Partition des entiers

lycées Saint Exupéry et Jean Moulin de Lyon, Caroline Roubaud, Sophie Kergomard, Joël Rastocle

enseignants : Marie-Claude Pontille et Serge Betton

chercheur : Christian Mauduit

Première piste de recherche

énoncé

Nous avons commencé par chercher un ensemble Γ et un naturel k tels que Γ et kΓ forment une partition de N*, c'est-à-dire :

$\Gamma \cap k\Gamma = \emptyset$ (il n'y a pas d'éléments en commun entre Γ et kΓ)

$\Gamma \cup k\Gamma = N^*$ (la réunion de Γ et kΓ contient tous les naturels sauf 0)

analyse

Nous nous sommes tout d'abord penchés sur la situation k = 2 ; voici le début de la partition trouvée :

Γ	2Γ
1	2
3	6
4	8
5	10
7	14
9	18
11	22
12	24
13	26
15	30
16	32
17	34
19	38
20	40
21	42
23	46
25	50
27	54
28	56
29	58
31	62
33	66
35	70
36	72
37	74
39	78
41	82
43	86
44	88
45	90
47	94
48	96
49…	98…

Nous avons constaté que les nombres appartenant à l'ensemble Γ s'écrivent sous la forme $X * 2^n$, n étant un exposant pair et X étant un nombre impair.

Nous avons ensuite étudié le cas de k = 3,

Γ	3Γ
1	3
2	6
4	12
5	15
7	21
8	24
9	27
10	30
…	…

puis ceux de k = 4, k = 5, k = 6 …

conclusion

Après l'analyse de ces exemples, nous avons pensé qu'en général, pour la partition en deux ensembles, Γ et kΓ, les nombres qui sont dans l'ensemble Γ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $X * k^n$, X étant non multiple de k et n étant un exposant pair.

étude de l'algorithme pour Γ *et* 2Γ

Nous avons enfin étudié les écarts entre les nombres de l'ensemble Γ : nous avons constaté qu'il y a des écarts de 1 ou 2 entre deux nombres consécutifs. Les écarts de 2 sont soit isolés (ex : entre 1 et 3), soit par trois (ex : 9 et 11 ; 11 et 13 ; 13 et 15) ; les écarts de 1 sont toujours par deux (ex : 3, 4, 5).

Nous avons ensuite regardé comment sont répartis ces écarts, nous avons recherché leur algorithme.

Les écarts de 2 isolés sont appelés a, les trios d'écarts de 2 sont appelés b, et les paires d'écarts de 1 sont appelés c. Chaque a et chaque b est suivi d'un c, nous avons donc considéré A = a + c et B = b + c.

Voici la liste de lettres obtenue :

A B A A B B B A A B A A B A A B B B A A B B
B A A B B B A A B A A B A A B B B A A B A A
BAABBBAABAABAABBBAABBBAABB
B A A B A A B A A B B B A A B B B A A B B B A A
BAABAABBBAABBBAABBBAABA

On constate que cette suite est construite sur un algorithme : A → ABA et B → ABBBA.

[NDLR : on commence par A. On applique *l'algorithme* et on obtient ABA. On applique l'algorithme et on obtient (ABA)(ABBBA)(ABA), c'est-à-dire : ABAABBBAABA. Et on recommence :
(ABA)(ABBBA)(ABA)(ABA)(ABBBA)(ABBBA)(ABBBA)(ABA)(ABA)(ABBBA)(ABA), c'est-à-dire ABAABBBAABAA BAABBBAABBBAABBBAABAABAABB BAABA, et ainsi de suite.
La nouvelle séquence de lettres commence par la séquence précédente ; avec de l'entraînement, on peut poursuivre sans tout réécrire à chaque fois.]

remarque :

un autre algorithme, directement formé sur les écarts, nous a été donné par notre chercheur : 2 → 211 et 1 → 2.

***Travail sur* Γ*, k*Γ*, m*Γ *… n*Γ**

présentation de la situation

Après le travail sur la répartition en deux ensembles (Γ et kΓ), nous avons abordé une partition plus diversifiée avec trois ensembles ou plus.

Voici la première situation étudiée :

Γ	2Γ	3Γ
1	2	3
4	8	12
5	10	15
6	12	18

On constate que cette “partition” ne convient pas. En effet, nous retrouvons l'entier 12 dans deux ensembles : 2Γ et 3Γ.

exemples

Nous avons alors étudié d'autres “partitions” et nous avons constaté que certaines conviennent et d'autres pas.

En voici des exemples :

conviennent

$\Gamma,2\Gamma,3\Gamma,6\Gamma$
$\Gamma,2\Gamma,3\Gamma,5\Gamma,6\Gamma,10\Gamma,15\Gamma,30\Gamma$
$\Gamma,2\Gamma,9\Gamma,18\Gamma$
$\Gamma,2\Gamma,3\Gamma,6\Gamma,9\Gamma,18\Gamma$
$\Gamma,2\Gamma,3\Gamma,4\Gamma,6\Gamma,8\Gamma,12\Gamma,16\Gamma,24\Gamma,32\Gamma,48\Gamma,96\Gamma$

ne conviennent pas

$\Gamma,2\Gamma,3\Gamma$
$\Gamma,2\Gamma,6\Gamma$
$\Gamma,2\Gamma,3\Gamma,5\Gamma,6\Gamma,10\Gamma$
$\Gamma,2\Gamma,3\Gamma,9\Gamma,18\Gamma$
$\Gamma,2\Gamma,3\Gamma,5\Gamma,7\Gamma,11\Gamma,13\Gamma$

conditions nécessaires

Une question se pose alors : quelles sont les conditions nécessaires pour qu'une “partition” soit “réalisable” ?

Il y en a deux :

— *première condition :* il faut qu'il y ait les PPCM de chaque couple de nombres
(PPCM = plus petit commun multiple).

exemples :
• avec Γ, 2Γ et 3Γ,
il faut rajouter 6Γ ($2 \times 3 = 6$) ce qui donne : Γ, 2Γ, 3Γ et 6Γ
• avec Γ, 2Γ, 3Γ et 4Γ,
on doit rajouter 6Γ ($2 \times 3 = 6$) et 12Γ ($3 \times 4 = 12$) ce qui donne Γ, 2Γ, 3Γ, 4Γ, 6Γ et 12Γ.

— *deuxième condition :* si $m/k \in N$, il faut une colonne $m/k\,\Gamma$.

exemples :
• avec Γ, 2Γ et 6Γ :
$6/2 \in N$, il faut donc rajouter une colonne 3Γ, ce qui donne Γ, 2Γ, 3Γ, 6Γ
• avec Γ, 2Γ, 3Γ, 18Γ :
$18/2 \in N$ et $18/3 \in N$, il faut donc rajouter une colonne 9Γ et une colonne 6Γ, ce qui donne Γ, 2Γ, 3Γ, 6Γ, 9Γ, 18Γ.

mise en application des deux conditions

exercice résolu : trouver les colonnes qui manquent pour former une partition avec Γ, 2Γ, …15Γ…

On applique les deux conditions :

$2 \times 3 = 6 \rightarrow$ on rajoute une colonne 6Γ.
$15 \times 2 = 30 \rightarrow$ on rajoute une colonne 30Γ.

$30 / 3 = 10 \rightarrow$ on rajoute une colonne 10Γ.
$30 / 6 = 5 \rightarrow$ on rajoute une colonne 5Γ.

La partition $\Gamma,2\Gamma,3\Gamma,5\Gamma,6\Gamma,10\Gamma,15\Gamma,30\Gamma$ convient.