autour de la cycloïde

par Jean-Luc Verley

[NDLR : texte écrit d'après l'enregistrement sonore de la conférence donnée à l'Université de Cergy.]

Dans le cadre de l'IREM de Paris VII, notre groupe M:A.T.H., à savoir "Mathématiques : Approche par les Textes Historiques" s'est proposé de développer des activités d'enseignement dans le cadre des collèges et des lycées, en faisant lire aux élèves des textes de grands mathématiciens. Nous tenons à ce qu'il s'agisse de textes originaux, même très courts.

Les mathématiques que nous avons aujourd'hui ont une *histoire*, qui est étroitement liée, comme l'histoire des sciences, à l'histoire de la philosophie, à l'histoire de la pensée humaine, à l'histoire de la technologie. Cette histoire est importante parce que, quand on vous présente les choses sous une forme assez abstraite, souvent, vous vous demandez d'où ça sort. Or chaque concept a une origine, qui a parfois été longue à se dégager, qui a été longue à émerger, et nous pensons que c'est une manière d'enrichir le contenu des mathématiques, même les mathématiques les plus élémentaires, que de les situer dans leur histoire qui est écrite à travers des textes.

A la demande de MATh.en.JEANS, j'ai souhaité traiter un sujet qui va nous permettre de parcourir tout le XVII° siècle, de rencontrer des gens dont vous connaissez les noms, des grands noms com-me Descartes, ou d'autres que ne connaissez peut-être pas, des noms de mathématiciens qui ont apporté leur pierre à l'édifice.

la cycloïde

On l'a appelée l'*Hélène des mathématiciens* pour dégager justement la fascination qu'elle a pu exercer sur les mathématiciens. Je vous rappelle qu'Hélène est la fille de Léda et de Tyndare, et qu'elle est mariée à Ménélas. Elle est d'une grande beauté, elle a été enlevée par Pâris qui était follement amoureux d'elle et ça a été l'occasion de la guerre de Troie. Il n'y a pas eu de guerre de Troie à propos de la cycloïde, mais en tout cas elle a été très courtisée par tous les mathématiciens du XVII° siècle.

Blaise Pascal va jouer un rôle très important dans cette affaire. Il a écrit une histoire de la *roulette* : cette courbe n'avait pas été étudiée dans l'antiquité. Or la géométrie grecque n'avait pas écarté les courbes engendrées par un mouvement. Archimède a écrit un traité sur les spirales, dont voici la définition avec ses propres mots :

> *lorsqu'une droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira dans le plan une spirale.*

Citons aussi la quadratrice d'Hippias. Donc on n'en était pas resté au cercle et à la droite, ni même aux coniques : l'Antiquité avait étudié des quantités de courbes. Et chose curieuse, cette cycloïde, qui se présente de manière tout à fait naturelle, n'avait pas été étudiée par les Anciens.

une ligne si commune

Il s'agit d'une roue, d'un cercle, d'une circonférence, qui roule sans glissement sur une droite. Cette roue roule *sans glissement* : j'insiste sur ces mots parce que ça va jouer un rôle fondamental.

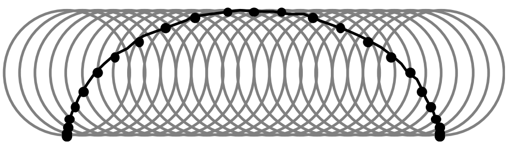
On considère un point lié à cette courbe et on regarde la trajectoire que ce point va décrire. Je peux, par exemple, supposer que je pars d'un point qui, quand la roue commence tourner, est situé sur le sol. Au bout d'un certain parcours, le point occupera une position M.

Et *roulement sans glissement* ça veut dire que le point qui était en bas va se retrouver sur la circonférence à une distance exactement égale à la distance qui a été parcourue par la roue.

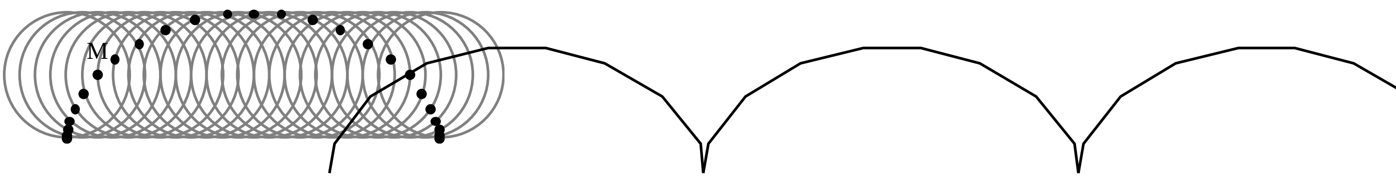
Blaise Pascal l'a décrite ainsi, dans son “Histoire de la roulette” :

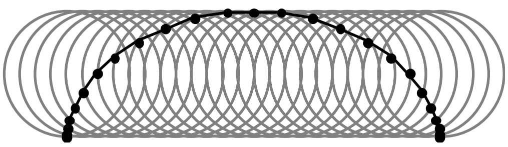
> *La Roulette est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que le clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le mouvement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane.*

B. Pascal, *Histoire de la Roulette.*



Quand la roue a fait un tour complet, le point original est revenu au sol, on a donc des ***arches*** de cycloïde qui se répètent, ce qui donne une courbe, avec des tangentes verticales.





Il est *probable* que les Anciens ont remarqué cette courbe et qu'ils ont considéré que c'est une demi-ellipse.

Toujours est-il que Galilée s'y intéresse. On dit que l'un des ponts de l'Arno (le fleuve qui coule à Florence) serait en forme de cycloïde et non pas d'ellipse. Au début du XVII° siècle, vers 1630, vous trouvez en Italie les mathématiciens et les physiciens les plus célèbres ; à cette même époque, le Père Mersenne, en France, s'intéresse à cette courbe. C'était un esprit très curieux ; il était en correspondance avec tous les grands esprits de son époque et immédiatement, il lance des quantités de gens sur la piste de cette courbe : *trouvez ses propriétés.*

Je ne veux pas être trop technique ; dans les annexes, vous avez, en termes modernes, la manière d'étudier cette courbe. On trouve facilement ce qu'on appelle l'équation paramétrique de la courbe : en prenant un paramètre t (qui est un angle) on arrive à exprimer en fonction de ce paramètre t, ce qu'on appelle les équations de la cycloïde. On a :

$$x = x(t) \text{ et } y = y(t), \text{ où } t \text{ varie.}$$

C'est ce qu'on appelle l'équation paramétrique de la courbe. Cette équation paramétrique permet de décrire cette courbe, et on peut par des techniques de calcul différentiel et de calcul intégral, en déduire les principales propriétés géométriques.

Mais au XVII° siècle bien sûr les gens n'avaient pas ces techniques … on va voir comment ils s'y sont pris. Commençons par un phénomène assez amusant, et qui est lié, sinon à la cycloïde, du moins à la notion de "rouler sans glisser". C'est ce qu'on appelle le paradoxe d'Aristote.

Aristote (384-322 av. J.-C.)

Aristote est un penseur, un des premiers scientifiques. Il a fait une œuvre considérable d'organisation de la physique, des sciences de la nature, importance qui s'est avérée ensuite extrêmement négative et lourde, puisqu'ensuite les textes d'Aristote ont été considérés comme la "bible des sciences" pendant tout le Moyen-Age.

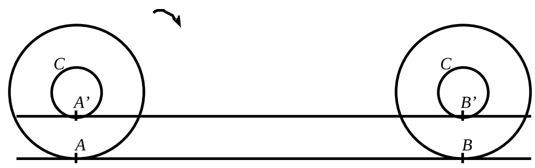
Il y avait des choses excellentes chez Aristote, il y en avait d'autres qui l'étaient moins. Et la science du XVII° siècle n'a pu émerger qu'en prenant de la distance avec Aristote et même en luttant contre ses théories. Il a fallu abattre un *monument* de presque deux mille ans, il a fallu *tuer* Aristote, se débarrasser de son influence, qui bloquait complètement le développement des sciences sur le plan idéologique.

le paradoxe de la roue d'Aristote

Dans *Les mécaniques*, qui est un texte d'un élève d'Aristote, on trouve l'apparent paradoxe suivant.

Imaginons une roue qui roule sans glissement sur une droite. Elle fait un tour complet, et je considère une petite roue, concentrique, liée à la première : vous prenez une roue, vous considérez le pneu et la jante. Il y a donc un petit cercle qui tourne en même temps que la roue.

Quand la grande roue va rouler sur le segment, la longueur du cercle sera égale à la longueur du segment. Or que se passe-t-il pour la petite roue ? La petite roue, en même temps, a roulé sur une droite parallèle.



A chaque instant la petite roue roule sur le segment [A'B'], on va revenir en B avec le point A' qui va lui à nouveau se retrouver ici au point le plus bas.

Les distances parcourues étant égales, on en conclut que la longueur du petit cercle égale la longueur du grand cercle. C'est un peu intrigant : on a une démonstration du fait que deux cercles de rayons différents ont la même longueur.

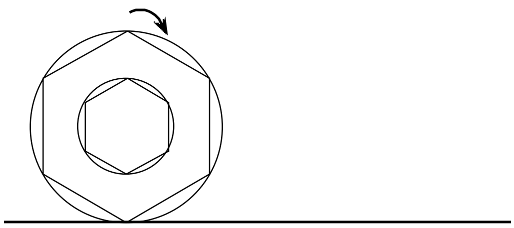
Alors qu'est-ce qui ne va pas ?

il a glissé

Le petit cercle n'a pas roulé sur la ligne comme le grand cercle qui a, lui, roulé sans glisser. Si vous avancez avec *C*, la distance effectivement parcourue sera plus grande que la longueur du cercle ; l'explication c'est qu'il y a glissement.

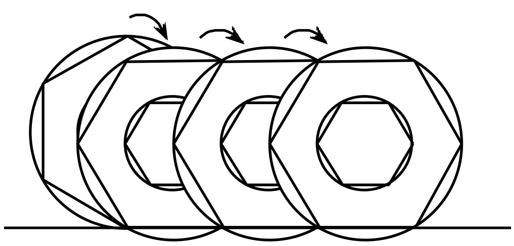
Ça a posé aux gens des problèmes difficiles. On va essayer de comprendre sur un petit dessin comment ils ont essayé d'y répondre. L'idée, c'est que le cercle a toujours été considéré comme une limite de polygones. Donc on va inscrire dans chaque cercle un polygone régulier et voir ce qui se passe.

Imaginons qu'il y a un grand hexagone et un petit hexagone.



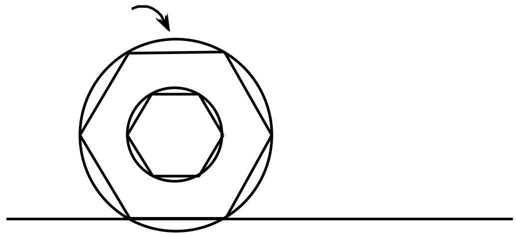
Pour que vous compreniez bien mon dessin, il faut imaginer que j'ai deux hexagones et puis je fais tourner tout ça. Alors qu'est-ce qui va se passer ?

Le premier côté du grand hexagone va tourner et venir s'appliquer sur l'horizontale, puis le côté suivant va venir à la suite, etc.

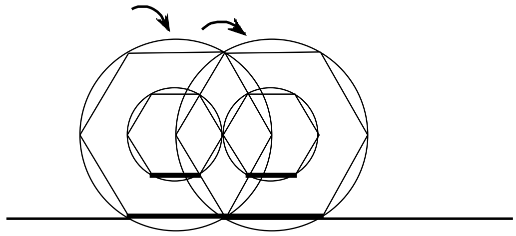


Que se passe-t-il maintenant pour le ***petit*** hexagone ?

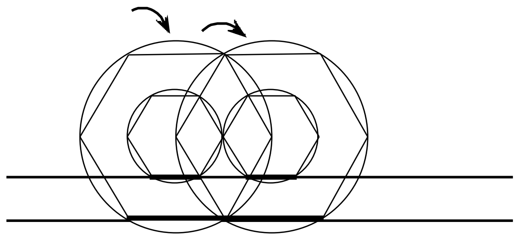
Le premier côté du petit hexagone va venir s'appliquer sur l'autre segment horizontal,



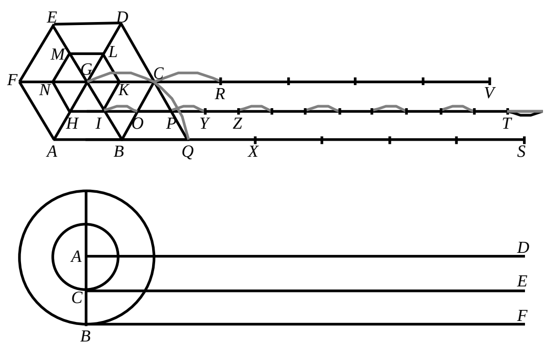
et quand ce sera fait, qu'est-ce qui va se passer ?



Il va y avoir un trou avant que le côté suivant ne vienne s'appliquer etc. Donc je vais avoir des trous.



Voici ce que dessine Galilée :



Ça explique, au niveau d'un polygone, le phénomène auquel on s'intéresse. Et ce qui est amusant, c'est de voir comment les gens ont essayé de se dépêtrer de cette affaire-là. J'en parle parce que c'est un paradoxe classique, et il est lié à la cycloïde.

Le paradoxe de la roue est évoqué dans un très grand texte de Galilée : les *discorsi*, c'est-à-dire *les discours concernant deux sciences nouvelles*. "Les discours" est un texte écrit en italien, en langue vernaculaire, ce qui est exceptionnel pour un texte scientifique.

C'est une conversation entre trois personnages, qui s'appellent Salviati, Sagredo, Simplicius. C'est un très, très beau texte — qui existe en traduction française — et dans lequel ces trois personnages vont parler de science. Salviati et Sagredo sont des personnages qui existent. Salviati est un ami de Galilée, c'est un aristocrate riche (et Galilée ira souvent chez lui. Ils sont très amis). Sagredo est un diplomate, et Simplicius est un personnage imaginaire.

Salviati va symboliser, défendre, les idées de Galilée.

Sagredo est un homme de bien, un homme ouvert, qui n'a pas d'a priori, pas de préjugé. Il joue le rôle de *clown blanc*, c'est le personnage intelligent de l'histoire. Il ne demande qu'une chose, c'est qu'on le persuade de la vérité scientifique de telle ou telle chose, qu'on lui explique les théories scientifiques.

Le troisième personnage, Simplicius, représente les érudits enfermés dans la tradition aristotélicienne. Donc Simplicius, c'est tout ce que veut combattre Galilée, c'est-à-dire les *scolastiques* contre lesquels il se bat pour faire arriver les idées nouvelles, idées nouvelles qui sont : la Terre tourne autour du Soleil c'est-à-dire les idées de Copernic, les idées nouvelles de la physique, l'existence de satellites de Jupiter, etc, toutes ces choses qui bouleversaient la conception qu'on avait alors du monde, qui bouleversaient les mathématiques, qui bouleversaient la physique.

Il y a eu des bagarres, il y a eu le procès de Galilée, le lieu n'était pas d'en parler ici, mais enfin, le renouveau de la science en Italie, en particulier au plan des sciences expérimentales, l'utilisation des mathématiques comme langage profond de la science (c'est aussi une des idées de Galilée), se sont heurtés à des résistances extrêmement vives. Ce texte est donc une attaque contre la scolastique, représentée par Simplicius.

Dans la première journée Simplicius s'occupe activement du paradoxe d'Aristote. C'est une occasion pour Galilée de donner son explication d'un certain nombre de phénomènes. Vous voyez bien que ça pose un problème très important parce que plus le nombre de côtés de nos polygones va augmenter, plus ils vont tendre vers le cercle. On va se trouver avec les infiniment petits parcourus par le petit cercle ; il y aura toujours des trous, donc ce sera des infiniment petits avec des trous. Il n'y aura pas de continuité : on voit bien que le petit hexagone saute quand le grand tourne. Salviati dit ceci dans les premières journées :

> *Puisque nous voilà dans des paradoxes, voyons qu'il n'est pas possible de démontrer que dans un continu d'étendue finie puisse se trouver un nombre infini de petits vides.*

Est-il possible de démontrer que dans un continu d'étendue finie puisse se trouver un nombre infini de petits vides ? [les petits vides qui vont rester quand on passe à la limite]

On prend un polygone avec un nombre de côtés de plus en plus grand. Pour le grand polygone, les longueurs (de plus en plus petites) vont se succéder, d'une manière continue.

Tandis que pour le petit disque, il y aura une infinité de ce qu'il appelle des petits vides, des figures de plus en plus petites correspondant aux trous que vous aviez pour le petit hexagone. Plus il y a de côtés dans le polygone, plus il y a de trous. Les trous sont petits, il y aura une infinité de petits trous, cette infinité de petits trous qui vont faire que l'on n'a pas rempli l'espace parcouru.

Voici maintenant comment Descartes, à son tour, explique le point de vue de Galilée sur ce paradoxe :

> *Ce qu'il dit pour trouver ces petits vides est un sophisme car l'hexagone qu'il propose ne laisse rien de vide dans l'espace par où il passe et chacune de ses parties se meut d'un mouvement continu.*

C'est un vrai paradoxe quand on passe à la limite. Quand on a compris le coup du petit hexagone qui saute, ça va. Mais passer à la limite, voilà qui pose des problèmes important sur les quantités infinitésimales : ça va consister à couper les intervalles en un nombre de plus en plus grand de parties de plus en plus petites et par un passage à la limite (pour ceux d'entre vous qui sont au lycée) d'obtenir des conclusions. L'introduction de l'infini dans les raisonnements peut créer des paradoxes (Zénon) et les géomètres grecs le rejetaient. Ce n'est qu'au XVIII° siècle que l'on a essayé s'apprivoiser l'infini avec l'émergence du calcul infinitésimal.

revenons à notre cycloïde

Notre ami Mersenne (1588-1648), religieux de l'ordre des minimes, est un personnage très actif, qui joue un rôle de premier plan dans la vie scientifique française. Dès qu'il entend parler de la cycloïde, il se passionne, a une correspondance avec Galilée et de nombreux mathématiciens et il propose les problèmes fondamentaux qu'on se pose en géométrie, pour une courbe :
• Est-ce qu'on peut calculer l'aire qu'elle limite ?
• Est-ce qu'on peut déterminer ses tangentes ?

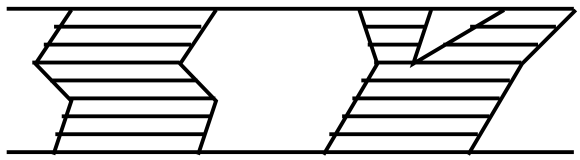
Mersenne, donc, lance les mathématiciens sur le calcul de l'aire limitée par une arche, et c'est un mathématicien français, Roberval (1602-1675), qui résout ce problème : il montre que l'aire d'une arche de cycloïde est égale à trois fois l'aire du cercle générateur (1635).

Pour ce faire, il utilise une méthode qu'il a découverte simultanément avec le mathématicien jésuite Cavalieri. Elle s'appelle …

la méthode des indivisibles

La méthode des indivisibles est une méthode de comparaison d'aires qui repose sur le principe suivant, connu sous le nom de *principe de Cavalieri*. [NDLR : voir aussi page 64.]

Supposons que j'aie deux surfaces comprises entre deux lignes parallèles.



Et supposons que quelle que soit la manière dont on les coupe par des droites parallèles, les deux surfaces sont coupées suivant un segment ou plusieurs segments dont la somme des longueurs ou les longueurs sont égales.

La méthode des indivisibles consiste à conclure que ces deux surfaces — hachurées sur la figure — sont égales.

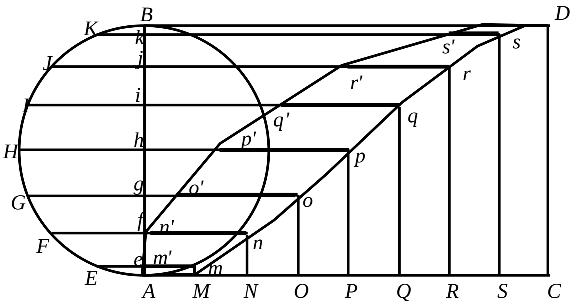
De nos jours, on prendrait des petites tranches, on dirait que les surfaces sont approchées par des petites tranches qui sont (en gros) égales, et qu'on peut calculer l'aire à l'aide de ces petites tranches, par passage à la limite en augmentant le nombre de points de décomposition.

Ce principe se situe au niveau du calcul intégral (c'est au programme de Terminale), mais bien avant l'invention du calcul intégral : on considère les *indivisibles*, qui sont des choses qui n'ont pas d'épaisseur, et *qui ne sont pas réduites à un segment*.

Et on considère la surface comme la réunion de toutes ces quantités indivisibles. (On peut donner à ça un sens très clair dans le cadre du calcul intégral actuel.)

l'idée de Roberval

L'idée de Roberval est très remarquable. On part de la position initiale du cercle générateur.



Le principe consiste donc à découper le demi-cercle *AB* en un certain nombre de parties égales et à découper l'intervalle sur lequel la roue roule en un certain nombre de parties égales entre elles aussi. Ça donne les points *E*, *F*, etc, d'une part et les points *M*, *N*, etc d'autre part. Puisqu'il y a roulement sans glissement ces longueurs sont chacune égale à chacune. Je mets ici *e*, *f*, etc.

Ensuite on mène par *E* la parallèle à *AC* j'obtiendrai un point *m* à la verticale de M puis de même j'obtiendrai ici un point *n* puis etc ; alors, on retire la longueur *Ee* à partir de *m*, on obtient un point *m*', ensuite on retire la longueur *Ff* à partir de *n*, on obtient un point *n*', etc.

Il est facile de voir que l'on décrit ainsi la cycloïde, et il est facile de voir ce que vont décrire les points *m*, *n*, etc : ces autres points vont décrire une sinusoïde (pour ceux qui savent ce que c'est, c'est facile à voir par projection).

Donc si je résume mon petit dessin, j'ai le demi-cercle, la demi-cycloïde, et la courbe à laquelle je viens de faire allusion, que Roberval appelle la compagne de la cycloïde.

Il est facile de voir que cette courbe admet un centre de symétrie et que l'aire limitée entre cette courbe et la cycloïde est égale à l'aire du demi-cercle.

On sait que l'aire du demi-cercle est égale à $(1/2)\pi R^2$ et l'aire du rectangle (largeur $2R$, longueur πR) est $2\pi R^2$.

Maintenant, nous n'avons plus qu'à dire que l'aire de la demi-arche de cycloïde, c'est l'aire limitée entre la cycloïde et sa compagne, *plus* l'aire sous la compagne :

• L'aire limitée sous la compagne est la moitié de l'aire du rectangle puisqu'elle a un centre de symétrie, donc elle est égale à πR^2

• L'aire limitée entre la cycloïde et sa compagne est la même que l'aire du demi-cercle (*c'est* la méthode des indivisibles) donc c'est $\pi R^2/2$

$\pi R^2 + (1/2)\pi R^2$, ça fait donc bien $(3/2)\pi R^2$, c'est-à-dire que l'arche complète c'est $3\pi R^2$, c'est-à-dire trois fois l'aire du cercle générateur.

La démonstration est simple, si l'on admet le principe des indivisibles, et donne un résultat spectaculaire.

La cycloïde a ainsi été l'occasion d'un beau résultat, mais il restait encore des quantités de problèmes sur cette courbe. Par exemple, Roberval détermine les tangentes à cette cycloïde par une méthode cinématique très simple.

Et c'est ici qu'intervient un personnage que vous connaissez déjà : Blaise Pascal.

Blaise Pascal (1623-1662)

Blaise Pascal est bien sûr un philosophe, mais aussi un scientifique, et (on l'oublie trop) un scientifique de très haut niveau.

Il est le premier à faire des théories sur le fait que la pression atmosphérique diminue avec l'altitude. Il est allé lui-même faire des expériences au Puy de Dôme pour le constater. Il écrit un traité de l'équilibre des liqueurs dans lequel il expose ses théories en hydrostatique.

un remarquable mathématicien

A son arrivée à Paris en 1631, Pascal se trouve plongé dans le milieu scientifique parisien (son père, Etienne Pascal, lui aussi mathématicien, est un proche de Mersenne). Son traité des coniques, écrit à 17 ans, est fondamental dans la genèse de la géométrie projective. Et rappelons aussi qu'avec l'aide de son père il construit à partir de 1642 sa machine arithmétique, première machine mécanique de calcul ; le choix du nom de Pascal pour désigner un langage informatique très performant est un hommage à ce précurseur. La correspondance qu'il échange avec Fermat en 1654-55 est l'acte de naissance du calcul des probabilités. [NDLR : à ce propos, voir l'article de Claude Dellacherie, page 207.]

Mais venons-en à la cycloïde. En 1657, Pascal s'était détaché des sciences et était très proche des jansenistes de Port Royal, qui commençaient à être persécutés. Sous la pression de ses amis, il veut montrer qu'un janséniste peut être un très grand scientifique, et il va le faire de manière très spectaculaire. La tradition veut que c'est lors d'une insomnie provoquée par une rage de dent, qu'il a découvert d'importantes propriétés mathématiques nouvelles de la cycloïde, liées à des considérations infinitésimales.

En juin 1658, il va défier les mathématiciens de son époque de donner les démonstrations d'un certain nombre de résultats qu'il a obtenus sur la cycloïde. Ce genre de défi était relativement courant au XVI° siècle : rappelons les polémiques entre Cardan, Tartaglia, Del Ferro sur la résolution des équations du 3ème et du 4ème degré.

Le pouvoir scientifique était alors celui que j'ai envie d'appeler celui du “sorcier” : son pouvoir vient de ce qu'il est seul à savoir. Au contraire, comme vous le savez, de nos jours c'est tout le contraire dans le monde scientifique. Le pouvoir vient de la priorité de la *publication* du résultat et de sa diffusion. C'est là le passage du “sorcier” au scientifique moderne.

Toujours est-il que là, pour Pascal, c'est ambigu puisqu'il va proposer un prix aux mathématiciens en leur disant : est-ce que vous savez le faire ? Les termes du prix sont très clairs, et il est fait sur ses propres deniers, c'est-à-dire que la somme qui va être donnée, c'est lui qui la payera.

Ce défi aux mathématiciens commence ainsi :

> *Nous étant occupé il y a quelques mois de diverses questions touchant la cycloïde et son centre de gravité, plusieurs problèmes vinrent se présenter à notre esprit. Nous en demandons instamment la solution aux géomètres les plus illustres de l'univers, offrant [...] un prix, non pour rémunérer leurs efforts, loin de nous cette pensée, pour leur témoigner notre déférence et rendre publiquement hommage à leurs mérites.*

Le délai échu, Pascal considère que personne n'a effectivement pu résoudre les problèmes posés ; le prix ne sera pas attribué et il va publier ses solutions, sous un pseudonyme, Amos Dettonville. Ce sont les *Lettres contenant quelques unes de ses inventions de géométrie* qui contiennent la résolution de tous les problèmes touchant la roulette qu'il avait proposés publiquement au mois de juin 1658

Sir Wren (1632-1723)

Parmi les réponses reçues par Pascal, l'une d'entre elles, bien que ne répondant pas aux questions posées, fit sensation. Son auteur est Wren, dont la réputation d'être l'un des plus grands architectes de son temps (on lui doit par exemple la cathédrale Saint Paul à Londres) fait souvent oublier qu'il fut aussi un bon mathématicien.

....

[NDLR : à propos de Cardan, Tartaglia, lire l'article de Jean-Paul Cardinal, page 231 ; à propos du monde scientifique moderne, lire l'article de Thierry Coulhon, page 19.]

Wren donne la solution d'un problème auquel personne n'avait pensé, la *rectification* de la cycloïde : la longueur d'une arche de cycloïde est égale à huit fois le rayon du cercle générateur.

Ce résultat, très surprenant dans sa simplicité, était contraire à l'opinion admise implicitement. Descartes, par exemple, pensait que quand on a une ligne *courbe*, la longueur de cette ligne courbe n'est commensurable à aucune ligne droite liée géométriquement à la construction de la figure. Il pensait évidemment au cas du cercle, dont la longueur n'est pas commensurable au rayon, et pensait que la propriété est générale, liée précisément à la courbure. Bien entendu, le résultat de Wren, fournissait un contre-exemple.

isochronie

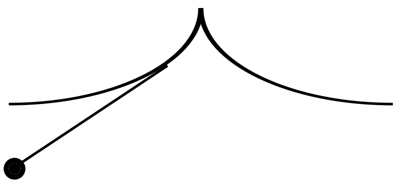
L'histoire de la cycloïde n'est pas finie. On tombe sur un autre type de préoccupations, avec un grand mathématicien, Huygens.

Christiaan Huygens (1629-1695), d'origine hollandaise, s'était beaucoup intéressé aux travaux de Pascal, mais va intervenir dans l'histoire de la cycloïde à propos d'un problème d'horlogerie.

En mer, par exemple, pour calculer une latitude il suffit de mesurer la hauteur du soleil. Donc avec un angle, simplement, vous pouvez repérer votre latitude mais vous ne pouvez mesurer votre longitude que si vous pouvez comparer l'heure qu'il est, l'heure locale, à une heure de référence, par exemple celle du point de départ. S'est donc posé le problème de transporter son heure d'origine, donc d'avoir des horloges suffisamment stables pour pouvoir conserver une heure donnée.

Le problème principal, c'est d'obtenir l'isochronisme des battements du pendule. En première approximation il y a isochronisme des petites oscillations mais, au bout d'un certain temps, et si le pendule a un mouvement grand, il n'y a plus isochronisme et dans ce cas vous ne pouvez pas être certain de garder l'heure (il était hors de question d'emporter des clepsydres !).

Huygens se pose alors le problème suivant : on va imposer des contraintes à ce pendule en mettant ce que les horlogers appellent des joues, des parties métalliques : quand le pendule va bouger, son fil va venir s'enrouler sur cette partie, puis partir tangentiellement.



Les joues l'obligent à se plier, il continue sur la tangente. Huygens se demande quelles sont les joues qu'il faudrait choisir pour obtenir un mouvement qui soit strictement isochrone mathématiquement, c'est-à-dire pour obtenir qu'effectivement il y ait isochronisme des battements du pendule.

Il trouve quoi ? Une cycloïde !

Il a cru qu'il allait gagner beaucoup d'argent, car le problème des longitudes était un problème d'une grande importance économique. En fait, il a résolu un problème théorique ce qui lui a permis de poser un autre problème qui est un problème de mathématiques, de géométrie :

On part d'un point sur la courbe, on a une ficelle et on l'enroule, on a un point fixe de cette ficelle, on enroule cette ficelle sur la courbe en tirant. J'ai un point fixe sur une courbe, je prends une ficelle, je prends un point de cette ficelle, et je déroule : quel va être l'ensemble décrit par le point de la ficelle ? C'est ce qu'on appelle la développée de la courbe initiale.

Et quand on part d'une cycloïde, qu'est-ce qu'on trouve ? Une cycloïde ! On retombe encore sur une cycloïde !

On a cette propriété mathématique : la développée d'une cycloïde est une cycloïde.

Voilà donc encore la cycloïde qui réapparaît dans un problème qui est encore cette fois-ci tout à fait différent.

Et ce n'est pas fini. Tout le monde s'est intéressé à cette courbe qui possède vraiment des propriétés magiques et multiformes.

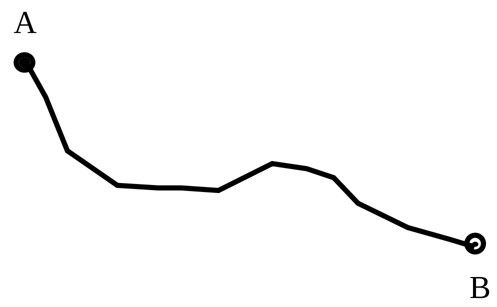
Entre temps, se sont développées des techniques mathématiques tout à fait nouvelles, du côté des Anglais avec Newton et son école, du côté *du continent*, avec Leibniz et les frères Bernoulli. C'est le début d'une nouvelle branche des mathématiques, qu'on appelle le calcul infinitésimal ; il va s'élaborer à partir d'exemples de plus en plus généraux, au XVII° siècle, et culminer, vers 1675-1680, avec la création de ce qu'on appelle actuellement le calcul différentiel et intégral.

L'analyse de Descartes ramenait l'étude d'une courbe à l'étude d'un polynôme, ce qu'on appelle l'équation de la courbe. Le calcul différentiel et intégral s'applique à des équations — ou, comme on dira bientôt, à des fonctions — ce qui donne un outil extrêmement puissant pour attaquer des quantités de problèmes. Au point que ça va tuer la géométrie pure pour un temps : les problèmes de calculs de longueurs et d'aires se traitent par le calcul intégral, les problèmes de tangentes se traitent par le calcul différentiel. Ces nouvelles méthodes sont vraiment opérationnelles à la fin du XVII° siècle et donnent d'innombrables résultats nouveaux (publiés par exemple dans le journal *Acta Eruditorum de Leipzig*, fondé par Leibniz).

la courbe brachystochrone

Il y a un problème qui là encore fait intervenir tout le gratin des mathématiques, c'est le problème de ce qu'on appelle la brachystochrone, posé par Jacques Bernoulli vers 1696-1697.

Le problème est le suivant : on prend un point *A*, un point *B*, on suppose un point pesant qui va tomber en suivant une certaine courbe, pour aller de *A* à *B*. Il est lié à la courbe, mais il est soumis à son propre poids : on le lâche sans vitesse le long de la courbe. Imaginez que la courbe est une gouttière, et le point pesant une bille de métal ; il va suivre cette gouttière, et descendre le long de la courbe, jusqu'au point B.



Le problème qu'on se pose est :

quelle est la courbe joignant A et B telle que le temps de descente soit minimum ?

L'intuition nous conduirait peut-être à penser que la courbe de plus rapide descente est le segment [AB], mais l'intuition nous trompe, car nous confondons implicitement distance et temps de parcours !

Ce n'est pas un problème évident parce que quand on veut le formaliser en mathématiques, si j'appelle $y = y(x)$ l'équation de la courbe, le temps est donné par l'intégrale d'une expression dans laquelle figure la fonction *inconnue* $y(x)$.

le calcul des variations

L'étude de tels problèmes constituent le *calcul des variations*. Cela consiste à trouver, parmi une famille de courbes, celle pour laquelle une quantité liée à chaque courbe est maximum ou minimum.

Par exemple, si on se donne des courbes fermées de longueur donnée, et si on veut trouver celle qui va limiter la plus grande surface, c'est le cercle. On le savait tout à fait intuitivement depuis bien longtemps, mais la démonstration parfaitement rigoureuse date de la fin du XIX° siècle.

Des problèmes aussi simples que celui-là sont des problèmes … difficiles ! Les problèmes de calcul des variations sont des problèmes qu’on ne peut aborder ni en Terminale Scientifique, ni même en DEUG.

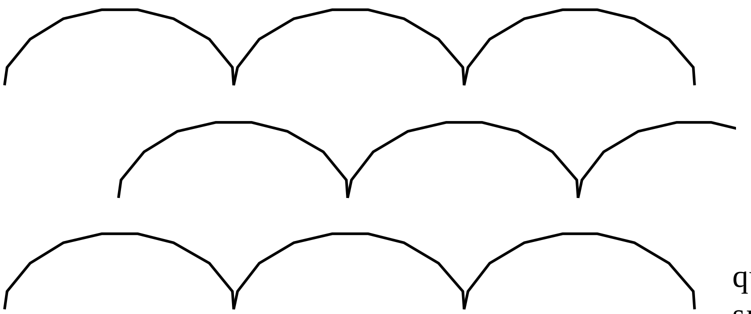
Tous les grands mathématiciens de l’époque se sont intéressés à la brachystochrone : Leibniz lui-même, Jean, Jacques Bernoulli, puis Newton envoient leurs solutions, et finalement Jacques Bernoulli d’un côté, Jean Bernoulli de l’autre, (c’étaient deux frères qui se haïssaient), arrivent à la solution.

Et quelle est la courbe brachystochrone ? Une cycloïde bien entendu ! C’est une cycloïde et ce n’est pas du tout évident à démontrer.

Le caractère brachystochrone de la cycloïde se vérifie expérimentalement. Vous pouvez voir un modèle d’une telle expérience au musée de la Villette, ou au musée d’histoire des sciences de Florence. On matérialise par des gouttières une cycloïde et un segment joignant les points *A* et *B*. Deux clapets permettent de libérer simultanément deux billes métalliques identiques, sans vitesse initiale, soumises à leur seul poids. On constate très clairement que la bille qui a suivi la cycloïde arrive en *B* avant l’autre.

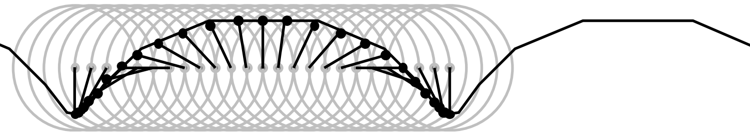
La cycloïde est la courbe isochrone pour le pendule de Huygens, c’est la courbe brachystochrone pour le problème de calcul des variations du temps minimum pour descendre d’un point à un autre.

Avec ça la cycloïde a tout pour être une vedette des mathématiques !

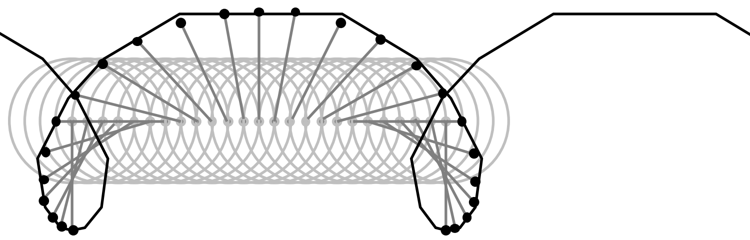


la roue — le retour

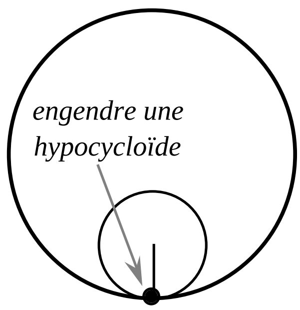
On peut s’intéresser à d’autres courbes, une manière de généralisation, pour terminer. Quand la roue roule, au lieu de prendre un point de la circonférence, on peut prendre un point qui soit à l’intérieur de la courbe : on obtient ce qu’on appelle une cycloïde raccourcie.



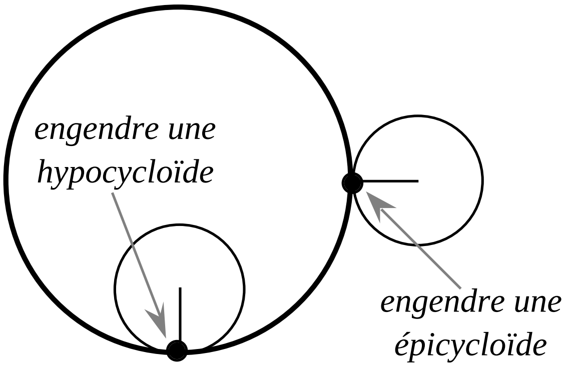
On peut aussi imaginer qu’on fixe un point extérieur, qu’on cherche le mouvement d’un point qu’on imagine lié au cercle mais extérieur au cercle : alors on obtient une cycloïde allongée.

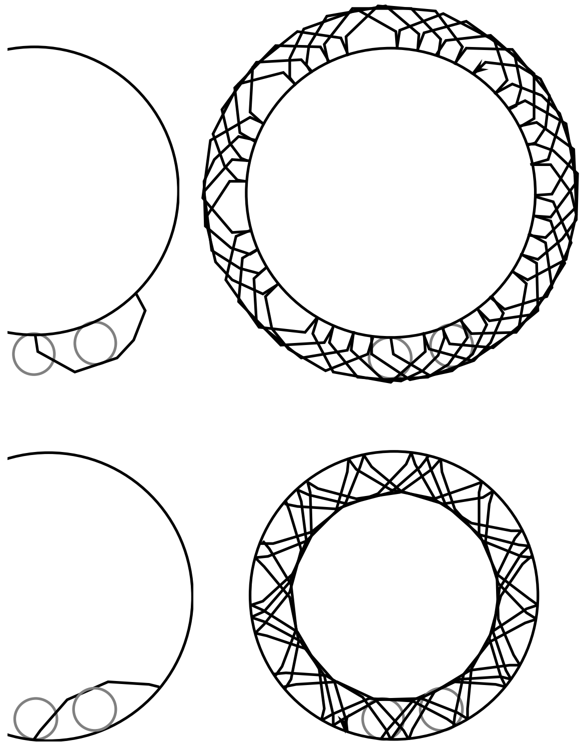


Et puis on peut aussi étudier ce qu’on appelle les courbes cycloïdales, plus précisément épicycloïdales ou hypocycloïdales : au lieu de faire rouler un cercle sans glissement sur une droite, on peut le faire rouler à l’intérieur d’un autre et chercher le mouvement d’un point du cercle. Il y a des jeux où, au moyen d’engrenages, on réalise un tel mouvement. Cela donne des courbes, dites hypocycloïdes,



qui se referment ou qui ne se referment pas suivant que le rapport des rayons des deux cercles est un nombre rationnel ou pas.





Et puis on peut aussi faire tourner le cercle à l'extérieur de l'autre ; alors on obtient des épicycloïdes avec les mêmes conditions pour qu'elles se ferment ou pas. Avec un *spirographe*, vous tracez ces courbes très facilement et vous pouvez modifier le rapport des rayons des cercles.

Ces épicycloïdes jouaient un rôle important dans l'Antiquité dans l'explication du mouvement des planètes par Ptolémée. Les Anciens, dans l'explication des mouvements planétaires, n'acceptaient que les cercles, et les mouvements uniformes sur ces cercles. Les mouvements des planètes sont quand même beaucoup plus compliqués que ça, et pour en rendre compte ils étaient amenés à considérer les mouvements des planètes qui tournaient les unes autour des autres. On obtenait ainsi des épicycloïdes.

C'est ainsi que Ptolémée explique le mouvement de Mars par exemple. Quand on l'observe, le mouvement de Mars est assez surprenant puisque Mars quelquefois s'arrête, puis revient sur ses pas, puis repart. Pour expliquer ça avec des mouvements circulaires uniformes, il fallait être très malin, et Ptolémée était très malin : il a inventé des mouvements cycloïdaux superposés les uns par rapport aux autres.

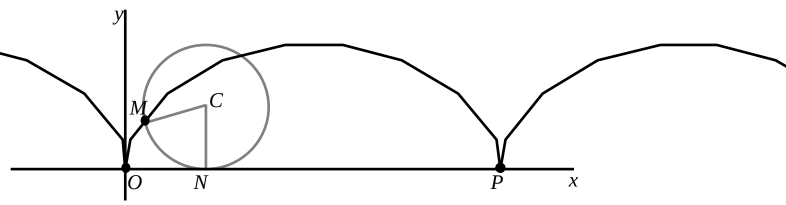
Enfin en technologie, il y a des engrenages cycloïdaux.

Voilà, on a parcouru un moment du XVII° siècle sur une courbe nouvelle qui apparaît à ce moment-là, on a fait de l'histoire, on a pu voir des jolies démonstrations.

annexes sur la cycloïde

équations

C'est la courbe décrite par un point M d'un cercle de rayon R qui roule sans glisser sur un axe Ox.



Ainsi, l'arc NM du cercle est égal à ON. Si on désigne par t une mesure de l'angle au centre MCN, le point M est défini par

$$\begin{cases} x = R\,(t - \sin t) \\ y = R\,(1 - \cos t) \end{cases}$$

La courbe est périodique avec $OP = 2\,\pi\,R$.

équation différentielle

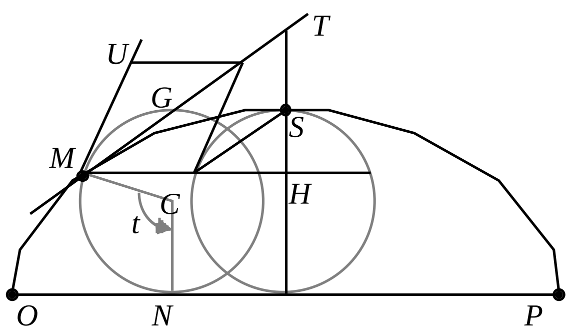
$$\sqrt{y\,(2\,R - y)}\; dx = y\, dy$$

aire

L'aire d'une arche est le triple de l'aire du cercle générateur, soit $3\,\pi\,R^2$

tangente

La tangente *MT* au point *M* est la bissectrice de l'angle *HMU*, avec *MH* parallèle à la base et *MU* tangente en *M* au cercle générateur.



rectification

La longueur de l'arc *SM* de la cycloïde est le double de la longueur *MG*. En particulier, la longueur d'une arche est égale à 8 *R*.

la Cycloïde ou Roulette : chronologie.

1615 — Mersenne remarque la roulette et propose l'étude de cette courbe aux savants.

1635 — Roberval détermine l'aire d'une arche (quadrature) de la cycloïde et construit la tangente en un point. Il nomme la courbe *Trochoïde*.

1638 — Galilée, dans ses *Discorsi*, étudie le paradoxe de la roue d'Aristote.

1638 — Descartes et Fermat étudient la cycloïde.

1644 — Torricelli attribue à Galilée et à ses élèves la découverte et l'étude de la roulette.

juin 1658 — Pascal, sous le pseudonyme d'Amos Dettonville, met en concours la détermination de centres de gravité de surfaces et de volumes liés à la cycloïde.

août 1658 — Wren détermine la longueur d'un arc de cycloïde (rectification de la courbe).

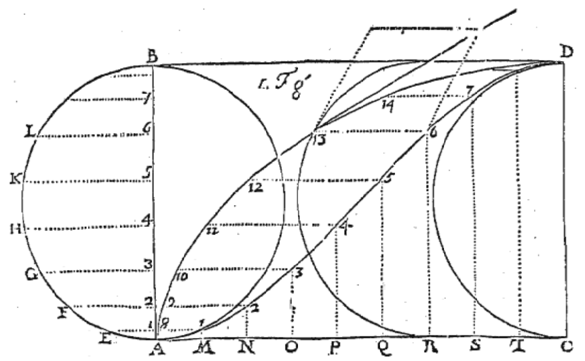
décembre 1658-janvier 1659 — Pascal publie ses solutions : *Lettres de A. Dettonville contenant quelques unes de ses inventions de Géométrie.*

1659 et années suivantes — Huygens découvre les propriétés isochrones du pendule cycloïdal et fait la théorie des développées et des développantes d'une courbe.

1697 — Jacques et Jean Bernoulli montrent que la courbe de descente la plus rapide pour un point pesant (brachystochrone) est une cycloïde : c'est le début du calcul des variations.

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

« Nous posons que le diamétre AB du cercle AEFGB se meut parallelement à soy - même, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, jusques à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamétre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, ensorte que quand le diamétre est en CD, le point A est venu en B, & la ligne AC se trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette course du diamétre se divise en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle se divise aussi en parties infinies toutes égales entr'elles et aux parties de AC parcourues par le diamétre, comme il a été dit. En après je considère le chemin qu'à fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un diamétre en avant, l'autre du sien propre dans la circonference. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il est venu en E il est élevé au-dessus de son premier lieu duquel il est parti ; cette hauteur se marque tirant du point E au diamétre AB un sinus E1, & le sinus Verse A1 est la hauteur dudit A quand il est venu en E. De même quand il est venu en F, du point F sur AB je tire le sinus F2, & A2 sera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le sinus G3, le sinus Verse A3 sera la hauteur de A quand il est parvenu en G ; et faisant ainsi de tous les lieux de la circonférence que parcourt A, je trouve toutes les hauteurs & élevemens pardessus l'extrémité du diamétre A, qui sont A1, A2, A", A4, A5, A6, A7 ; donc, afin



d'avoir les lieux par où passe ledit point A, sçavoir la ligne qu'il forme pendant ses deux mouvemens, je porte toutes ses hauteurs sur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M1, N2, O3, P4, Q5, R6, S7 sont les mêmes que celles qui sont prises sur AB. Puis je prends les mêmes E1, F2, G3, &c. & je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamétre, & je les tire vers le cercle, & des extrémitez de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. Je sçai comment s'est fait la ligne A 8 9 D ; mais pour sçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A est monté par la ligne AB, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier espace pendant que AB est venu en M, le second pendant que AB est venu en N, & ainsi toûjours également d'un espace à l'autre jusques à ce que le diamétre soit arrivé en CD ; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A123D. Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, & se rejoignant ensemble aux deux extrémitez AD. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenuë dans la circonférence d'icelui ; car les unes & les autres sont composées de lignes égales, sçavoir de la hauteur A1, A2, &c. & des sinus E1, F2, &c. qui sont les mêmes que ceux des diamétresM, N, O, &c. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallelograme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne AC à la ligne BD ; & partant selon Archiméde, la moitié est égale au cercle, auquel ajoûtant le demi-cercle, sçavoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle et demi pour l'espace A 8 9 D C ; & faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui passeroit par ledit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considère ensuite le mouvement que nous avons donné à notre point emporté par le diamètre marchant parallèlement à soy-même. Tirant du même point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallelogramme (qui doit toûjours avoir les quatre côtez égaux lorsque le chemin du point A par la circonférence est égal au chemin du diamétre AB par la ligne AC) & si du même point je tire la diagonale, j'ai la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procéde en telles opérations quand on pose les mouvemens égaux. Que si on les avoit posez en quelqu'autre raison, comme si l'on parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre parcouroit dans le même temps l'espace d'un pied & demi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquences suivant ladite raison. »

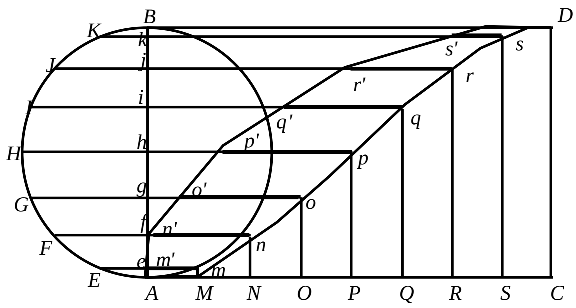
Roberval, *Traité des indivisibles*, pp. 250-253.

[NDLC : l'orthographe originale a été recopiée avec le plus grand soin (*qu'à fait, diamétre, mouvemens, voy,* etc) mais la petitesse du caractère, les *s* qui ressemblent à des *f* et … l'originalité de l'orthographe ont peut-être fait qu'il y a des anachronismes dans cette transcription.]

la quadrature de la cycloïde par Roberval
(*Traité des indivisibles,* pp. 250-253, une lecture moderne :)

Considérons le segment *AC* égal à la demi-circonférence *AGB* du cercle générateur. Partageons ce segment et cette demi-circonférence en une infinité de parties égales telles que *AM* = *AE.* Soient *m, n,* etc … les points d'intersection des droites *Ee*, *Ff,* etc … avec les perpendiculaires menées de *M*, *N*, etc … à la droite *AC* ; ces points sont les points d'une courbe appelée par Roberval la "compagne" de la roulette [c'est une sinusoïde].

Les points *m*', *n*', etc… des droites *Em*, *Fn*, etc … tels que *Ee* = *m*'*m*, *Ff* = *n*'*n*, etc … sont les points de la cycloïde ; en effet, lorsque le centre du cercle générateur est sur la perpendiculaire menée de *M* à *AC* alors *AE* = *Mm*', etc …



La compagne partage le rectangle *ABCD* en deux surfaces égales car chacun des segments *Mm, Nn,* etc … a son égal dans l'autre moitié. D'autre part, l'aire entre les deux courbes est égale à l'aire du demi-cercle *AGB* car la somme des segments *Ee*, *Ff*, etc … est égale à la somme des segments *m*'*m*, *n*'*n*, etc …

Par conséquent l'aire sous la demi-cycloïde est égale à la moitié de l'aire du rectangle *ABCD* plus la moitié du cercle générateur, c'est-à-dire aux trois demis de l'aire du cercle générateur.

L'astuce de ce calcul consiste en l'introduction de la courbe compagne qui est de toute évidence symétrique par rapport au centre du rectangle *ABCD*.

extrait de :

Jean-Pierre Clero, Evelyne Le Rest,
La naissance du calcul infinitésimal au XVII[e] *siècle*,
Jean-Pierre Clero - Evelyne Le Rest - Paris : Centre National de la Recherche Scientifique, Centre de Documentation Sciences Humaines, 1984.