quel est le plus grand carré contenu dans un cube ?

par David Bernardo (3°), Mustapha Laajaj (3°), Siek-Hy Lim (3°), Sébastien Marquant (4° techno), du Collège Victor Hugo (2 rue Elsa Triolet, 93160 Noisy-le-Grand) et Ameer Nguyen (4°) et Nala Kok Srey (4°), du Collège Condorcet (rue des Tilleuls, 77340 Pontault-Combault)

enseignants : Mme Martine Brunstein, M. Hervé Grac, M. Pierre Lévy

chercheur : M. Pierre Duchet

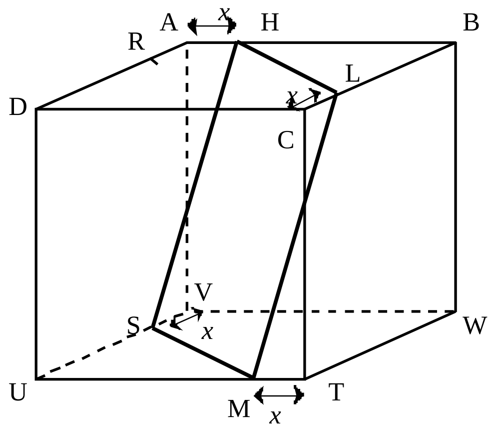
Compiègne
Compte-rendu du collège Gaëtan Denain sur l'expo - sé n° 36 “carré dans un cube”.
Sébastien Pappala, Vincent Fournier, Laurent Gonvin.

Ils sont six élèves de 3° et de 4° du collège Victor Hugo de Noisy-le-Grand et du collège Condorcet de Pontault-Combault.

Ils s'appellent David, Sébastien, Mustapha, Siek-Hy, Nala, Ameer.

Ils cherchent quelle est la plus grande aire d'un quadrilatère dans un cube.

Ils ont fait la maquette d'un cube pour illustrer leur exposé. Pour leurs démonstrations, ils ont utilisé le théorème de Pythagore et de Thalès, ce qui fait que nous n'avons pas compris parce que nous sommes des 6°.



notre objectif

Parmi tous les quadrilatères que l'on peut mettre dans un cube, quel est le celui dont l'aire est la plus grande ? En particulier, quel est le plus grand carré ?

Dans un premier temps, nous avons tenté de mettre à l'intérieur d'un cube de côté 5 cm différents carrés ayant un côté supérieur à 5 cm. En effet, il clair que tout carré de côté 5 cm rentrera aisément dans de nombreuses positions. A l'aide de ces manipulations, nous sommes parvenus à établir un encadrement de la longueur maximale du côté du plus grand carré qui puisse rentrer sans déborder. Si c est la longueur d'un tel carré, alors on a : $5{,}3 \leq c \leq 5{,}5$.

Nous n'avons pas réussi à améliorer cet encadrement car notre dispositif expérimental était trop imprécis. Nous avons donc décidé de travailler sur des représentation en perspective cavalière.

Nous avons considéré des cubes de côté 1 unité. Nous avons exploré divers quadrilatères dont les sommets sont sur les arêtes du cube. Les deux groupes de recherche ont étudié une configuration semblable de manière assez différente.

[NDLR : nous présentons ci-après les deux manières d'approcher la question, le texte n'étant d'ailleurs pas présenté sous le même titre, ni avec le même énoncé de sujet … Commençons avec le collège Condorcet.]

Quel est le plus grand carré qui tienne dans un boite cubique sans dépasser ?

une première configuration

expérimentation : nous avons essayé de trouver la meilleure position dans un cube en carton. Nous avons placé un rectangle dans un cube de manière à ce que 2 côtés opposés du rectangle soient parallèles aux diagonales des faces opposées du cube et de manière à ce que les sommets du rectangle soient sur les arêtes du cube.

Expression de SH en fonction de HL :

Nous recherchons une formule permettant de calculer *SH* en fonction de *HL* pour déterminer *SH* tel que le rectangle *HLMS* soit un carré. Nous donnons une longeur à *HL* et nous recherchons *HB* dans le triangle *BHL* rectangle isocèle en *B* ; d'après le théorème de Pythagore on a :

$$HL^2 = HB^2 + BL^2 \text{ donc } HL^2 = 2HB^2$$
$$\text{d'où } HB^2 = HL^2 / 2$$
$$HB = \sqrt{(HL^2)} = HL / \sqrt{2}$$

Le côté du cube [*AB*] fait 1 unité. *H* est un point de [*AB*]. Grâce à la formule ci-dessus, nous pouvons calculer *AH* :

$$AB - HB = AH$$
$$AH = 1 - HL / \sqrt{2}$$

Nous recherchons *RH* dans le triangle *RAH* rectangle isocèle en *A* d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + AR^2 = RH^2 \text{ donc } RH^2 = 2\,AH^2$$
$$\text{d'où } RH^2 = AH^2 \times 2$$

Puis nous recherchons *SH* dans le triangle *RHS* rectangle en *R*. D'après le théorème de Pythagore et sachant que *RS* = 1 on a :

$$RH^2 + RS^2 = SH^2 \text{ donc } RH^2 + 1^2 = SH^2$$

Formule pour calculer *SH* à partir de *HL* :

$$SH^2 = RH^2 + RS^2$$
$$SH^2 = RH^2 + 1^2$$
$$SH^2 = 2 \times AH^2 + 1^2$$
$$\text{or } AH = AB - HB$$
$$AH = 1 - HB$$
$$SH^2 = 2 \times (1 - HB)^2 + 1^2$$
$$SH^2 = 2 \times (1 - HL / \sqrt{2})^2 + 1^2$$

recherche progressive de SH en fonction de HL : nous recherchons maintenant *HL* tel que le quadrilatère *HLMS* soit carré donc tel que *HL = SH*. En faisant différents calculs de *SH* en fonction de *HL* on remarque que si *HL* augmente *SH* diminue et si *HL* diminue alors *SH* augmente. On part donc de *HL* = 1 — car on cherche un carré de côté plus grand que 1 — on calcule la valeur correspondante de *SH*, puis on prend une valeur arrondie de *SH* comme valeur de *HL* et on calcule à nouveau *SH*. En réitérant ce procédé jusqu'à ce que la calculatrice donne le même affichage pour *HL* et *SH*, on se rapproche de la valeur qui convient.

HL	***SH***
1	1,0823922
1,1	1,048203302
1,05	1,06426102
1,06	1,060880412
1,0605	1,060713573
1,0606	1,060680231
1,06066	1,060660229
1,0606602	1,060660162
1,0606601	1,060660196
1,06066017	1,060660172
1,060660172	1,060660172
1,060660172	1,060660172

On obtient donc la valeur approchée

$HL \approx SH \approx$ 1,060660172

recherche de la valeur exacte de HL :

A partir de la formule donnant *SH* en fonction de *HL*, $SH = \sqrt{2(1-\frac{HL}{\sqrt{2}})^2+1}$ on cherche à déterminer la valeur pour laquelle *SH* = *HL*. Posons *HL* = *SH* = *x*.

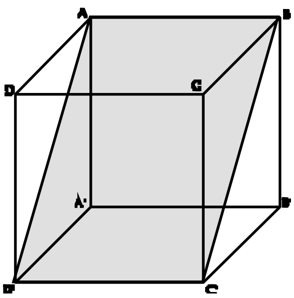
$$\text{d'où } x = \sqrt{2(1-\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}$$
$$\text{soit } x^2 = 2(1-\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1$$
$$x^2 = 2(1-\frac{x}{\sqrt{2}})(1-\frac{x}{\sqrt{2}})+1$$
$$x^2 = 2(1-\frac{2x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}\times\frac{x}{\sqrt{2}})+1$$
$$x^2 = 2-\frac{4x}{\sqrt{2}}+\frac{2x^2}{2}+1$$
$$x^2 = 3-2x\sqrt{2}+x^2$$
$$0 = 3-2x\sqrt{2}$$
$$2x\sqrt{2} = 3$$
$$x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

En calculant la valeur approchée $x \approx 1{,}060660172$ on retrouve la valeur précédente. [NDLR : cet encadrement est cohérent avec l'encadrement expérimental obtenu page précédente (45).]

autres configurations

Méthode utilisée : cette deuxième méthode consiste à placer un quadrilatère dont 2 sommets opposés sont sur 2 sommets opposés du cube et dont les deux autres sommets parcourent deux arêtes verticales ne contenant pas les deux sommets opposés du cube, et à essayer d'en extraire le plus grand carré.

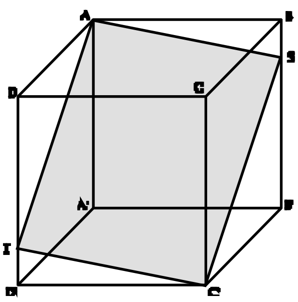
Le quadrilatère est un rectangle : le rectangle est placé de manière à ce que ses **quatre sommets** soient sur les **sommets du cube**.



Le plus grand carré qui a été extrait de ce rectangle, a ses deux côtés opposés confondus avec les côtés opposés du rectangle et a un côté égal à l'arête du cube.

Le quadrilatère est un losange : le losange est placé de manière à avoir deux sommets placés aux milieux des arêtes opposées du cube. Le plus grand carré qui a été extrait de ce losange, a sa diagonale confondue avec la petite diagonale du losange [*ST*] et a un côté égal à l'arête du cube.

Le quadrilatère est un parallélogramme : nous avons pris une position intermédiaire entre le losange et le rectangle. C'est-à-dire que nous faisons varier la position des deux autres sommets en longueur de manière à ce que ces sommets soient entre le milieu de l'arête et le sommet du cube.



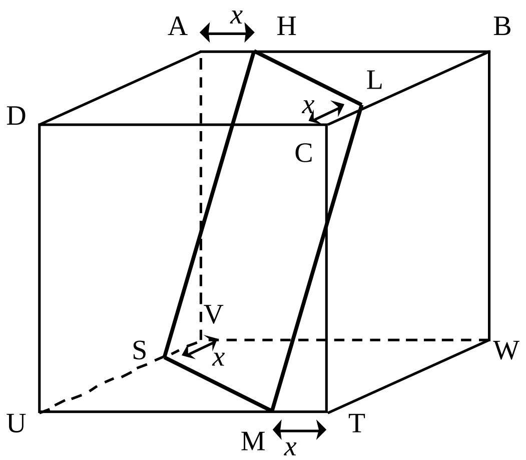
Le carré qui a été extrait de ce parallélogramme a ses deux côtés opposés confondus avec les côtés opposés du parallélogramme. Le plus grand carré trouvé par cette méthode a un côté supérieur à l'arête du cube.

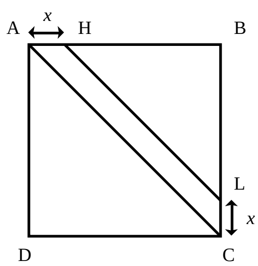
(Note : pour cette deuxième partie les résultats ont été constatés, des calculs permettent de montrer que parmi les parallèlogramme *ASC'T* on peut en trouver un sur lequel on peut construire un carré dont le côté est plus grand que 1. On peut conjecturer qu'il existe une position des sommets *S* et *T* telle que le carré tracé sur le parallélogramme *ASC'T* soit au moins le même que celui trouvé par la première méthode.)

[NDLR : au tour du collège Victor Hugo …]

un rectangle

• Construction de la figure : nous avons placé les quatre sommets *H*, *L*, *M* et *S* de telle sorte qu'ils soient tous à la distance *x* des sommets du cube.





H est placé sur (*AB*) de la même manière que *L* sur (*BC*). On a *BH*/*HA* = *BL*/*LC*. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalés, les droites (*AC*) et (*HL*) sont parallèles.

[Et de plus *HL*/*AC* = *BH*/*BA*.]

De manière identique, on démontre que les droites (*SM*) et (*VT*) sont parallèles [et que *SM*/*VT* = *US*/*UV*]. (*VT*) et (*AC*) étant parallèles, on a (*HL*) et (*SM*) qui sont parallèles [et de même longueur : *SM*/*VT* = *US*/*UV* = *BH*/*BA* = *HL*/*AC]*.

Le quadrilatère *SMLH* est donc un parallèlogramme.

• Calcul de *LH* : on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle *BLH* rectangle en *B*. On a : $HL^2 = BH^2 + BL^2 = 2BH^2$

$$\boxed{HL = \sqrt{2(1 - x)^2}}$$

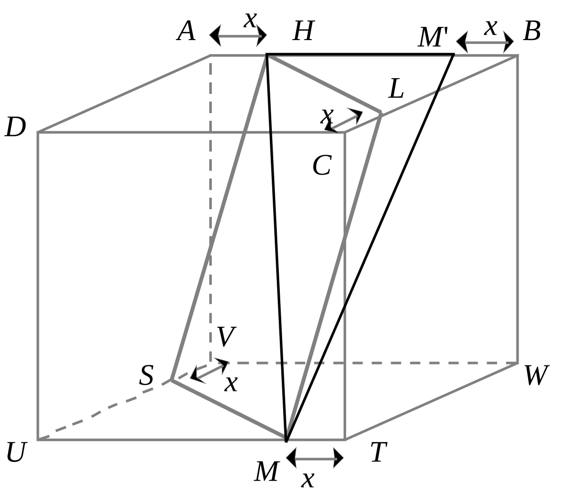
• Calcul de SH : on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle LCT rectangle en C. On a :

$$LT^2 = LC^2 + CT^2$$
$$LT^2 = x^2 + 1^2$$
$$LT = \sqrt{1 + x^2}$$

LTM est un triangle rectangle en T car (MT) est perpendiculaire à la face $BCTW$; donc (MT) est perpendiculaire à (LT).

$$LM^2 = MT^2 + LT^2$$
$$LM^2 = x^2 + 1 + x^2$$
$$LM^2 = 2x^2 + 1$$
$$\boxed{LM = \sqrt{2x^2 + 1}}$$

• Nous avons prouvé qu'en fait, les quadrilatères ainsi construits sont toujours des rectangles : prouvons que $HLMS$ est bien un rectangle. Pour cela on extrait le trapèze $MTBH$ afin de pouvoir calculer la diagonale de notre parallélogramme $HLMS$.



[Soit M' le point du segment [AB] tel que $M'B = x$.] On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle MHM' rectangle en M'. On a :

$$MH^2 = MM'^2 + HM'^2$$
$$MH^2 = (\sqrt{2})^2 + HM'^2$$

qui permet de calculer MH^2. Pour calculer la seconde diagonale, on extrait le trapèze $SULC$. Ce trapèze est superposable au précédent et donc $MH = SL$.. Le quadrilatère $SHLM$ est donc un rectangle car ses diagonales sont égales.

• Pour quelle valeur de x a-t-on un carré ? Il suffit de résoudre l'équation :

$$\sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{2(1 - x)^2}$$

c'est-à-dire $2x^2 + 1 = 2(1 - x)^2$
c'est-à-dire $2x^2 + 1 = 2(1 - 2x + x^2)$
c'est-à-dire $2x^2 + 1 = 2 - 4x + 2x^2$
c'est-à-dire $4x = 2 - 1$

Donc $x = 1/4$. Il existe donc une unique position du quadrilatère $SHLM$ permettant d'obtenir un carré.

• Calcul de l'aire de ce carré. Si $x = 1/4$ alors

$$HL = SH = \sqrt{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{2}{16} + 1}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{8} + 1} = \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{8}{8}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{\sqrt{8}}$$

On a donc :

$$HL = SH = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}060660172$$

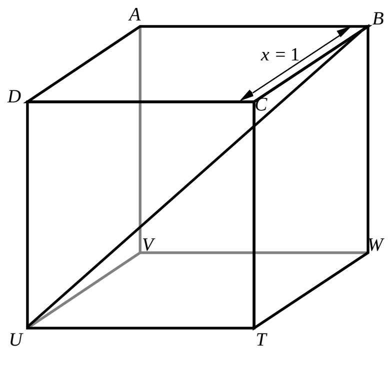
L'aire du carré est donc :

$$HL^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8} = 1{,}125$$

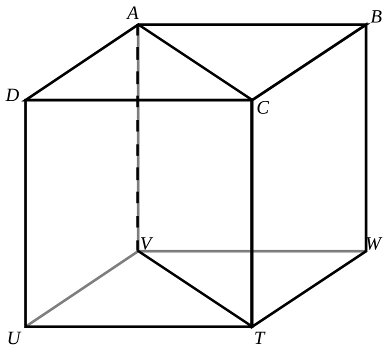
• Aire des rectangles ainsi obtenus : nous avons calculé d'une manière plus générale l'aire $\mathcal{a}$ des rectangles $SHLM$ en fonction de x :

$$\mathcal{a} = \sqrt{2x^2 + 1} \times \sqrt{2(1 - x)^2}$$

x varie entre 0 et 1. Nous pensons que cette aire sera maximale lorsque x sera nul :



Si $x = 1$, alors $\mathcal{a} = 0$



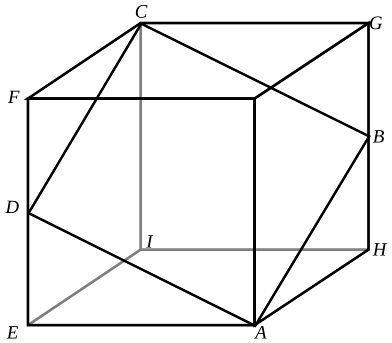
Si $x = 0$, alors

$$a = \sqrt{1} \times \sqrt{2(1 - 0)^2} = \sqrt{2}$$

$$a \approx 1{,}4142136$$

Nous sommes en train d'explorer d'autres quadrilatères en utilisant cette méthode. En particulier, nous avons obtenu un losange que nous allons tenter de modifier pour obtenir un carré.

un losange



Dans le triangle *EDA* rectangle en *E*, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$DA^2 = DE^2 + EA^2$$
$$DA = \sqrt{DE^2 + EA^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$
$$DA = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

c'est-à-dire

$$DA = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$DA = AB = BC = DC$ car les triangles *DEA*, *BGC*, *BHA* et *CFD* sont superposables. Le quadrilatère *ABCD* est donc un losange. Ce n'est pas un carré. En effet, ses diagonales ne sont pas de la même longueur.

• Calcul de *DB*
$DB = EH$ car *DEHB* est un rectangle.
$EH = \sqrt{2}$ car c'est la diagonale d'un carré de côté 1. Donc $DB = \sqrt{2}$

• Calcul de *CA*
On utilise Pythagore dans le triangle *CGA* rectangle en *G*. On a :

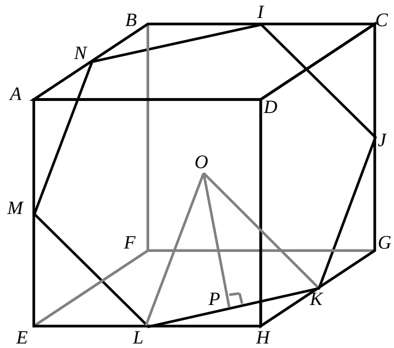
$$CA^2 = CG^2 + GA^2$$
$$CA = \sqrt{CG^2 + GA^2} = \sqrt{1^2 + 2}$$
$$CA = \sqrt{3}$$

Donc $CA \neq DB$
• Calcul de l'aire a du losange *ABCD*

$$a = \frac{DB \times CA}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$a \approx 1{,}2247449$$

Voici un dernier exemple de polygone régulier que nous avons placé dans un cube : ***l'hexagone régulier.***



Les points *I*, *J*, *K*, *L*, *M* et *N* sont les milieux des côtés respectifs [*BC*] ; [*CG*] ; [*GH*] ; [*HE*] ; [*EA*] et [*AB*]. Par Pythagore dans le triangle *ICJ* rectangle en *C*, on a :

$$IJ^2 = IC^2 + CJ^2$$
$$IJ^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$IJ^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$IJ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Puisque *I*, *J*, *K*, *L*, *M* et *N* sont les milieux des côtés du cube, on a :

$$IJ = JK = KL = LM = MN = NI.$$

De plus, les côtés opposés sont parallèles car symétriques par rapport au centre *O* du cube, ce qui prouve que *IJKLMN* est bien une figure plane possédant 6 côtés égaux. Elle est convexe c'est donc un hexagone ~~régulier~~. [NDLR : pour affirmer qu'il est régulier, il faudrait aussi s'assurer que les angles entre deux côtés sont bien toujours les mêmes.]

• Calculons l'aire de cet hexagone .

On extrait un triangle équilatéral *OLK*. [NDLR : ce triangle est évidemment isocèle, il est équilatéral parce que le côté de l'hexagone — peut-être régulier, on n'a encore pas prouvé qu'il l'est, mais on sait que ses côtés sont tous de même longueur — vaut √2/2, c'est-à-dire la moitié de la diagonale d'une face du cube, longueur égale à *OL* et à *OK* ; du coup, l'hexagone est effectivement régulier, l'angle entre deux côtés consécutifs étant toujours de 120 °.] On calcule son aire :

$$a = \frac{LK \times OP}{2}$$

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle *OPK* rectangle en *P*. On a :

$$OK^2 = PK^2 + OP^2$$
$$OP^2 = OK^2 - PK^2$$
$$OP^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$$
$$OP^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

ainsi,

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \times \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$a = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

L'aire de l'hexagone est donc : $\frac{6\sqrt{3}}{8}$

c'est-à-dire $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Si on compare les aires des 4 polygones que nous avons étudiés, on obtient le classement suivant (de la plus petite aire à la plus grande) :

- l'aire du carré : 1,125
- l'aire du losange : $\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}225$
- l'aire de l'hexagone : $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}299$
- l'aire du rectangle : $\sqrt{2} \approx 1{,}414$