 sommets de degré 4  
 nombre d'arêtes : 28

**Le cube**



8 sommets de degré 3  
 nombre d'arêtes : 12

**Le "Chapiteau"**



1 sommet de degré 5  
 5 sommets de degré 3  
 5 sommets de degré 4  
 nombre d'arêtes : 20

**relation entre faces, arêtes et sommets :  
relation d'Euler**

Jusqu'à présent, nous avons donc essayé de trouver des méthodes pour compter le nombre d'arêtes. Intéressons-nous maintenant au nombre de faces.

Grâce à plusieurs exemples, nous avons tiré une relation :

$$F = A - S + 2$$

où  $A$  = nombre d'arêtes,  $S$  = nombre de sommets,  $F$  = nombre de faces.

**remarque**

En fait, cette relation est la relation d'Euler qui n'est pas vérifiée par tous les polyèdres (seulement pour les polyèdres eulériens\*). La récurrence que nous avons tenté de faire, a été faite avant le cours de Monsieur Arnoux.

**récurrence** ... relation à démontrer :

$$F = A - S + 2$$

[NDLR : lire la NDLR ci-contre]

• La relation est vérifiée par le tétraèdre, en effet :

$$A = 6, S = 4, F = 4 \\ \text{d'où } F = A - S + 2$$

• Supposons la relation vraie pour un polyèdre quelconque dont tous les sommets sont de degré  $n$  :

$$F_n = A_n - S_n + 2$$

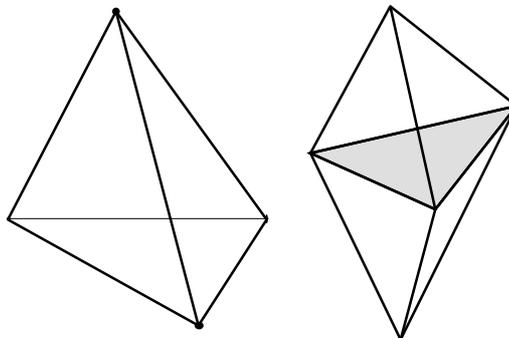
• Alors que se passe-t-il si nous ajoutons un sommet de degré 3, donc 3 arêtes et *a priori* 3 faces ? La relation devient :

$$(A_n + 3) - (S_n + 1) + 2 = A_n - S_n + 2 + 2 \\ (A_n + 3) - (S_n + 1) + 2 = F_n + 2 \text{ (hypothèse de récurrence)}$$

En effet, cette relation est exacte, puisque quand on ajoute un sommet de degré 3, on

fait apparaître trois faces mais une face disparaît, donc on augmente le nombre de faces de 2.

**Exemple**



Tout ceci démontre donc la relation d'Euler d'une certaine façon.

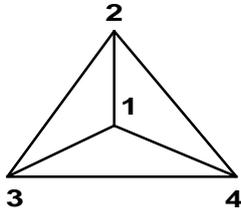
[NDLR :

S'il s'agit de démontrer que  $F = A - S + 2$  pour les polyèdres eulériens — c'est-à-dire ceux qui vérifient  $F - A + S = 2$ , d'après la définition donnée page 82 — il y a moyen de faire plus simple !

Si nous conservons cette “démonstration” fautive — qui ne démontre le résultat escompté que “d'une certaine façon” (...) — c'est qu'elle nous semble une excellente introduction à la lecture du livre d'Imre Lakatos, *Preuves et réfutations*, © Hermann 1984, lequel livre se lit comme un roman !]

Pour les polyèdres les plus simples, essayons de trouver un autre moyen de compter les faces ...

**le tétraèdre**



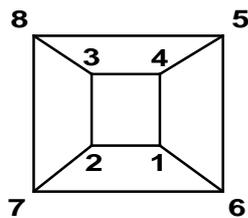
Toutes les faces sont des triangles. Essayons alors de voir tous les groupes de trois sommets différents qu'on peut faire :

- (★)  $312 = 321 = 123 = 132 = 231 = 213$   
 124  
 134  
 234

Comme nous n'orientons pas le graphe, on voit bien que tout ce qui est écrit sur la ligne (★) représente la même chose. Finalement, comme l'ordre n'a pas d'importance, on a :

$$\neq_4^3 = 4 \text{ faces.}$$

**le cube**



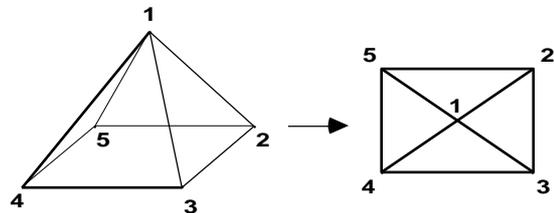
On s'aperçoit très vite qu'il est impossible de dénombrer tous les groupes de quatre sommets différents.

De plus, le fait de remarquer que toutes les faces comportent quatre sommets et que nous cherchons donc tous les groupes de quatre ne nous apporte rien puisque ...

$$\neq_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$$

En fait, cette tentative d'étude nous a fait remarquer que cela était compliqué pour des polyèdres généraux.

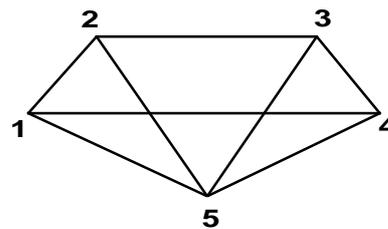
**autre exemple : la pyramide**



On remarque qu'il y a une face de quatre et quatre faces de trois sommets. Essayons de dénombrer les faces :

- 1 2 3 4  
 1 2 5  
 ? 1 3 5  
 1 4 5  
 2 3 5  
 ? 2 4 5  
 3 4 5

A ce moment-là, il y aurait 6 faces possibles de 3 sommets. Or le polyèdre possède 5 faces au total. Les faces 135 et 245 sont impossibles.

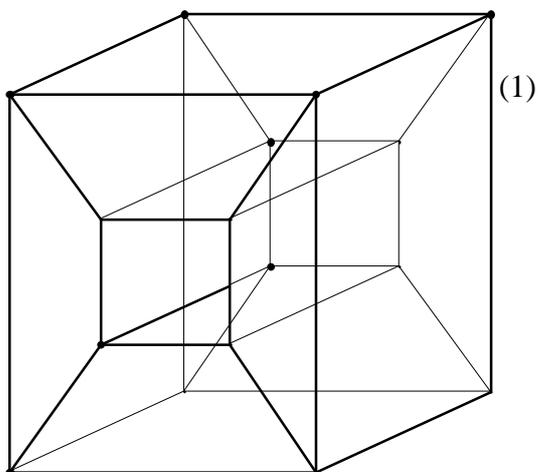


On voit bien que les 5 faces sont :

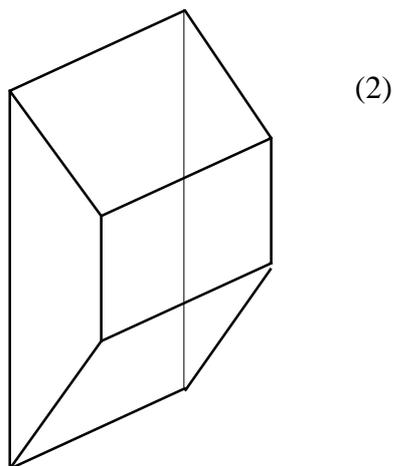
- 1 2 3 4  
 1 2 5  
 2 3 5  
 3 4 5  
 1 4 5

**question : est-ce que tout squelette de polyèdre est planaire ?**

Nous en avons trouvé la limite : **le cadre**.



On remarque que (1) ne peut être mis sous forme de graphe planaire. Comme il ne peut pas être représenté planairement, comment compter les faces ?



(2), qui représente un quart du cadre, peut être mis sous forme de graphe planaire. En fait (1) est l'union de quatre figures représentant (2), mais il faut enlever quatre faces ( $4 \times 4$  arêtes) puisqu'elles sont collées les unes sur les autres, sinon on les compte deux fois. Le cadre n'étant pas un polyèdre eulérien, en effet

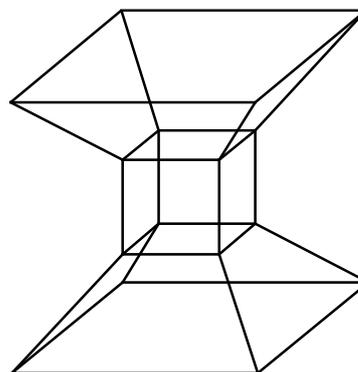
$$S - A + F = 0 \text{ et non } 2,$$

on ne peut pas le mettre sous forme de graphe planaire, mais sous forme d'union de graphes planaires.

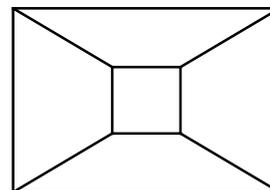
**question : quelles sont les propriétés sur l'union de graphes planaires ?**

En fait, tous les squelettes de polyèdres ne sont pas planaires mais peuvent être mis sous forme d'union, d'intersection ... de composition de graphes planaires.

Exemple 1 : **le papillon**



Le papillon est l'union de deux pyramides à bases carrées, tronquées, et d'un cube. Décomposons chaque pyramide en graphe planaire ainsi que le cube (même squelette) : 6 faces, 12 arêtes, 8 sommets



On peut appliquer la formule d'Euler car ce graphe possède toutes les propriétés permettant d'appliquer la formule d'Euler (d'après le cours de M. Arnoux). Reconstituons à présent le papillon. Nous sommes obligées, pour assembler trois éléments, de coller deux faces. Nous supprimons alors quatre faces (une à chaque pyramide, deux au cube), d'où :

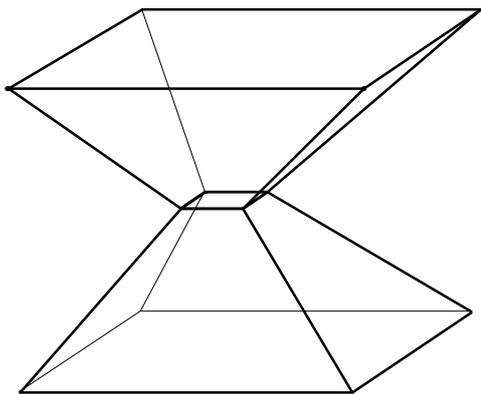
papillon = pyramide  $\cup$  cube  $\cup$  pyramide, et :

$$\begin{aligned} \text{nombre de faces : } & 3 \times 6 - 4 = 14 \\ \text{nombre de sommets : } & \\ & \begin{matrix} 8 \\ \text{(pyramide)} \end{matrix} + \begin{matrix} 8 \\ \text{(cube)} \end{matrix} + \begin{matrix} 8 \\ \text{(pyramide)} \end{matrix} - \begin{matrix} 8 \\ \text{(sommets} \\ \text{communs)} \end{matrix} = 16 \\ \text{nombre d'arêtes : } & 28 \end{aligned}$$

La formule d'Euler s'applique bien :

$$F = A - S + 2$$

## Exemple 2 : Le sablier



C'est l'union de deux pyramides tronquées.

Traitons chaque pyramide séparément ; on peut appliquer la formule d'Euler :

$$F = A - S + 2.$$

Reconstituons alors le sablier ; deux faces vont donc disparaître et on a :

$$\begin{aligned} \text{Faces : } & 10 \\ \text{Arêtes : } & 20 \\ \text{Sommets : } & 12 \end{aligned}$$

On a bien :

$$F = A - S + 2.$$

Après avoir traité ces 2 exemples, nous avons voulu trouver une formule générale s'appliquant à l'union de plusieurs éléments.

Reprenons, par exemple, le papillon.

Si on considère que l'union de trois éléments, c'est la mise en commun de quatre faces, on obtient la formule suivante :

$$F_e = B + F$$

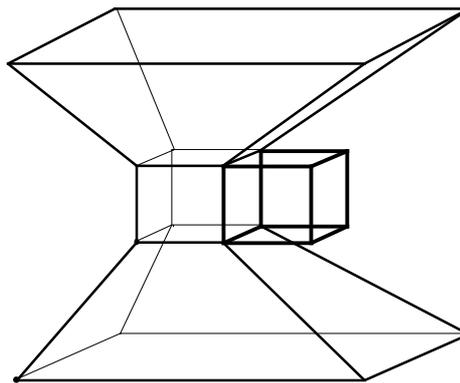
où ...

$B$  est le nombre de faces en commun,  
 $F_e$  est la somme des faces des éléments séparés,  
 $F$  est le nombre de faces de l'ensemble.

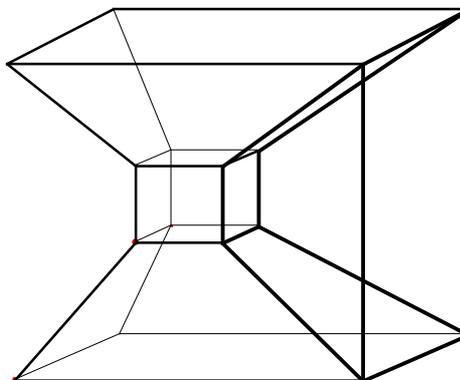
*question : trouver une formule générale pour déterminer  $B$  ?*

Après avoir travaillé avec Monsieur Arnoux, on considérera que  $B$  est donné par l'énoncé car  $B$  dépend de ce que nous rajoutons et où nous l'ajoutons.

Par exemple, sur le papillon, on peut rajouter un cube — alors  $B = 2$  — ...



... ou une pyramide — alors  $B = 6$ .



La question plus exacte est la suivante :

$S - A + F = x$ . Trouver  $x$ . On sait que  $x = 2$  si le polyèdre est un polyèdre d'Euler ; dans les autres cas, pourquoi  $x$  est-il différent de 2 et quelle en est la conséquence ?

**Application au cadre**

faces : 16 ; sommets : 16 ; arêtes : 32  
 $\Rightarrow S - A + F = 0$

Le cadre est l'union de quatre pyramides tronquées, chacune d'elle vérifiant la relation d'Euler :

$$\begin{aligned} S_1 - A_1 + F_1 &= 2 \\ S_2 - A_2 + F_2 &= 2 \\ S_3 - A_3 + F_3 &= 2 \\ S_4 - A_4 + F_4 &= 2 \end{aligned}$$

Quand on recolle le cadre, certaines faces disparaissent :

$$\begin{aligned} F_d = 8 ; S_d = 16 ; A_d = 16 \\ \Rightarrow S_d - A_d + F_d = 8 \end{aligned}$$

Pour le cadre, on a alors :

$$\begin{aligned} S - A + F &= (S_1 - A_1 + F_1) + (S_2 - A_2 + F_2) + \\ &+ (S_3 - A_3 + F_3) + (S_4 - A_4 + F_4) - (S_d - A_d + F_d) \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 - 8 = 0 \end{aligned}$$

**Application au papillon**

faces : 14 ; sommets : 16 ; arêtes : 28  
 $\Rightarrow S - A + F = 2$

Le papillon est l'union de 2 pyramides tronquées et d'un cube.

$$\begin{aligned} \text{Pyramide : } S_1 = 8, F_1 = 6, A_1 = 12 \\ \Rightarrow S_1 - A_1 + F_1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cube : } S_2 = 8, F_2 = 6, A_2 = 12 \\ \Rightarrow S_2 - A_2 + F_2 = 2 \end{aligned}$$

Reconstituons le papillon ; on a :

$$\begin{aligned} F_d = F_{\text{disparu}} = 4 ; A_d = 8 ; S_d = 8 \\ \Rightarrow S_d - A_d + F_d = 4 \end{aligned}$$

Pour l'ensemble, on a alors :

$$\begin{aligned} S - A + F &= (S_1 - A_1 + F_1) + (S_2 - A_2 + F_2) + \\ &+ (S_1 - A_1 + F_1) - (S_d - A_d + F_d) \\ S - A + F &= 2 + 2 + 2 - 4 = 2 \end{aligned}$$

**récapitulatif et formule**

Soit des polyèdres obéissant à la relation d'Euler. Lorsque l'on accole plusieurs de ces polyèdres par une seule face, alors on note :

$S_d$  = le nombre de sommets qui disparaissent (à cause de l'accolement)

$F_d$  = le nombre de faces qui disparaissent

$A_d$  = le nombre d'arêtes qui disparaissent

$S_i$  = le nombre de sommets du  $i^{\text{ème}}$  polyèdre

$F_i$  = le nombre de faces du  $i^{\text{ème}}$  polyèdre

$A_i$  = le nombre d'arêtes du  $i^{\text{ème}}$  polyèdre

$$\forall i, \text{ on a } S_i + F_i - A_i = 2.$$

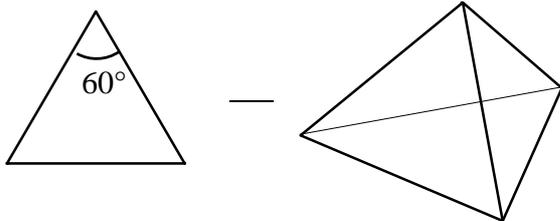
Pour le polyèdre obtenu par accolement, on a :

$$S - A + F = \sum_i (S_i - A_i + F_i) - (S_d - A_d + F_d)$$

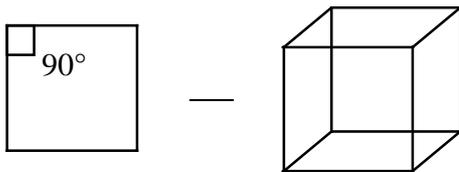
*introduction aux polyèdres platoniciens*

**question : à partir d'un polygone, pouvons-nous construire un polyèdre tel que toutes ses faces soient ce même polygone ?**

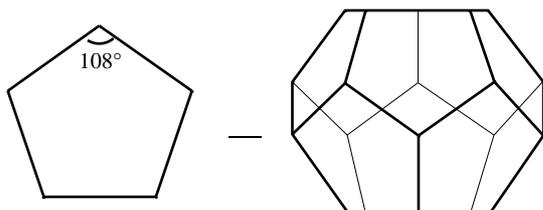
En partant du polygone le plus simple, le triangle, nous connaissons déjà la réponse : LE TETRAEDRE ...



En continuant avec le carré, il existe LE CUBE ...



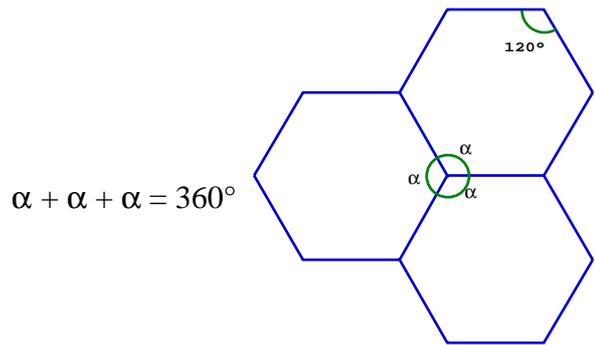
Puis pour le pentagone, nous connaissons LE DODECAEDRE, volume qui possède 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces :



On peut donc se poser la question de savoir s'il est possible d'avoir un volume uniquement composé de faces hexagonales.

Pour avoir un volume, il faut qu'à chaque arête d'une face corresponde une face. Prenons un hexagone comme base du volume si celui-ci existe :

L'angle à chaque sommet de l'hexagone de base est de  $360^\circ$



L'angle  $\alpha$  vaut  $120^\circ$ . Les faces rattachées à la face de base sont “condamnées” à rester dans le plan car chaque hexagone lié à la base est relié à une autre face et on ne peut donc pas “relever” les faces adjacentes à la base pour créer un volume.

[NDLC : et si on essayait avec quatre hexagones en un sommet ?]

Un volume composé uniquement d'hexagones ne peut donc pas exister et le volume le plus important [???] existant est le dodécaèdre.

[NDLR : important ... dans quel sens ? L'icosaèdre — dont il est question page suivante — est-il *plus* ou *moins* important que le dodécaèdre ?]

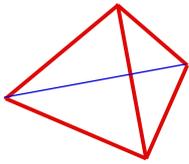
Grâce à la question précédente, nous pouvons nous apercevoir qu'il existe cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre, le cube, le dodécaèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre. Ces polyèdres sont appelés polyèdres platoniciens car Platon les utilisait pour représenter les cinq éléments : l'air, le feu, l'eau, la terre et l'univers.

Tétraèdre  $\leftrightarrow$  Tétraèdre  
 $\{4, 6, 4\}$      $\{4, 6, 4\}$

Cube  $\leftrightarrow$  Octaèdre  
 $\{8, 12, 6\}$      $\{6, 12, 8\}$

Icosaèdre  $\leftrightarrow$  Dodécaèdre  
 $\{12, 30, 20\}$      $\{20, 30, 12\}$

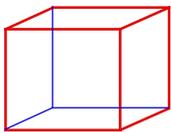
LE TETRAEDRE



Ce polyèdre possède 4 sommets, 6 arêtes, 4 faces :  $\{4, 6, 4\}$ . Dans la cosmologie de Platon, il représente le feu.

Les deux polyèdres formant une paire sont duals l'un de l'autre : à chaque face du polyèdre, on fait correspondre un sommet ; en reliant tous ces sommets, on obtient alors le polyèdre dual. Exemple pour le cube :

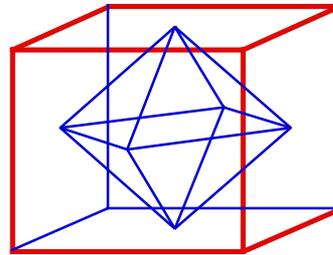
LE CUBE



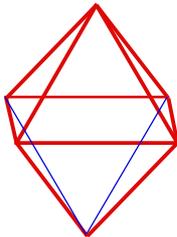
Il possède 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces :  $\{8, 12, 6\}$ . Il représente la terre.

Octaèdre

Cube

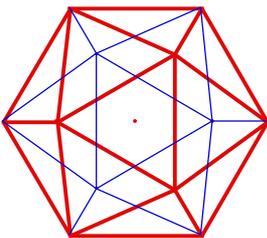


L'OCTAEDRE :



Possédant 6 sommets, 12 arêtes, 8 faces :  $\{6, 12, 8\}$ . Il représente l'air.

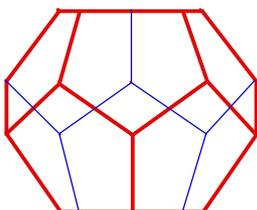
L'ICOSAEDRE



Ce polyèdre est composé de 12 sommets, 30 arêtes, 20 faces :  $\{12, 30, 20\}$ . Il représente l'eau.

[**NDLR** : à partir de maintenant, les élèves utilisent très largement les connaissances de leur cours, et il ne nous est guère possible d'en donner un résumé ici ; comme dirait Fermat, cette NDLR est trop étroite ... ; on s'accroche ou on passe à l'article suivant. Pour s'aider à poursuivre, il serait bon de s'appuyer sur l'ouvrage de Claude Berge, *Graphes*, 3ème édition, © Gautier-Villars 1983.]

LE DODECAEDRE



Fait de 20 sommets, 30 arêtes, 12 faces :  $\{20, 30, 12\}$ . Il représente l'univers.

Sur ces cinq polyèdres, on peut alors remarquer qu'ils peuvent se regrouper par paires :

**démonstrations de la relation d'Euler**

Après avoir trouvé la relation d'Euler, il est intéressant de la démontrer :

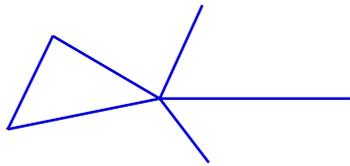
- Première démonstration à partir du nombre cyclomatique
- Deuxième démonstration avec le cours, grâce aux graphes duals.

On veut d'abord démontrer :

$$v(G) = A - S + P$$

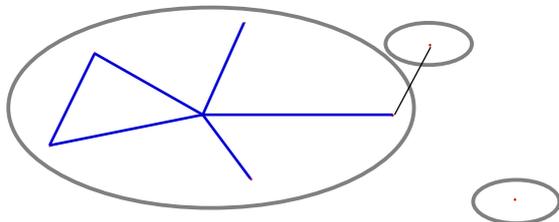
où  $A$  est le nombre d'arêtes du graphe  $G$ ,  $S$  est le nombre de sommets,  $P$  le nombre de composantes connexes(\*),  $v(G)$  le nombre de cycles indépendants, nombre cyclomatique du graphe  $G$ .

On part d'un graphe initial qui comporte  $v(G)$  cycles indépendants,  $A$  arêtes,  $P$  composantes connexes,  $S$  sommets, et tel que  $v(G) = A - S + P$ .



**Si on ajoute une arête :  $A' = A + 1$**

*premier cas* : cette arête relie deux composantes connexes entre elles, alors



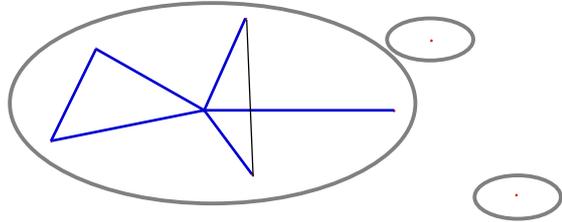
on a  $P - 1$  composantes connexes,  $S$  sommets et  $v(G)$  cycles indépendants, d'où :

$$v(G') = v(G) = A' - S' + P' = A + 1 - S + P - 1 = A - S + P.$$

La relation  $v(G) = A - S + P$  reste vraie.

*deuxième cas* : cette arête relie deux sommets à l'intérieur d'une même composante connexe :

Combien de nouveaux cycles indépendants engendre-t-elle ?



Supposons que, pour cette composante connexe, il y ait  $a$  arêtes,  $s$  sommets,  $p$  composantes connexes et  $v(G)$  cycles indépendants. Supposons d'autre part que l'on connaisse  $C_1, \dots, C_k$  une base de cycles indépendants telle que  $v(G) = a - s + p = k$ .

On connaît alors  $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k$  vecteurs tels que  $\lambda_1 \vec{V}_1 + \dots + \lambda_k \vec{V}_k = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_k = 0$ . En ajoutant une arête, supposons que celle-ci crée deux nouveaux cycles, alors on a :

$$\vec{V}_{k+1} = (\dots, 1) \text{ et } \vec{V}_{k+2} = (\dots, 1) \\ (a_1, \dots, a_k) \qquad (a_1, \dots, a_k)$$

L'arête rajoutée  $a_k$  est commune aux deux cycles. Pour la dernière coordonnée, on a donc :

$$(\lambda_1 a_k + \dots + \lambda_k a_k) + \lambda_{k+1} a_k + \lambda_{k+2} a_k = 0$$

$$\lambda_{k+1} a_k = -\lambda_{k+2} a_k \Rightarrow \lambda_{k+1} = -\lambda_{k+2}$$

et donc  $\vec{V}_{k+1}$  et  $\vec{V}_{k+2}$  ne sont pas indépendants ; il y a contradiction avec l'hypothèse et donc, lorsqu'on ajoute une arête, un seul cycle est créé, d'où :

$$v(G') = v(G) + 1 = k + 1 ; \\ a' = a + 1 ; s' = s ; p' = p$$

$$v(G') = v(G) + 1 = k + 1 = a - s + p + 1 \\ v(G') = a + 1 - s + p$$

La relation  $v(G) = A - S + P$  est donc toujours vérifiée. Donc si on ajoute une arête, la relation reste vraie dans tous les cas.

**Si on ajoute un sommet au graphe :  $S'=S+1$**   
(troisième cas)

Ajouter un sommet revient à ajouter une composante connexe, d'où  $P' = P + 1$ , le nombre de cycles et des arêtes restent inchangés donc :

$$v(G') = A' - S' + P' = A - S - 1 + P + 1$$

$$v(G') = A - S + P = v(G)$$

La propriété  $v(G) = A - S + P$  est encore vérifiée dans ce cas.

**Lorsqu'on retire une arête du groupe :**  
 $A' = A - 1$

(quatrième) cas : dans le cas d'une arête extrême, on ajoute une composante connexe :

$$P' = P + 1$$

car on voit apparaître un sommet.

$$v(G') = v(G) = A - 1 - S + P + 1 = A - S + P$$

(cinquième) cas : si l'arête reliait deux composantes connexes, une nouvelle composante connexe apparaît et  $P' = P + 1$ . [NDLR : même cas, mêmes calculs :]

$$v(G') = v(G) = A - 1 - S + P + 1 = A - S + P$$

(sixième et) dernier cas : l'arête pouvait faire partie d'un cycle, donc on a un cycle en moins et

$$v(G') = v(G) - 1$$

$$v(G') = v(G) - 1 = A - 1 - S + P$$

$$\Rightarrow v(G') = A' - S' + P'$$

Donc dans ces trois cas, la relation est vraie.

Dans tous les cas envisagés, la formule  $v(G) = A - S + P$  reste vraie, donc on peut dire que cette formule est démontrée.

$v(G) = A - S + P$ , tableau récapitulatif :

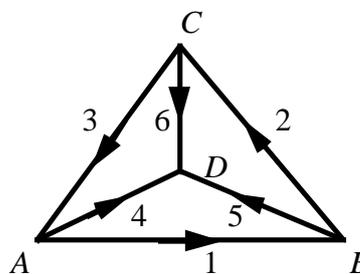
Cas	Nombre d'arêtes	Nombre de sommets	Nombre de cycles indépendants	Nombre de composantes connexes
1	$A + 1$	$S$	$v(G)$	$P - 1$
2	$A + 1$	$S$	$v(G) + 1$	$P$
3	$A$	$S + 1$	$v(G)$	$P + 1$
4 & 5	$A - 1$	$S$	$v(G)$	$P + 1$
6	$A - 1$	$S$	$v(G) - 1$	$P$

Après avoir démontré la relation sur le nombre cyclomatique, on veut démontrer celle d'Euler :

$$F = A - S + 2$$

Pour cela, on se fixe une orientation aléatoire du graphe. On veut démontrer que tous les cycles correspondant à des faces finies (\*) sont indépendants, c'est-à-dire que les vecteurs associés à ces cycles sont indépendants.

Commençons par le **tétraèdre**, dont le graphe planaire est :



$\{A ; S ; P\} = \{6 ; 4 ; 1\}$  d'où  $v(G) = 6 - 4 + 1 = 3$ , il y a donc trois cycles indépendants.

Soit  $\vec{V}_1$  le vecteur représentant la face  $ABD$  :  
 $\vec{V}_1 = (1 ; 0 ; 0 ; -1 ; 1 ; 0)$

$\vec{V}_2$  le vecteur représentant la face  $BCD$  :  
 $\vec{V}_2 = (0 ; 1 ; 0 ; 0 ; -1 ; 1)$

$\vec{V}_3$  le vecteur représentant la face  $ACD$  :  
 $\vec{V}_3 = (0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 0 ; -1)$

Ces trois vecteurs sont bien indépendants car

$$\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

En effet ...

- ... sur la première coordonnée :  
 $\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$
- ... sur la seconde coordonnée :  
 $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 + \lambda_3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$
- ... sur la troisième coordonnée :  
 $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

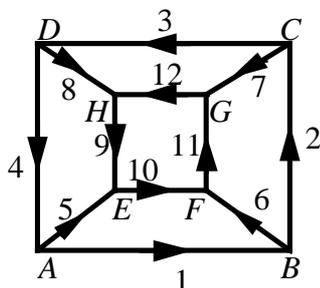
Donc les faces  $ABD$ ,  $BCD$ ,  $CAD$  sont les trois faces indépendantes.

En additionnant

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0),$$

on obtient la face  $ABC$  qui est en fait la face infinie(\*). D'où au total, le nombre de faces pour le tétraèdre est 4, ce qui est vérifié grâce au dessin.

Maintenant pour **un cube**, qui a pour graphe planaire :



$$\{A ; S ; P\} = \{12 ; 8 ; 1\} \text{ alors}$$

$$v(G) = 12 - 8 + 1 = 5$$

Ce paragraphe comporte donc cinq cycles indépendants :

Soient  $\vec{V}_1$  qui représente la face  $ABFE$  :  
 $\vec{V}_1 = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$

$\vec{V}_2$  qui représente la face  $BCGF$  :  
 $\vec{V}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 0)$

$\vec{V}_3$  qui représente la face  $CDHG$  :  
 $\vec{V}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1)$

$\vec{V}_4$  qui représente la face  $DAEH$  :  
 $\vec{V}_4 = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0)$

$\vec{V}_5$  qui représente la face  $EFGH$  :  
 $\vec{V}_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$

Ces cinq vecteurs sont indépendants :

$$\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \lambda_4 \vec{V}_4 + \lambda_5 \vec{V}_5 = \vec{0} \\ \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_5 = 0$$

Grâce aux premières coordonnées :  
 $\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 \cdot 0 + \lambda_5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

aux secondes coordonnées :  
 $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 + \lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 \cdot 0 + \lambda_5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

aux troisièmes coordonnées :  
 $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 + \lambda_4 \cdot 0 + \lambda_5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

aux quatrièmes coordonnées :  
 $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 + \lambda_5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0$

aux dixièmes coordonnées :  
 $-\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 \cdot 0 + \lambda_5 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_5 = \lambda_1 = 0$

Les cinq faces  $ABFE$ ,  $BCGF$ ,  $CDHG$ ,  $DAEH$ ,  $EFGH$  sont les cinq faces indépendantes. En additionnant

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5 = \\ (1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0)$$

on a la face infinie  $ABCD$ . Le nombre total de faces étant le nombre de faces finies plus la face infinie, le cube possède six faces, ce qui se vérifie sur le solide.

**En conclusion :**

**Pour tous les polyèdres dont le graphe est planaire (\*)**, on peut retenir l'égalité suivante :

Le nombre de faces total  $F$  est donné par

$$F = v(G) + 1 = \text{faces finies} + \text{face infinie}$$

Or comme l'on sait que  $v(G) = A - S + P$  et que pour un polyèdre  $P = 1$ , on obtient la **relation d'Euler** :

$$F = v(G) + 1 = A - S + 1 + 1 \\ F = A - S + 2$$

Nous pouvons donner **une seconde démonstration de la formule d'Euler** à partir du cours. En effet, considérons un graphe  $G$  à  $S$  sommets et  $A$  arcs : on appelle  $E_S = \mathbb{R}^S$  l'espace des sommets et  $E_A = \mathbb{R}^A$  l'espace des arcs.

Soit  $M = (m_{ij})$  la matrice représentative des arcs à partir des sommets :

$m_{ij} = 1$  si le sommet  $S_j$  est la fin de l'arc  $A_j$  ;  
 $m_{ij} = -1$  si  $S_i$  est le début de l'arc  $A_j$  ;  
 $m_{ij} = 0$  sinon.

On a :

- $v$  est un cycle généralisé si  $v.M = 0$  {cycle} =  $\text{Ker } {}^tM$
- $v'$  est un cocycle généralisé si il existe  $x$  tel que  $v' = Mx$  d'où {cocycle} =  $\text{Im } M$

Or on s'aperçoit que le produit scalaire d'un cycle par un cocycle est nul, d'où : l'espace des cycles et l'espace des cocycles sont orthogonaux, donc

$$\dim \{\text{cocycle}\} + \dim \{\text{cycle}\} \leq \dim E_A \quad (\star)$$

En effet, si l'on fait :

$$v.v' = v.Mx = (v.M)x = 0 \text{ car } v.M = 0$$

On sait que

$\dim \{\text{cocycle}\} = \lambda(G) = S - g$ , où  $\lambda(G)$  est le nombre cocyclomatique et  $g$  le nombre de composantes connexes.

$\dim \{\text{cycle}\} = v(G) \geq A - S + g$  avec  $v(G)$  nombre cyclomatique.

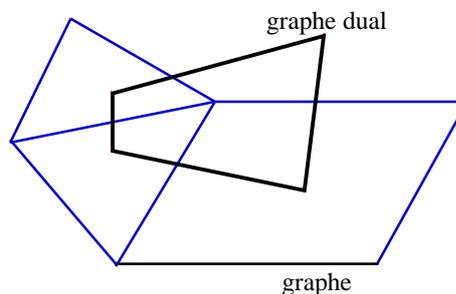
$$\lambda(G) + v(G) \geq A - S + g + S - g = A$$

Par  $(\star)$   $\lambda(G) + v(G) \leq A$ , on en déduit donc :

$$A \leq \lambda(G) + v(G) = A \\ \lambda(G) + v(G) = A \Rightarrow v(G) = A - S + g$$

En définissant pour les graphes planaires, le graphe dual, on s'aperçoit que, un cycle du graphe  $G$  devient un cocycle du graphe dual  $G^*$ .

On obtient le dual d'un graphe en associant à chaque face un nouveau sommet (sans oublier la face infinie) et en reliant ces sommets. Exemple :



Par proposition, en considérant un graphe et son dual :

$$\lambda(G) = v(G^*) \quad \lambda(G^*) = v(G)$$

$\lambda(G^*)$  est le nombre cocyclomatique du graphe dual, c'est aussi le nombre maximum de cocycles indépendants dont nous pouvons voir que, tout comme dans la première démonstration,  $\lambda(G^*) = F - 1$  avec  $F$  le nombre de faces total. Or, comme nous savons que  $v(G) = A - S + 1$  (toujours dans le cas des graphes planaires à une seule composante connexe qui représentent les polyèdres) nous pouvons en déduire :

$$\lambda(G) = v(G) \\ F - 1 = A - S + 1$$

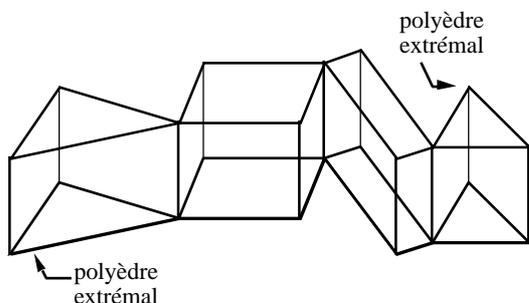
$$F = A - S + 2 \\ \text{(relation d'Euler)}$$

**évaluation de la caractéristique d'Euler dans le cas "collé par arêtes"**

On considère un ensemble de polyèdres reliés les uns aux autres par les arêtes. On définit la caractéristique d'Euler  $C = F - A + S$ . On veut donner  $C$  lorsque les polyèdres sont reliés par leurs arêtes.

Considérons un ensemble de  $N$  polyèdres tel que les polyèdres extrémaux(\*) n'aient qu'une seule arête en commun, alors que les autres polyèdres seraient liés entre eux par deux arêtes (chaîne de polyèdres non fermée).

Exemple :



Alors chaque polyèdre est tel que

$$F_i - A_i + S_i = C_i,$$

d'où, pour l'ensemble relié seulement par les arêtes, le nombre de faces est la somme du nombre de faces de chaque polyèdre alors que, le nombre d'arêtes diminue de  $N - 1$  et le nombre de sommets de  $2(N - 1)$  car une arête comporte deux sommets.

D'où :

$$C = F - A + S$$

$$C = F_1 + \dots + F_N - A_1 - \dots - A_N + (N - 1) + S_1 + \dots + S_N - 2(N - 1)$$

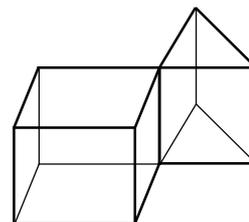
$$C = C_1 + \dots + C_N + N - 1 - 2N + 2$$

$$C = C_1 + \dots + C_N + 1 - N$$

Etudions cette formule sur la caractéristique d'Euler dans certains cas particuliers :

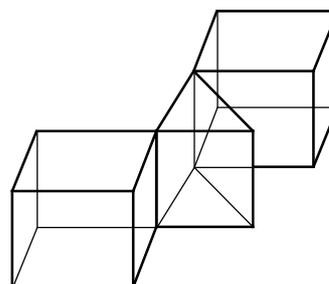
cas 1 : nous ne considérons plus que des polyèdres eulériens, c'est-à-dire tels que la caractéristique d'Euler  $C = 2$

Exemple : considérons un cube et un pentaèdre aux bases triangulaires



cube	pentaèdre	ensemble, cube & pentaèdre
$F_1 = 6$	$F_2 = 5$	$F = F_1 + F_2 = 11$
$A_1 = 12$	$A_2 = 9$	$A = 20$
$S_1 = 8$	$S_2 = 6$	$S = 12$
$C_1 = F_1 - A_1 + S_1 = 2$		
$C_2 = F_2 - A_2 + S_2 = 2$		
$C = F - A + S = 3$		

Considérons deux cubes + un pentaèdre



- (1) Cube :  $F_1 = 6 ; A_1 = 12 ; S_1 = 8 ; C_1 = 2$
- (2) Pentaèdre :  $F_2 = 5 ; A_2 = 9 ; S_2 = 6 ; C_2 = 2$
- (3) Cube :  $F_3 = 6 ; A_3 = 12 ; S_3 = 8 ; C_3 = 2$

Pour l'ensemble (1) + (2) + (3) :  
 $F = 17 ; A = 31 ; S = 18 ; C = 17 - 31 + 18 = 4$

Donc on peut dire que :

$$C = N + 1$$

où  $N$  est le nombre de polyèdres de l'ensemble.

Démonstration : on sait que

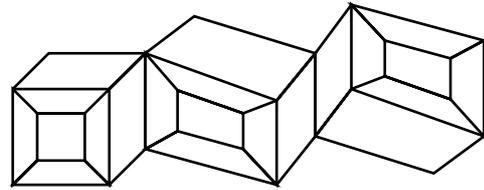
$$C = \sum C_i + 1 - N,$$

et de plus on a supposé que tous les polyèdres étaient eulériens, donc  $\forall i, C_i = 2$  d'où :

$$\begin{aligned} C &= C_1 + \dots + C_N + 1 - N \\ &= 2 + \dots + 1 - N \\ &= 2N + 1 - N \end{aligned}$$

d'où  $C = N + 1$ .

cas 2 : maintenant, nous considérons un ensemble de cadres où  $C = 0$



Pour un cadre,  $F = 16$  ;  $A = 32$  ;  $S = 16$  :

$$C = F - A + S = 0.$$

Soit  $N$  cadres rattachés par leurs arêtes, la caractéristique d'Euler de l'ensemble devient :

$$C = C_1 + \dots + C_N + 1 - N$$

Or  $\forall i, C_i = 0$ , d'où

$$C = 1 - N$$

Remarque : la caractéristique d'Euler  $C$  appartient à  $\mathbb{Z}^*$  car pour  $N = 0$ , les relations «  $C = N + 1$  » et «  $C = 1 - N$  » n'ont aucun sens. Donc nous pouvons dire que :

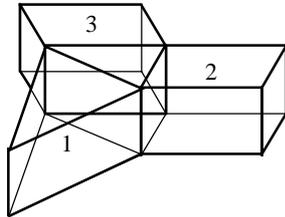
si  $N \geq 1$  :  $C = N + 1$  pour les eulériens

$C = 1 - N$  pour les cadres

Nous pouvons nous poser la question de savoir s'il existe un lien entre  $C$  et  $C'$ . En effet, M. Arnoux nous ayant montré la relation entre trois cadres recollés par les faces et un des polyèdres étoilés, on peut se demander si le fait que  $C = N + 1$  et  $C' = 1 - N$  ne "cache" pas une relation entre les eulériens et les cadres.

Essayons de voir ce qu'il se passe si, au lieu d'avoir une chaîne de polyèdres, nous avons un ensemble fermé (\*) de polyèdres :

cas 1 : pour les eulériens.



La caractéristique semble donner :

$$C = F - A + S = N$$

où  $N$  est le nombre de polyèdres. En effet :

- (1)  $F_1 = 5 ; A_1 = 9 ; S_1 = 6 : C_1 = 2$
- (2)  $F_2 = 6 ; A_2 = 12 ; S_2 = 8 : C_2 = 2$
- (3)  $F_3 = 6 ; A_3 = 12 ; S_3 = 8 : C_3 = 2$

(1) + (2) + (3) :  $F = 17 ; A = 30 ; S = 16 :$   
 $C = F - A + S = 17 - 30 + 16 = 3$

Démonstration :

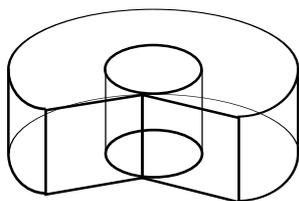
Soit un ensemble de  $N$  polyèdres tel que l'ensemble soit fermé et que tous les polyèdres soient eulériens ( $\forall i, C_i = 2$ )

$$\begin{aligned} F &= F_1 + \dots + F_N \\ A &= A_1 + \dots + A_N - N \\ S &= S_1 + \dots + S_N - 2N \\ C &= F - A + S = C_1 + \dots + C_N + N - 2N \end{aligned}$$

or  $C_1 + \dots + C_N = 2N$ , d'où

$$C = F - A + S = N$$

D'après la figure précédente, la relation est valable pour  $N \geq 3$ .



$\{F, A, S\} = \{6, 12, 8\}$

Or supposons que les polyèdres soient déformables tel un parallépipède qui se recolle à lui-même par une arête, alors :

On a :

$$C = 6 - 11 + 6 = 1$$

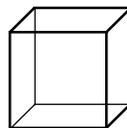
Or  $N = 1$  d'où  $C = N$  et la relation

$$F - A + S = N$$

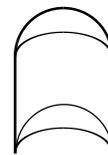
est encore vérifiée. On peut faire de même pour deux polyèdres et donc, on obtient :

$$N \geq 1 \quad C = F - A + S = N$$

Remarque : pour  $N = 2$ , si on prend un cube et une boîte



cube :  $\{6 ; 12 ; 8\}$   
 $C_1 = 2$

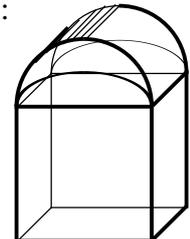


boîte :  $\{4 ; 6 ; 4\}$   
 $C_2 = 2$

En assemblant les deux, on a :

$C = 10 - 16 + 8 + 2$   
 et  $N = 2$  donc :

$$C = F - A + S = N$$



cas 2 : essayons avec un ensemble fermé de cadres.

$$\begin{aligned} F &= F_1 + \dots + F_N \\ A &= A_1 + \dots + A_N - N \\ S &= S_1 + \dots + S_N - 2N \\ C &= F - A + S = C_1 + \dots + C_N + N - 2N \end{aligned}$$

Or  $\forall i \in \{1, \dots, N\} C_i = 0$ , d'où :

$$C = F - A + S = -N$$

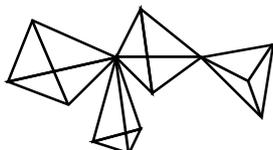
De même que pour les polyèdres eulériens, si nous considérons que le cadre peut être déformé, ce qui ne change rien à ces propriétés, nous pouvons alors écrire :

$$N \geq 1 \quad C = F - A + S = -N$$

Remarque : comme pour les ensembles ouverts, nous pouvons remarquer que, pour les polyèdres eulériens,  $C = N$ , pour les cadres  $C = -N$ . Existe-t-il une raison à cette apparente symétrie entre eulériens et cadres ?

Nous pouvons également regarder les cas où les polyèdres sont attachés par des sommets.

Exemple :



Ici, on considère des tétraèdres ( $\{4, 6, 4\}$ ), avec  $C = 2$ . Or une fois attachés par un sommet :

- pour deux tétraèdres :  
 $C = 2 \times 4 - 2 \times 6 + 7 = 3$  ;
- pour trois tétraèdres :  
 $C = 3 \times 4 - 3 \times 6 + 10 = 4$ .

Il semble que le sommet auquel on accroche les polyèdres n'ait pas d'importance et que l'on retrouve les formules obtenues dans le cas des polyèdres attachés par une arête, pour un ensemble ouvert.

démonstration : Soient  $N$  polyèdres tels que  $F_i, A_i, S_i$  soient les faces, arêtes, sommets de chacun des polyèdres  $i, i \in \{1, \dots, N\}$ , et  $C_i = F_i - A_i + S_i$ .

$$C = F - A + S$$

$$\begin{aligned} F &= F_1 + \dots + F_N \\ A &= A_1 + \dots + A_N \\ S &= S_1 + \dots + S_N - (N - 1) \\ C &= F_1 + \dots + F_N - A_1 - \dots - A_N \\ &\quad + S_1 + \dots + S_N - N + 1 \\ &= C_1 + \dots + C_N - N + 1 \end{aligned}$$

Pour les eulériens,  $C_i = 2 \Rightarrow C = 2N - N + 1$   
 $C = N + 1$  ;

pour les cadres,  $C_i = 0 \Rightarrow C = 1 - N$ .

### le cubicuboctaèdre (petit)

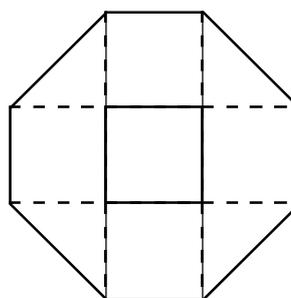
Après avoir essayer de “rattacher” des polyèdres par leurs sommets, leurs arêtes et leurs faces, nous sommes arrivées à trouver un polyèdre dont tous les sommets sont “en creux” : le petit cubicuboctaèdre. Nous pouvons donc déterminer sa caractéristique d'Euler connaissant le nombre de ses sommets, arêtes et faces.

Mais cette caractéristique dépend en fait de la façon dont on compte ... [NDLC : aïe.]

- Considérons ce petit cubicuboctaèdre comme l'intersection de 6 octogones, 8 triangles équilatéraux, 6 carrés. On peut donc en déduire qu'il a 20 faces, 48 arêtes et 24 sommets. Donc :

$$C = F - A + S = 20 - 48 + 24 = -4.$$

- Si nous le considérons comme un ensemble de cubes et de tétraèdres ... [NDLR : on obtient alors une formule différente, que nous n'avons pas réussi à comprendre. Faute de posséder au moins une photo du *petit cubicuboctaèdre*, nous renonçons là.]



(vue de dessus)

- les sommets de degré 6 font  $420^\circ > 2\pi$
- les sommets de degré 3 font  $540^\circ > 2\pi$

Le projet nous a amenées à être claires envers les autres. En effet, poser une définition, affirmer quelque chose n'est pas aussi évident qu'il le paraît. De plus, travailler sur un projet comme celui-ci nous montre un autre côté des mathématiques. Il nous apprend à nous poser des questions. Certaines, pour l'instant, restent sans réponse, d'autres sont résolues grâce aux éléments apportés par le cours au fur et à mesure. Et ce n'est qu'à la fin, en utilisant le livre "PREUVES et RÉFUTATIONS" (Lakatos) que nous avons vu que certaines questions que nous nous étions posées ont été résolues d'une certaine manière et d'autres restent encore sans réponse. Un des intérêts a été pour nous de poser les limites de ce que nous cherchions et de trouver un cheminement qui nous rapproche des potentielles solutions.

Notre idée : définir ce que tous nous connaissons, sous une forme ou une autre — les polyèdres platoniciens, eulériens et même divers polyèdres tels que le *hérisson* [???] ou le *cubicuboctaèdre* ont fait avancer notre réflexion. Notre but était de trouver toutes les possibilités de relier des polyèdres entre eux, afin de créer une "formule" qui nous permettrait de trouver quelques propriétés sur l'existence des polyèdres "en creux". Mais un *hérisson*, une *boîte à chapeau* ou un *cadre* sont-ils des polyèdres ?

Dans tout ce qui a motivé notre projet, un polyèdre fut défini comme une intersection de plusieurs plans (au moins quatre), puis comme un objet tel que nous puissions compter ses sommets, ses arêtes, ses faces et définir aussi la caractéristique d'Euler. Alors nous pourrions ainsi classer les polyèdres. Un cylindre, un hérisson sont donc des polyèdres. Alors qu'une boule ? ... Nous sommes aussi allées jusqu'à déformer certains polyèdres dans la limite où leurs propriétés en restent inchangées.

Bref, ce projet nous a permis d'acquérir une certaine maturité dans notre façon de penser, de voir les mathématiques sous un autre angle !

**définitions** : les définitions données ci-dessous font référence aux mots annotés d'une astérisque (\*).

**graphe planaire** : graphe dont les arêtes ne se croisent pas.

**polyèdres eulériens** : polyèdres dont la caractéristique d'Euler  $C = F - A + S$  est égale à 2.

**graphe complet** : graphe pour lequel chacun des sommets est relié à tous les autres par une arête.

**composante connexe d'un graphe** :

- un sommet seul est une composante connexe ;
- un ensemble de sommets reliés par des arêtes est également une composante connexe.

**face finie** : face représentée par un vecteur et qui se retrouve sur le polyèdre.

**face infinie** : elle s'obtient en sommant tous les vecteurs des faces indépendantes.

[NDLR : faces finie et infinie ... voilà des définitions plutôt en contradiction avec la première phrase de la colonne ci-contre.]

**polyèdre extrême** : dernier polyèdre qui termine une chaîne.

**ensemble fermé** : ensemble de polyèdres qui ne contient pas de polyèdre extrême.

**ensemble ouvert** : ensemble de polyèdres qui contient au moins deux polyèdres extrêmes.