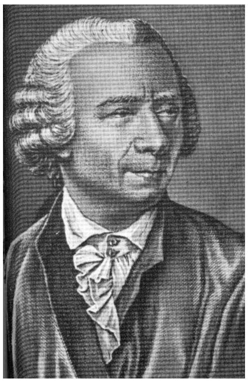
démonstration de la formule d'Euler, polyèdres platoniciens

par Nadia Abdou, Nadia Gaudel, Séverine Moreau, élèves de 2nde, Atelier « Exploration Mathématique » du lycée Louise Michel de Bobigny

enseignant : M. François Gaudel

Tous nos remerciements à Jean Brette.



Leonhard Euler vécut au XVIIIème siècle (1707-1783). C'était un mathématicien suisse dont l'œuvre considérable concerne toutes les branches des mathématiques pures ou appliquées et de la physique.

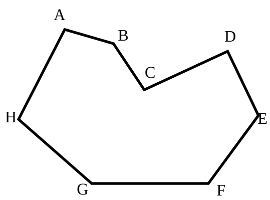
[***sujet*** … Représentation sur ordinateur. Fabrication de polyèdres. Expérience sur les cinq polyèdres platoniciens et sur le ballon de foot. Etude des polyèdres sans diagonales, avec ou sans trou.]

Un polyèdre est un solide limité de toutes parts par des polygones plans. Un polyèdre sans trou [ou *simplement connexe*] est un solide qui, s'il était réalisé en caoutchouc et qu'on se mette à le gonfler, aurait une forme de sphère. La formule d'Euler indique que, dans le cas d'un polyèdre sans trou, le nombre de sommets moins le nombre d'arêtes plus le nombre de faces est égal à 2 :

$$s - a + f = 2$$

le cas du plan

Pour démontrer cette formule, on se place d'abord dans le plan. On considère un polygone quelconque mais *non-croisé*.



Nous allons donc avoir n arêtes et n sommets car dans le plan, pour chaque arête (côté) ajoutée, on ajoute également un sommet et comme il y a une face (qui est le polygone), on a :

$$s' - a' + f' = n - n + 1 = 1$$

s' étant le nombre de sommets, a', le nombre d'arêtes et f', le nombre de polygones.

Cette relation reste vraie pour plusieurs polygones non croisés, adjacents extérieurement n'ayant que des côtés entiers en commun, tels que leur réunion soit elle-même un polygone (donc ne présente pas de « trou »).

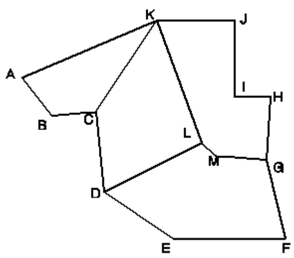
Nous appelons ce gros polygone composite un « macropolygone ».

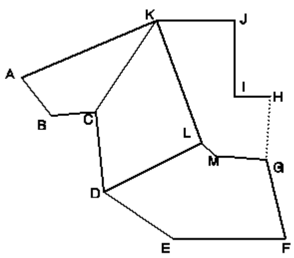
Nous le démontrons de la façon suivante :

Si le nombre de polygones est égal à un, la formule est vraie.

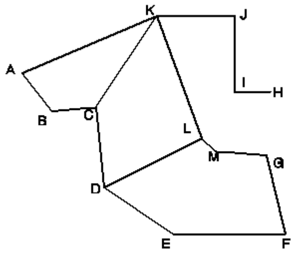
Sinon, nous diminuons le nombre de polygones sans changer la valeur de $s' - a' + f'$, de la façon suivante :

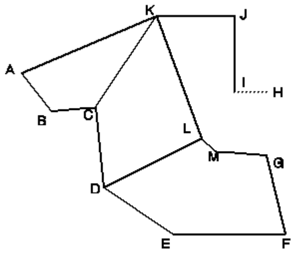
a) Notre macropolygone comporte une frontière, formée de segments. Ces segments ne sont les côtés que d'un seul polygone de l'ensemble, sinon ils seraient à l'intérieur de ce dernier. Soit [*HG*] l'un de ces segments (voir ci-dessous). En supprimant le côté [*HG*], nous supprimons un polygone (ici, *HIJKLMG*), et un côté, mais pas de sommet. $s' - a' + f'$ est donc inchangé. Cependant notre figure ne répond plus en général à la définition de macropolygone que nous avons donnée, car il y a des arêtes ([*KJ*], [*JI*], et [*IH*]) qui ne sont les côtés d'aucun polygone.





b) Nous supprimons maintenant ces arêtes surnuméraires sans changer la valeur de $s' - a' + f'$: chaque fois que nous en supprimons une, nous supprimons également un sommet, mais pas de polygone.





Finalement nous obtenons (dans notre cas de figure), un pavage du même type, mais avec un polygone de moins, et pour lequel la formule donne le même résultat …

[NDLR : plutôt qu'une <u>démonstration par récurrence</u> où on chercherait à augmenter le nombre de polygones d'une unité sans changer la valeur de $s' - a' + f'$, il s'agissait ici de diminuer le nombre de polygones d'une unité, sans changer la valeur de $s' - a' + f'$, et de recommencer à diminuer le nombre de polygones, jusqu'à atteindre le cas d'un seul polygone, pour lequel on a déjà vérifié que la formule est correcte.]

Remarque :

Lors du congrès Maths en Jeans une intervenante a mis en doute la rigueur de notre démonstration et nous a renvoyés au livre « Preuves et réfutations » de Imre Lakatos. Nous y avons trouvé, pour ce qui nous concerne, deux problèmes.

L'un a trait au cas des arêtes alignées : elles doivent, pour nous, toujours être considérées comme distinctes : tout segment qui joint deux sommets et qui appartient à la figure (c'est-à-dire qui fait partie de la frontière d'un polygone du pavage), est compté comme une arête.

> [NDLR : c'est bien, d'avoir lu Lakatos ; on aurait pu en profiter pour chercher à *donner des définitions de arêtes et de sommets* qui soient non critiquables, au moins dans l'optique de cette démonstration.]

Deuxième problème plus ennuyeux : est-on bien sûr que le polygone que l'on supprime se présente bien comme sur notre figure, c'est-à-dire avec tous ses côtés externes consécutifs ?

Dans le cas contraire, la suppression de tous les côtés externes aboutit à deux pavages disjoints. C'est ce qui se passe ci-contre si l'on enlève [*KL*] et [*CD*].

Si l'on admet que tout polygone peut être triangulé, il n'y a plus de problème, car dans un triangle, il n'y a que des côtés consécutifs.

retour aux polyèdres

On considère un polyèdre sans trou à présent. On appelle :

> s son nombre de sommets
> a son sombre d'arêtes
> f son nombre de faces.

Supposons que nous lui enlevions une face. Puis, supposons que l'on tire sur les côtés et que l'on réussisse à l'aplatir. Nous obtenons alors un pavage du type précédent. Pour ce dernier, on a donc :

$$s' + f' - a' = 1$$

Or, seule une face manque, d'où :

$$s = s',\ a = a',\ \text{et } f = f'+1$$

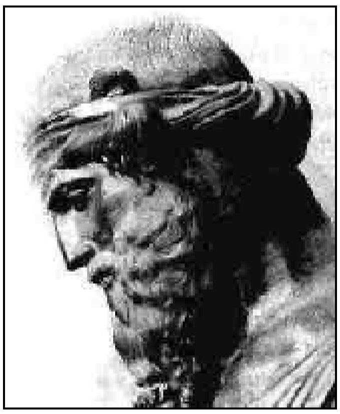
$$s + f - 1 - a = 1$$

d'où

$$s + f - a = 1 + 1 = 2$$

La formule d'Euler est donc démontrée.

les polyèdres platoniciens

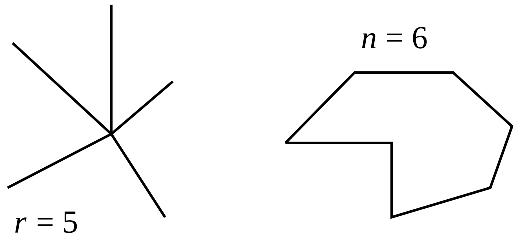


Platon (427-348 av.JC)

Dans un premier temps, à partir de cette formule, nous allons trouver une méthode permettant de trouver le nombre d'arêtes, de faces et de sommets des polyèdres sans trous dont toutes les faces sont identiques du point de vue du nombre de sommets (et donc arêtes).

Ces polyèdres ne sont pas forcément réguliers (voir article suivant) ; cependant il y en a cinq types, qui correspondent aux cinq polyèdres réguliers platoniciens. Nous démontrerons ensuite l'**existence** des cinq polyèdres réguliers. Cependant, nous n'avons pas démontré l'unicité de ces derniers (seulement leurs principales caractéristiques).

Soient r le nombre de faces ou d'arêtes en un sommet, et n le nombre de côtés par faces d'un polyèdre dont toutes les faces ont le même nombre de côtés, et tous les sommets le même nombre d'arêtes.



Alors :

$$sr = 2\,a = fn$$

En effet le nombre d'arêtes est obtenu en multipliant le nombre de sommets par le nombre d'arêtes qui y aboutissent, et en divisant par deux, puisque chaque arête joint deux sommets. Il est égal aussi au nombre de faces multiplié par le nombre d'arêtes par face et divisé par deux puisque chaque arête délimite deux faces.

D'où le système :

$$s - a + f = 2$$
$$sr = 2\,a$$
$$fn = 2\,a$$

En reportant dans la première équation :

$$s = 2\,a/r$$

et

$$f = 2\,a/n$$

il vient :

$$2\,a/r - a + 2\,a/n = 2$$

D'où :

$$\mathbf{1/\mathit{r} + 1/\mathit{n} = 1/2 + 1/\mathit{a}}$$

Or r, n et a sont des entiers positifs. De plus, $r > 3$ et $n > 3$ d'où :

$(r, n) = (3, 3)$ ce qui donne $a = 6$
ou $(3, 4)$ ce qui donne $a = 12$
ou $(3, 5)$ ce qui donne $a = 30$
$(3, 6)$ ne convient plus
ou $(4, 3)$ ce qui donne $a = 12$
$(4, 4)$ ne convient plus
ou $(5, 3)$ ce qui donne $a = 30$
$(6, 3)$ ne convient plus

Finalement, on obtient les résultats suivants :

$a = 6$; $f = 4$; $s = 4$; $r = 3$
(tétraèdre : quatre faces triangulaires)

$a = 12$; $f = 6$; $s = 8$; $r = 4$
(six faces quadrilatères, ce qui donne le cube lorsqu'il est régulier)

$a = 12$; $f = 8$; $s = 6$; $r = 3$
(octaèdre, dont les 8 faces sont des triangles)

$a = 30$; $f = 12$; $s = 20$; $r = 5$
(dodécaèdre, dont les douze faces sont des pentagones)

$a = 30$; $f = 20$; $s = 12$; $r = 3$
(icosaèdre, dont les vingt faces sont des triangles)

Il n'y a donc que cinq types de polyèdres ayant toutes leurs faces et tous leurs sommets identiques du point de vue des nombres d'arêtes qui les délimitent ou y aboutissent.

les cinq solides de Platon (suite)

Sous un autre « angle », nous allons retrouver que le nombre de faces par sommet ne peut-être que l'un des 5 précédents, pour un polyèdre régulier convexe.

Dans le plan, il y a une infinité de polygones convexes réguliers. Un résultat étonnant, dû aux mathématiciens grecs, est qu'il n'y a que cinq polyèdres réguliers (ou platoniciens).

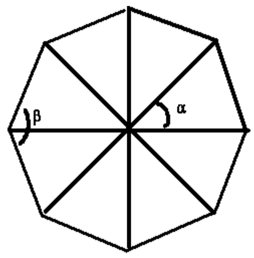
Nous allons vous démontrer qu'il n'y a que cinq polyèdres platoniciens, au plus, par des considérations sur le nombre de faces, de sommets et d'arêtes.

Tout d'abord, il faut définir un polyèdre platonicien : c'est un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers — donc toutes les arêtes sont égales, et les angles également — et tous les sommets sont identiques c'est-à-dire que chaque sommet relie le même nombre d'arêtes.

Démontrons que **la mesure d'un angle d'un polygone régulier de *n* côtés est :**

$$\mathbf{(n–2)/n \times 180°}$$

Soit un polygone régulier de n côtés, partageons-le en triangles de la manière suivante :



mes $\alpha = 360°/n$
mes $\beta = 180 – 360°/n = 180 – (2/n) \times 180°$
mes $\beta = 180 (1 – 2/n) = 180 (n – 2)/n$

Donc la mesure d'un angle d'un polygone régulier de n côtés est :

$$(n–2)/n \times 180°$$

Ensuite, démontrons que **les polygones réguliers formant un polyèdre convexe doivent avoir au maximum 5 côtés.**

On sait que pour faire un sommet convexe, il faut que :

• **la somme des angles en ce sommet soit strictement inférieure à 360° :** sinon le sommet ne peut être convexe (pour 360°, nous obtenons un sommet “ plat ”) ;

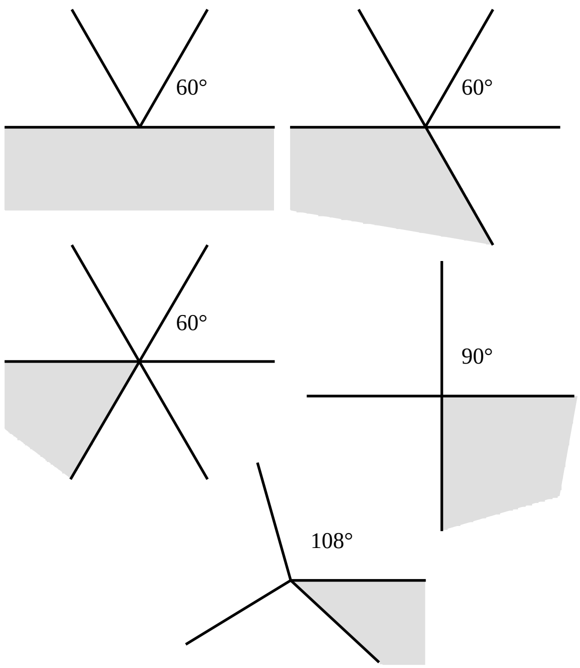
• **ce sommet joigne, au minimum, 3 faces.**

A partir de ces deux hypothèses, on peut déduire :

$$3 \times ((n-2)/n) \times 180° < 360°$$
$$(n-2)/n < 2/3$$
$$3n-6 < 2n$$
$$\boldsymbol{n < 6}$$

Donc l'hexagone et au-delà sont à éliminer.

Enfin, essayons de trouver le nombre de types de sommets de polyèdres réguliers que l'on peut faire à l'aide des trois polygones réguliers : triangle, carré, pentagone : nous sommes là aussi limités par la somme des angles qui doit être strictement inférieure à 360°.



Mais cela ne suffit pas à justifier le fait qu'il y a exactement cinq polyèdres platoniciens, car ces croquis montrent seulement la disposition des faces en un sommet. Jean Brette nous a ainsi montré un exemple de polyèdre semi-régulier dont les caractéristiques précédentes étaient connues et que l'on pensait unique … jusque dans les années quarante.

existence

… Encore faut-il que tous ces polyèdres existent. Pour démontrer cette existence, nous avons d'abord vérifié celle du tétraèdre, du cube et de l'octaèdre en les définissant à l'aide des coordonnées de leurs sommets.

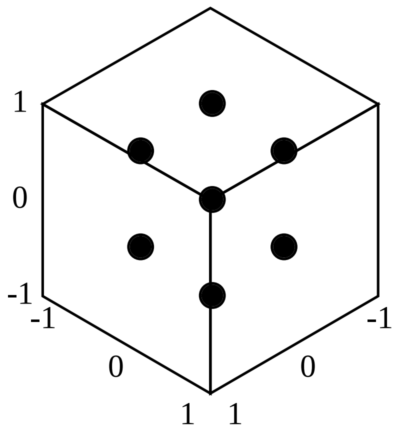
Pour l'icosaèdre, nous avons « déplié » un octaèdre (voir plus loin), et pour le dodécaèdre (dont nous n'avons pas calculé les coordonnées), il suffit de prendre le dual du précédent, c'est-à-dire en l'occurence le polyèdre dont les sommets sont les centres des faces de l'icosaèdre.

Nous avons, de plus, construit tous ces polyèdres à l'aide de pièces de plastiques, et nous nous sommes aidés du programme « Maple » pour en obtenir des représentations.

Cube

le cube — les coordonnées :

A(1, 0, 1) *B*(0, 0, 1) *C*(0, 1, 1)
D(1, 1, 1) *E*(1, 0, 0) *F*(0, 0, 0)
G(0, 1, 0) *H*(1, 1, 0)



le cube — les arêtes :

4 arêtes égales par face : il y a 12 arêtes égales. Chaque côté est de longueur 1.

le cube — les angles :

Angles droits et égaux : ce cube se trouve dans un repère orthonormé, les angles sont droits et égaux. Il y a trois arêtes par sommet.

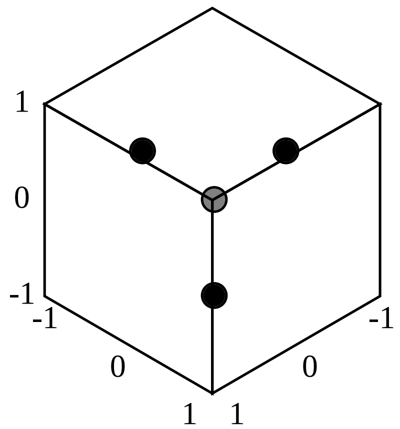
le cube — les faces :

Les faces sont égales : les 6 faces sont des carrés. Il y a 4 arêtes par face et 3 faces par sommet.

Tétraèdre

le tétraèdre — les coordonnées :

A(1, 0, 1) *B*(0, 1, 1) *C*(0, 0, 0)
D(1, 1, 0)



le tétraèdre — les arêtes :

Les 6 arêtes égales : les arêtes du tétraèdre sont les diagonales des faces du cube. Elles sont donc égales.

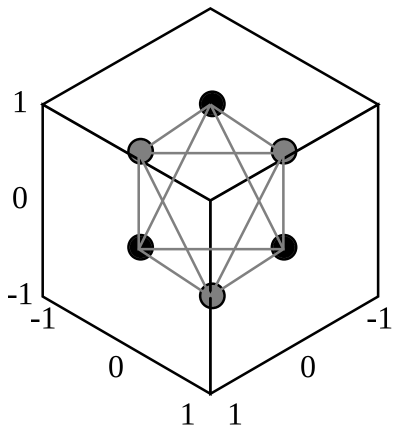
le tétraèdre — les faces :

Les 4 faces sont des triangles équilatéraux car toutes les arêtes sont égales. Il y a trois faces par sommet.

Octaèdre

l'octaèdre — les coordonnées :

$A(0, 0, 1)$ $B(0, -1, 0)$ $C(-1, 0, 0)$
$D(0, 1, 0)$ $E(1, 0, 0)$ $F(0, 0, -1)$



l'octaèdre — les arêtes :

Le repère est orthonormé et tous les segments tels que $[BO]$ sont de longueur 1. Donc :

$$BA^2 = BO^2 + OA^2$$
$$BA^2 = 2$$

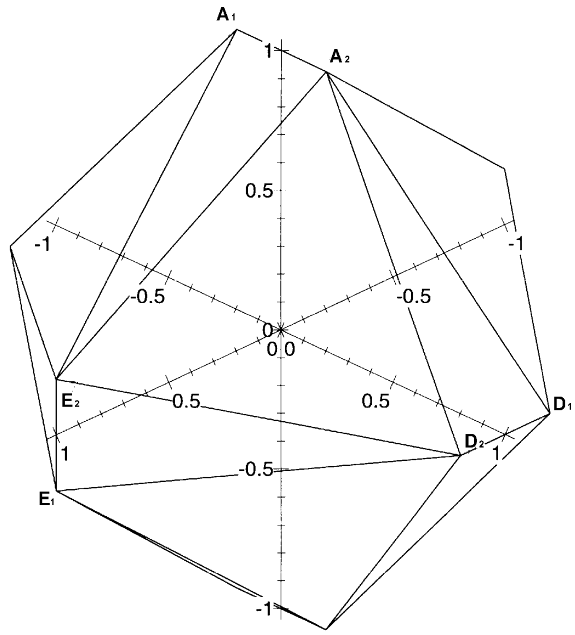
Les arêtes sont donc égales.

l'octaèdre — les faces :

Comme les arêtes sont égales, les triangles sont équilatéraux. Il y a donc 8 faces équilatérales et 6 angles égaux. Il y a quatre faces par sommet.

Icosaèdre

Pour obtenir un icosaèdre, nous « déplions » l'octaèdre précédent en dédoublant chacun de ses sommets comme sur la figure ci-dessous : le point A devient le segment $[A_1A_2]$, le point D devient le segment $[D_1D_2]$, etc …



Nous avons utilisé “ Maple ” pour visualiser le “ dépliage ” (voir ci-dessous). Les coordonnées utilisées pour les différents points sont données dans le petit programme ci-dessous : ce sont les douze triplets de la suite « pointsico » à la deuxième ligne.

En particulier, le point A_1 a pour coordonnées $(0, -t, 1)$ et le point A_2 $(0, t, 1)$. Le point E_2 a pour coordonnées $(1, 0, t)$. Il y a deux types de triangles : ceux du type $A_2E_2D_2$, qui sont tous équilatéraux, et ceux du type $A_1A_2E_2$, qui sont tous isocèles (et égaux).

```
> with(plots);
> pointsico:=[[0,–t,1],[0,t,1],[–1,0,t],[–1,0,–t],[–t,1,0],[t,1,0],[0,t,–1],[0,–t,–1],[1,0,–t],[1,0,t],[t,–1,0],[t,–1,0]];
> A:=pointsico;
> icovar:=[[A[1],A[2],A[10]],[A[1],A[2],A[3]],[A[1],A[3],A[12]],[A[1],A[12],A[11]],[A[1],A[11],A[10]],
[A[2],A[6],A[10]],[A[2],A[6],A[5]],[A[2],A[5],A[3]],[A[4],A[5],A[3]],[A[3],A[4],A[12]],[A[12],A[11],A[8]],
[A[12],A[8],A[4]],[A[8],A[4],A[7]],[A[8],A[7],A[9]],[A[8],A[9],A[11]],[A[7],A[6],A[9]],[A[7],A[6],A[5]],
[A[7],A[5],A[4]],[A[9],A[6],A[10]],[A[9],A[10],A[11]]];
> t:=i/20;
> forifrom0to17by1dot:=i/20;polygonplot3d(icovar,scaling=constrained)od;
```

L'icosaèdre est régulier si et seulement si ces derniers triangles sont équilatéraux, c'est-à-dire lorsque $A_1A_2 = A_1E_2$. En élevant ces deux longueurs au carré, cela nous donne :

$$4t^2 = 1 + t^2 + (t-1)^2$$

soit encore

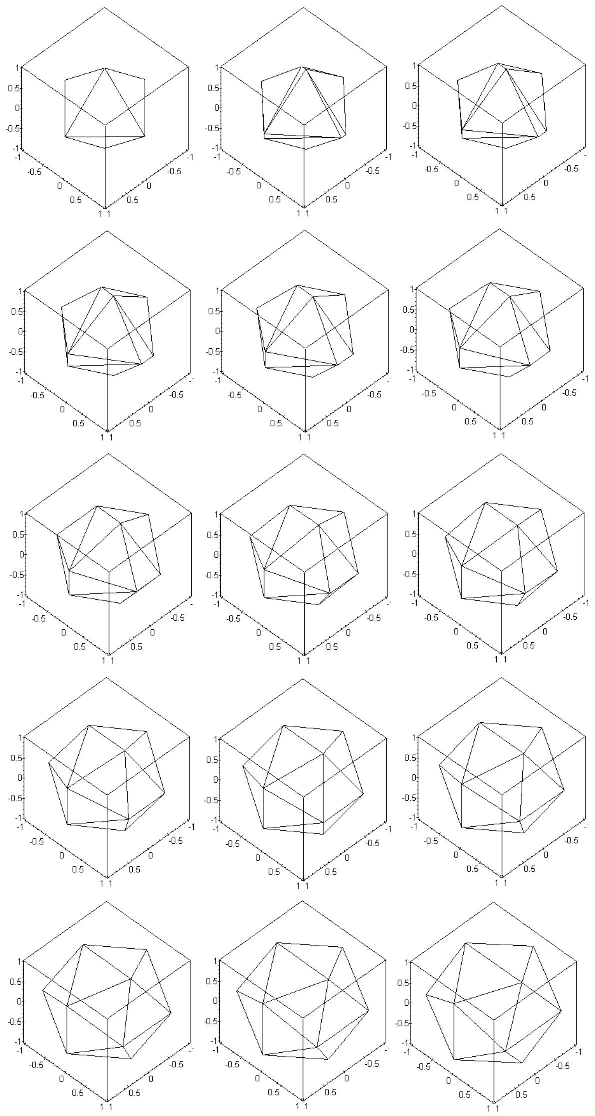
$$t^2 + t - 1 = 0$$

Cette équation admet pour seule solution positive :

$$t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

c'est-à-dire le nombre d'or. Il suffit de donner cette valeur à t pour obtenir les coordonnées d'un icosaèdre régulier.

le dépliage de l'octaèdre



Dodécaèdre

Pour le dodécaèdre régulier, il suffit de prendre le polyèdre dont les sommets sont les centres des faces de l'icosaèdre.