les brenoms

par … du lycée Gustave Monod d'Enghien-les-Bains

enseignant : Robert Ferréol

chercheur : Gérard Duchamp, LITP

Voici un NOM BRE
4857 , 852 …

… et voici un BRE NOM
… 258 , 7584

B_0 : brenoms entiers (sans virgule)
0 ; 1 ; 2 ; … etc : tous les entiers naturels + les monstres comme … 121110987654321 [NDLC : …211101987654321 ?] ou $\underline{1}$ = …11111

B : brenoms (avec virgule)
3,5 ; 42,8 … etc : tous les décimaux ≥ 0 + les monstres … 121110987654321,123. Comme les décimaux, ce sont des brenoms entiers divisés par une puissance de 10.

L'appellation *brenom* a été trouvée par des participants à MATh.en.JEANS ; officiellement, ce sont les nombres décadiques. B_0 se note Z_{10} et B se note Q_{10}.

Pour les nombres (réels), on rajoute à des décimaux des chiffres à droite : √2 est la limite de la suite 1,4 / 1,41 / 1,414 / etc … Pour les initiés, R est l'adhérence de D ; dans R 0,00…01 = 10^{-n} tend vers 0 quand n tend vers ∞, et 10…0 = 10^n n'a pas de limite réelle.

Pour les brenoms, c'est à gauche : …10987654321 est la limite de la suite 1 / 21 / 321 / 4321 / 54321 / … Pour les initiés, B est l'adhérence de N et B_0 est l'adhérence de D+. Dans B_0 10…0 = 10^n tend vers 0 quand n tend vers ∞, et 0,00…01 = 10^{-n} n'a pas de limite brenomique …

les brenoms s'additionnent et se soustraient

$$\begin{array}{rr} & \dots 654321 \\ + & \underline{\dots 765432} \\ & \dots 419753 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \dots 654321 \\ - & \underline{\dots 765432} \\ & \dots 888889 \end{array}$$

→ **chouette ! on peut soustraire un nombre plus grand d'un nombre plus petit sans mettre de - !!!**

$$\begin{array}{r} \mathbf{22} \\ \underline{\mathbf{-34}} \\ \mathbf{\dots 9988} \end{array}$$

⇒ - 1 = … 9 9 9   - 2 = … 9 9 9 8   etc

$$\boxed{\begin{array}{c} Z \subset B_0 \\ D \subset B \end{array}}$$

Tous les brenoms sont positifs, même les négatifs …

La règle :

- (… d c b a) = … (9-d)(9-c)(9-b)(10-a)

Ils se multiplient aussi :

```
    ... 4 3 2 1
  × ... 4 3 2 1
  -------------
    ... 4 3 2 1
    ... 6 4 2
    ... 6 3
    ... 4
  -------------
    ... 1 0 4 1
```

Essayez …$\underline{098765432}$ × 9, le résultat est étonnant.

remarque :
l'opération ci-dessus montre que pour obtenir les k derniers chiffres du produit de deux brenoms, il suffit de faire le produit des deux nombres formés des k derniers chiffres, et de conserver les k derniers chiffres de ce produit. [NDLC : les derniers, dans quel sens ?]

la division est plus hard

```
     7                     7
×  ????      → ×  … 142857143
=    1            … 000000001
```

Donc : $\boxed{1/7 = \ldots\ \mathbf{\underline{285714}\ \underline{285714}\ 3}}$

Essayez avec 11 :

```
     11
×  .....
      1
```

on trouve :

1/2 = 0,5 1/3 = …667 - 1/3 = … 333

1/4 = 0,25 1/5 = 0,2 1/6 = … 333,5

1/8 = 0,125 1/9 = …889 1/10 = 0,1

1/11 = … 9191 - 1/11 = … 0909

Bizarre !!

1/3 = 0,3$\underline{3}$ … et **- 1/3 = … $\underline{3}$33**

1/7 = 0,$\underline{142857}$ … et **- 1/7 = … $\underline{142857}$**

1/11 = 0,09$\underline{09}$ … et **- 1/11 = … $\underline{09}$09.**

Ce n'est pas un hasard !

si x = 0,$\underline{ab}$; 100 x = ab,$\underline{ab}$ = x + ab donc

$$\boxed{x = ab / 99}$$

si y = … $\underline{ab}$; 100 y = …$\underline{ab}$00 = y - ab donc

$$\boxed{y = -\ ab / 99}$$

→ **on a prouvé que** $\boxed{\mathbf{\ldots\ \underline{a\ b} = -\ 0,\ \underline{a\ b}\ \ldots}}$

Et on en déduit que *tout brenom "périodique" est une fraction*. Par exemple :

…$\underline{543}$21 = 100 × $\underline{543}$ + 21
= 100 × (-543/999) + 21
= - 33321/999 = - 11107/333

Mais aussi que toute fraction est un brenom :

$$\boxed{Q \subset B}$$

Par exemple 31/42 (Au hasard, c'est promis !)

31/42 = 0,7$\underline{380952}$ = 0,7 + $\frac{1}{10}$ × 0,380952
= 0,7 - $\frac{1}{10}$ × $\underline{380952}$ = 0,7 + $\underline{761904}$,8
= $\underline{476190}$5,5

A vous de "brenomiser" 35/6, ou 6/35, etc. [réponse à la fin de l'article]

Les brenoms périodiques sont donc démystifiés. On pourrait donc supposer que les brenoms ne sont autres que les réels … Mais remarquez que pour l'instant on ne sait pas si tous les brenoms (sauf 0) ont des inverses. Tentons donc de poser une division :

Par exemple …13119753 par …654321

…13119753	…87654321
…62972963	93
…50146790	
…8888889	A vous de compléter

Ça marche, mais avec des essais, on remarque qu'il ne faut pas que le dividende se termine par 0, 2, 4, 5, 6 ou 8. Mais si tel est le cas, il suffit de diviser le brenom par 2 et 5 jusqu'à ce qu'il se termine par 1, 3, 7 ou 9. L'algorithme de la division ci-dessus montre alors que le quotient est possible :

tout brenom qui se termine par 1, 3, 7 ou 9 possède un inverse, et son inverse est un brenom entier (avec un résultat similaire pour les brenoms à virgule).

Mais attention ! Qui a dit que les divisions par 2 et par 5 devaient forcément s'arrêter un jour ?

En tout cas, si un brenom entier se terminant par 0, 2, 4, 5, 6 ou 8 n'est divisible (dans les brenoms entiers) qu'un nombre fini de fois par 2 et par 5, il est alors de la forme 2^n5^mu, où u est un brenom entier inversible, et il est donc inversible (dans les brenoms à virgule).

Existe-t-il des brenoms ($\neq 0$) infiniment divisibles par 2, ou par 5 ? Les élévations successives de 5 au carré vont nous donner une réponse :

5	1
25	2
625	3
390625	4
152587890625	5

On remarque qu'à l'étape n, les n-1 derniers chiffres de l'étape n-1 sont conservés (ce qui peut se démontrer). La suite $5^{2^n} = u_n$ tend donc vers un brenom A infiniment divisible par 5. A = …6199773922562599182189062 5

Nous allons voir que ce brenom a une propriété étonnante, qui prouvera qu'il n'est pas inversible : comme $(u_n)^2 = u_{n+1}$, $A^2 = A$, et pourtant, A n'est ni 0, ni 1 … On a donc : A.(1 - A) = 0 sans que A ni B = 1 - A ne soient nuls !! Si A avait un inverse A', on aurait 0 = A'.A.B = B ce qui est absurde … B et R sont donc fondamentalement différents !

Pour tenter de démystifier ces brenoms non-inversibles, regardons ce qui se passe si on change de système de numération. Au lieu de compter en base 10, comptons en base a. Par exemple en base 3 : $112_3 = 1 \times 3^2 + 1 \times 3 + 2 = 14$. Et on peut alors très bien considérer les brenoms (B_a) dans cette base. Ce qui est étonnant, c'est que, contrairement aux réels qui sont toujours les mêmes quel que soit le système de numération, les brenoms, eux, en dépendent. En particulier lorsque a est un nombre premier p, tous les brenoms non nuls ont un inverse : en effet, dans ce cas, ne se produit plus le phénomène ennuyeux de la base 10 qui fait qu'un multiple de 2 ne peut pas se terminer par 3, 5, 7 ou 9, et l'algorithme de la division ci-dessus fonctionne pour tout le monde. Pour les initiés, B_p (ou Q_p) est un corps, et la raison profonde en est que Z/pZ est un corps.

Comme les ennuis de $B = B_{10}$ proviennent de ce que $10 = 2 \times 5$, l'idée est maintenant de relier B_{10} à B_2 et B_5.

Convertissons en base 5 les valeurs approchées successives d'un brenom entier en base 10, …10987654321 par exemple :

1	=	1_5	1
21	=	41_5	2
321	=	2241_5	3
4321	=	14241_5	4
54321	=	à vous de compléter	5

On constate qu'à l'étape n, les n-1 derniers chiffres en base 5 de l'étape n-1 sont conservés. Cela provient tout simplement de ce que 10^n est un multiple de 5^n. Le même phénomène se produit lorsque l'on convertit en base 2.

Un brenom entier en base 10 donne donc naissance à deux brenoms entiers, l'un en base 2, l'autre en base 5. On a donc une correspondance :

$$B_{10} \longrightarrow B_2 \times B_5$$

$$b_{10} \longmapsto (b_2 , b_5)$$

$$\ldots 54321 \longmapsto (\ldots 10001, \ldots 14241)$$

On peut montrer que cette correspondance conserve les additions et les multiplications. Essayons de voir si on peut revenir en arrière, partant de (b_2, b_5). Par exemple :

$b_2 = \ldots 10110011101_2$ (pouvez-vous trouver comment j'ai fabriqué ce brenom ?) et

$b_5 = \ldots 1211104321_5$.

Cherchons les trois derniers chiffres de b_{10} ; le nombre x formé de ces trois chiffres doit avoir $101_2 = 5$ comme reste de sa division par $2^3 = 8$ et doit avoir $321_5 = 86$ comme reste de sa division par $5^3 = 125$. Autrement dit, $x = 5 + 8\,k = 86 + 125\,k'$; un peu de calcul nous donne facilement $x = 461$. Et ceux qui connaissent un peu d'arithmétique montreront que deux x possibles diffèrent forcément d'un multiple de $8 \times 125 = 1000$ et que donc 461 est le seul x possible à trois chiffres. Ceux qui (enfin) connaissent le “théorème chinois” sauront que ce résultat (x existe et est unique) est valable dans le cas général. Bref, la correspondance $b_{10} \to (b_2, b_5)$ est bijective et comme elle préserve les opérations :

B_{10} est isomorphe à $B_2 \times B_5$

Cet isomorphisme permet de répondre à beaucoup d'interrogations sur les brenoms en base 10. Regardons par exemple comment se projette le brenom A rencontré plus haut, vérifiant $A^2 = A$. Les n derniers chiffres de A étant les n derniers chiffres de 5^{2^n}, la projection en base 5 de A est tout simplement 0 !!

Quant au projeté en base 2, la conversion en base 2 de 0625 étant 1001110001_2, il semble que ce soit carrément 1.

La démonstration complète s'appuie sur le fait que 2^n divise $5^{2^n} - 1$.

$$B_{10} \longrightarrow B_2 \times B_5$$

$$A \longmapsto (1, 0)$$

Le monstre A se réduit aux deux nombres bien de chez nous : 1 et 0 !!! Et le projeté de B = 1 - A est (1, 1) - (1, 0) = (0, 1). Le produit A.B est nul tout simplement parce que le produit $(1, 0) \times (0, 1)$ est égal à (0, 0) !!

Et nous avons ainsi la solution du *problème des diviseurs de 0* dans B, ces brenoms non nuls qui, multipliés par un autre, donnent 0. Ce sont ceux qui se projettent en $(0, b_5)$ ou en $(b_2, 0)$.

Dans le premier cas, ils sont *infiniment divisibles par 2*, et dans l'autre *infiniment divisibles par 5*. Cette dernière condition étant nécessaire et suffisante, d'après ce que nous avons vu plus haut, tous les autres (sauf 0) sont inversibles (dans les brenoms à virgule).

Essayez par exemple de trouver les deux brenoms diviseurs de 0 qui se projettent en $(\underline{1}, 0)$ et en $(0, \underline{1})$. A ce propos, si des lecteurs fabriquent un programme informatique qui convertit (b_2, b_5) en b_{10} et réciproquement, nous sommes preneurs !

Cet isomorphisme va nous permettre aussi de résoudre facilement des équations dans B, à commencer par exemple par $x^2 = x$. Dans $B_2 \times B_5$ cette équation devient $(y^2, z^2) = (y, z)$ qui s'écrit $y.(y - 1) = 0$ et $z.(z - 1) = 0$. B_2 et B_5 étant des corps, B_2 et B_5 n'ont pas de diviseurs de zéro et les seules possibilités sont y = 0 ou 1, z = 0 ou 1. (0, 0), (1, 1) donnent dans B : 0, 1 ; et (1, 0), (0, 1) donnent A, B. A et B sont donc les deux brenoms non triviaux égaux à leur carré.

Il y a quelques années, Pierre Berloquin avait posé dans “Le Monde” le problème de trouver un nombre de 5 chiffres qui se termine par lui-même quand on l'élève au carré, problème qui a été le point de départ de mon intérêt pour les brenoms. La réponse en est 90625 et 09376, formés des cinq derniers chiffres de A et B.

Les équations algébriques de degré n ayant en général au maximum n solutions dans un corps, dans les brenoms elles en auront donc en général au maximum n^2. Par exemple, un brenom aura en général au maximum 4 racines carrées, 9 racines cubiques, etc …

Tiens, regardons les racines carrées de 1 dans B. Les racines carrées de 1 étant 1 et -1 dans B_2 et B_5, les projetés des racines carrées de 1 sont (1, 1) et (-1, -1) qui donnent 1 et -1, et (1, -1), (-1, 1). Si, astucieusement, nous écrivons (1, -1) = (2, 0) - (1, 1) et
(-1, 1) = (0, 2) - (1, 1),
nous obtenons les deux racines carrées non triviales de 1 : C = 2 A - 1 = …781249 et - C = 2 B - 1 = …218751.

On aurait pu trouver ce même résultat en mettant l'équation $x^2 = 1$ sous la forme :

$$[(x+1)/2]^2 = (x+1)/2$$

Ceci prouve qu'un brenom qui a une racine carrée r_1 en a quatre : $-r_1$, $C.r_1$ et $-C.r_1$.

Après vous avoir — nous l'espérons — alléchés avec ces brenoms, voici quelques problèmes ; à vous d'en inventer d'autres !

1.— trouver un nombre de six chiffres dont le cube se termine par lui-même.

2.— existe-t-il un entier < 0 qui, converti en brenom, possède une racine carrée dans B ?

3.— existe-t-il un entier qui n'est pas un carré, ayant une racine carrée dans B ?

4.— plus généralement, caractériser les entiers ayant une racine carrée dans B.

5.— montrer que l'existence d'une racine cubique de 1 autre que 1 est équivalente à l'existence d'une racine carrée de 3. [Réponse ?]

[NDLC : montrer que …, ça, ça n'est pas très *jeans*]

6.— montrer que 3 a une racine cubique ; en quoi cette existence permet de prouver qu'il existe des cubes se terminant par autant de chiffres 1 que l'on veut ?

7.— y a-t-il des diviseurs de zéro dans les brenoms en base 4 ? Plus généralement, que pensez-vous des brenoms en base p^n avec p premier ?

8.— combien un brenom en base 60 a-t-il de racines carrées au maximum ?