3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 793818301194912…

π

par Steve Assandri, Fabrice Breton, Thomas Thaveau, Alexandre Flament, Sébastien Quenet, élèves de 2nde du Lycée Fragonard de l'Isle-Adam et Rozak Roba Abdul, Frédéric Daunis, Mathieu Faliu, David Illoz, Béatrice Salat, élèves de 2nde, Corine Flion, Valérie Guillon, élèves de 1ère, Armèle Melet, Henri Torgemane, élèves de Tle, tous du lycée Alfred Kastler de Cergy-Pontoise

enseignantes : Annick Boisseau, Claude Matz et Annie Soismier

chercheurs : Michèle Vergne et François Digne, de l'Ecole Normale Supérieure

<u>Documentation utilisée</u> :

Extraits nombreux du livre “Le nombre π”.

Extrait de Tangente n°27.

<u>Commentaires des professeurs :</u>

C'était un sujet vaste. Les élèves ont paru perdus, ne voyant pas toujours ce qu'on attendait d'eux. Beaucoup de pistes ont été abordées, ils sont passés de l'une à l'autre, souvent sans aboutir alors que c'était réalisable.

Nous pensons que ce groupe comportait trop d'élèves (en particulier 8 à 10 élèves pour le lycée de Cergy). Il a été nécessaire de faire des petits groupes ce qui peut explique l'éclatement du travail dans différentes directions. Le travail de groupe n'a pas eu lieu réellement, ils ne se sont pas aperçu par moments que leurs recherches allaient dans la même direction (à peu de chose près).

Le compte rendu est un échantillonnage de quelques uns des résultats et montre la diversité des démarches. A notre grand regret nous n'avons pas pu obtenir la partie “INTRODUCTION”.

A leur décharge, nous pensons leur avoir fourni des documents trop nombreux et trop variés, et nous nous sommes interdit de leur imposer une piste unique.

A noter que π a été d'abord défini par les élèves comme le périmètre d'un cercle de diamètre 1. Une partie du sujet utilise la formule de l'aire, sans justification de celle-ci.

PLAN :

I) Encadrement de π par une expérimentation physique.
II) Encadrement de π par des périmètres.
III) Encadrement de π par des aires.

encadrement de π par une expérimentation physique

Objectif : Trouver plusieurs encadrements de π par expériences physiques.

Le volume V du cylindre étant égal à : $V = \pi R^2 h$. On en déduit que : $\pi = \dfrac{V}{R^2 h}$.

<u>Expérience 1 :</u>

Mesures :

$$\mathbf{873 \le V \le 875} \quad \text{(ml)}$$
$$\mathbf{9{,}85 \le 2R \le 10{,}05} \quad \text{(cm)}$$
$$\mathbf{11{,}4 \le h \le 11{,}5} \quad \text{(cm)}$$

$\rightarrow$ $4{,}925 \le R \le 5{,}025$

$(4{,}925)^2 \le R^2 \le (5{,}025)^2$

$11{,}4 \le h \le 11{,}5$

$4{,}925^2 \times 11{,}4 \le R^2 h \le 5{,}025^2 \times 11{,}5$

$$\frac{1}{5{,}025^2 \times 11{,}5} \le \frac{1}{R^2 h} \le \frac{1}{4{,}925^2 \times 11{,}4}$$

$$\frac{873}{5{,}025^2 \times 11{,}5} \le \frac{V}{R^2 h} \le \frac{875}{4{,}925^2 \times 11{,}4}$$

d'où : $\mathbf{3{,}006 \le \pi \le 3{,}164}$

<u>Remarques :</u> Pour avoir π par défaut, il faut prendre le résultat du volume par défaut et les dimensions par excès. Pour avoir π par excès on prend le résultat du volume par excès et les dimensions par défaut. Le cylindre utilisé comportait des stries. Donc l'expérience n'amène pas des résultats précis (incertitude sur la mesure du volume par exemple).

<u>Expérience 2 :</u>

Mesures :

(cylindre ne comportant pas de stries)

$$\mathbf{612{,}9 \le V \le 613{,}1} \quad \text{(ml)}$$
$$\mathbf{8{,}32 \le 2R \le 8{,}34} \quad \text{(cm)}$$
$$\mathbf{11{,}22 \le h \le 11{,}24} \quad \text{(cm)}$$

$\rightarrow$ $4{,}16 \le R \le 4{,}17$

$(4{,}16)^2 \le R^2 \le (4{,}17)^2$

$11{,}22 \le h \le 11{,}24$

$4{,}16^2 \times 11{,}22 \le R^2 h \le 4{,}17^2 \times 11{,}24$

$$\frac{1}{4{,}17^2 \times 11{,}24} \le \frac{1}{R^2 h} \le \frac{1}{4{,}16^2 \times 11{,}22}$$

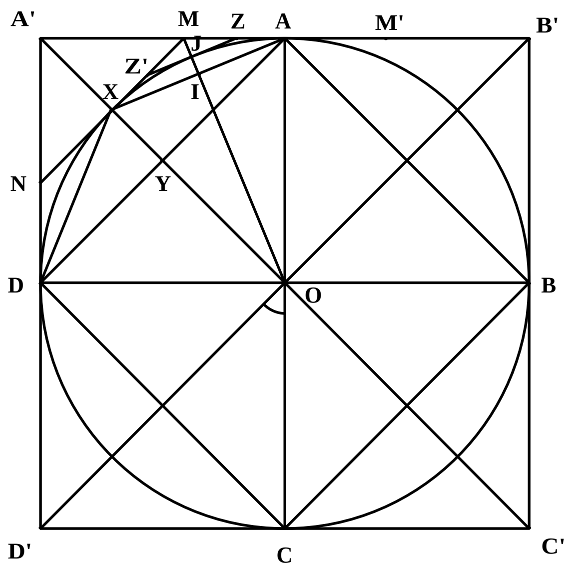
d'où : $\mathbf{3{,}135 \le \pi \le 3{,}159}$

Encadrement de π par des périmètres

Méthode :
On considère des polygones réguliers à 2^n côtés (n entier naturel supérieur ou égal à 2) inscrits et circonscrits à un cercle de rayon 1/2, son périmètre est donc égal à π. Le périmètre p_n d'un polygone inscrit est inférieur ou égal au périmètre du cercle (longueur d'une corde inférieure ou égale à la longueur de l'arc correspondant). Par contre on a admis que le périmètre du cercle est inférieur à celui P_n du polygone circonscrit au cercle. D' où :

$$\mathbf{p_n \leq \pi \leq P_n.}$$

approximation par défaut : polygones inscrits



C est un cercle de centre O de rayon 1/2. OAA'D est un carré de côté AO = 1/2. [AD] est une diagonale de OAA'D. Comme la diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$, alors AD = $\sqrt{2}/2$. [AD] est le côté du carré ABCD inscrit dans le cercle C. Le périmètre de ce carré est : $4\sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2} \approx 2,8$.

L'octogone de côté [AX] est inscrit dans le cercle C. [OX] est un rayon, et [OY] une demi -diagonale de OAA'D.

$XY = OX - OY = 1/2 - \sqrt{2}/4 = (2 - \sqrt{2})/4$; [AY] est une demi diagonale de OAA'D donc $AY = \sqrt{2}/4$.

Dans le triangle AXY rectangle en Y puisque OAA'D est un carré dont les diagonales sont perpendiculaires :

$AX^2 = XY^2 + YA^2 = [(2 - \sqrt{2})/4]^2 + (\sqrt{2}/4)^2 = (8 - 4\sqrt{2})/16 = (2 - \sqrt{2})/4$. $AX = \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$.

Le périmètre de l'octogone inscrit dans le cercle C est :

$8\,AX = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}}/2 = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 3,06$.

Le polygone à seize côtés inscrit dans le cercle C a pour côté [XJ]. OA = 1/2, (OM) médiatrice de [AX] coupe (AX) en I.
$IA = 1/2\,AX = \sqrt{2 - \sqrt{2}}/4$.

Dans le triangle OAI rectangle en I :

$OI^2 = OA^2 - IA^2 = (1/2)^2 - (\sqrt{2 - \sqrt{2}}/4)^2 = 1/4 - (2-\sqrt{2})/16 = (2 + \sqrt{2})/16$.
$OI = \sqrt{2 + \sqrt{2}}/4$.

$IJ = OJ - OI$
$= 1/2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}/4 = (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})/4$.

Dans le triangle AJI rectangle en I :

$$\begin{aligned} AJ^2 &= IJ^2 + IA^2 \\ &= ((2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})/4)^2 + (\sqrt{2 - \sqrt{2}}/4)^2 \\ &= (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})/4. \\ AJ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}/2. \end{aligned}$$

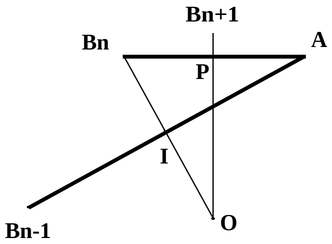
Le périmètre du polygone à seize côtés inscrit dans le cercle C est :

$$16\,AJ = 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \approx 3,12.$$

Généralisation

On a essayé de trouver une relation entre les différents résultats obtenus dans l'approximation par défaut. On prend toujours comme hypothèse un cercle de centre O et de rayon 1/2. A et B_{n-1} sont deux sommets consécutifs d'un polygone inscrit à 2^{n-1} côtés. On construit la médiatrice du segment $[AB_{n-1}]$, qui passe par O et qui coupe le cercle en B_n.

On obtient ainsi une nouvelle corde $[AB_n]$. A et B_n sont deux sommets consécutifs d'un polygone inscrit à 2^n côtés.



On trace la médiatrice de $[AB_n]$ passant par O et qui coupe le cercle cette fois-ci en un point B_{n+1}. Le but est d'exprimer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n (longueur du côté du précédent polygone) pour qu'avec n'importe quelle valeur donnée à n, donc pour un polygone ayant un nombre de côtés quelconque, on puisse déterminer le périmètre de ce polygone et ainsi trouver des valeurs de π de plus en plus précises.

PREUVE :

(OB_{n+1}) est la médiatrice de $[AB_n]$. Dans le triangle APB_{n+1} rectangle en P et d'après le Théorème de Pythagore on a :

$$(AB_{n+1})^2 = (PB_{n+1})^2 + AP^2$$

Il faut donc calculer PB_{n+1}.

$$PB_{n+1} = OB_{n+1} - OP = 1/2 - OP$$

Dans le triangle OPB_n rectangle en P, d'après le Théorème de Pythagore on a :

$$OP^2 = (OB_n)^2 - (PB_n)^2$$
$$OP^2 = 1/4 - (1/2\ AB_n)^2$$
$$= 1/4 - (1/4)\ (AB_n)^2$$
$$OP = 1/2\sqrt{1 - AB_n^2}$$

$$PB_{n+1} = OB_{n+1} - OP$$

$$= 1/2 - 1/2\sqrt{1 - AB_n^2}$$

$$= 1/2(1-\sqrt{1 - AB_n^2}\ )$$

$$(AB_{n+1})^2 = (PB_{n+1})^2 + AP^2$$

$$(AB_{n+1})^2 = [1/2\ (1- \sqrt{1 - AB_n^2}\ )]^2 + 1/4\ (AB_n)^2$$

P est le milieu de AB_n donc $AP = 1/2\ AB_n$.

$$(AB_{n+1})^2 = 1/4\ [1- \sqrt{1 - AB_n^2}\ ]^2 + 1/4\ (AB_n\ )^2$$

$$= 1/4\ [1+1 -(AB_n)^2 - 2\sqrt{1 - AB_n^2}\ ] + 1/4\ (AB_n)^2$$

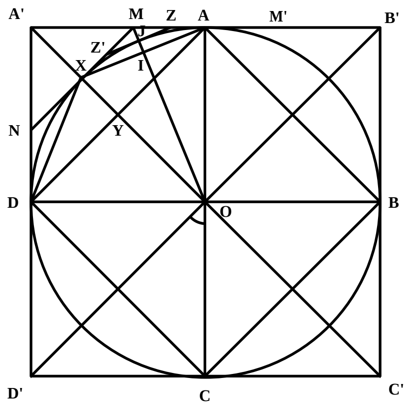
$$= 1/4\ [2 - (AB_n)^2 + (AB_n)^2 - 2\sqrt{1 - AB_n^2}\ ]$$

$$= (2 - 2\sqrt{1 - AB_n^2}\ )/4 = (1 -\sqrt{1 - AB_n^2}\ )/2$$

Conclusion :

$$(AB_{n+1})^2 = (1-\sqrt{1 - AB_n^2}\ )/2$$

approximation par excès :
polygones circonscrits.



**** Carré***

Le carré circonscrit au cercle de diamètre 1 a pour côté 1, son périmètre est donc égal à 4.

**** Octogone***

L'octogone circonscrit a pour côté MN = 2 XM. [OX] est un rayon du cercle car X appartient au cercle, [A'O] est la demi-diagonale du carré.

OX = 1/2 ; $A'O = \sqrt{2}/2$; $A'X = (\sqrt{2} - 1)/2$. Dans le triangle A'YA, (MN) //(AD). D'après le Théorème de Thalès : A'X/A'Y = XM/YA.

On a : $YA = 1/2\ AD = A'Y = \sqrt{2}/4$
et $XM = (A'X\ .\ A'Y) / A'Y$

$YA = (\sqrt{2} - 1)/2$. D'où le côté de l'octogone mesure $MN = \sqrt{2} - 1$ et son périmètre : $8(\sqrt{2} - 1)$.

Le périmètre de l'octogone mesure environ 3,32.

** Polygone à 16 côtés*

Côté du polygone à 16 côtés : ZZ' = 2 AZ
On a : AM = 1/2 MN = $(\sqrt{2} - 1) / 2$
et AI = 1/2 AX = $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ / 4.

Dans le triangle AMI rectangle en I :
$MI^2 = AM^2 - AI^2 = [(\sqrt{2} - 1)/2)]^2 - [\sqrt{2 - \sqrt{2}} /4]^2$
$= (10 - 7\sqrt{2})/16$, d'où :

$$MI = \sqrt{10 - 7\sqrt{2}} / 4.$$

Dans le triangle AMI, (AI)//(JZ), d'où :
MI/IJ = MA/AZ et AZ = (MA. IJ)/MI.

$AZ = (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) / 2\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$

Le côté du polygone AZ mesure :

$$(\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) / \sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$$

et son périmètre:

$$16(\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) / \sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$$

Le périmètre du polygone à 16 côtés mesure environ 3,19.

TABLEAU DE VALEURS

CARRE	**OCTOGONE**	**POLYGONE A 16 COTES**
Inscrit	*Inscrit*	*Inscrit*
$2\sqrt{2} \approx 2,8$	$4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 3,32$	$8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ $\approx 3,12$
Circonscrit	*Circonscrit*	*Circonscrit*
4	$8(\sqrt{2} - 1) \approx 3,32$	$\frac{16(\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})}{\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}}$ $\approx 3,19$
$2,8 \leq \pi \leq 4$	$3,06 \leq \pi \leq 3,32$	$3,12 \leq \pi \leq 3,19$

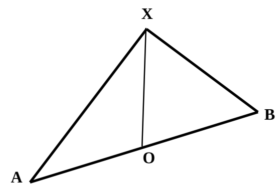
Pour un polygone à 32 côtés, inscrit, on a pu déterminer son périmètre grâce aux formules obtenues. Le périmètre est égal à :

$$32\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{24\sqrt{2}}}}{2}\right)^2}}{2}}$$

Soit environ 3,13 . D'où : $3,13 \leq \pi$

Méthode utilisant la trigonométrie.
Inconvénient de la méthode précédente : pour obtenir la longueur d'un polygone régulier à 2^n côtés, il faut connaître celle du polygone précédent, ayant deux fois moins de côtés.

** PAR DÉFAUT*



Si un polygone régulier inscrit dans un cercle de diamètre 1 a 2^n côtés, l'angle au centre XOB mesure $360/2^n$ degrés et l'angle inscrit XAB qui intercepte le même arc d'extrémités X et B mesure la moitié de XOB, soit $180/2^n$ degrés.

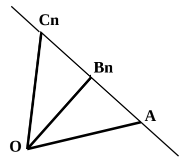
Dans le triangle XAB rectangle en X, on a :

$$\sin(180/2^n) = XB / AB.$$

D'où $XB = \sin(180/2^n)$ et le périmètre du polygone est : $2^n \sin(180/2^n)$. On a ainsi :

$$\mathbf{2^n \sin(180/2^n)} \leq \pi.$$

** PAR EXCES*



On considère des polygones réguliers circonscrits au cercle de rayons 1/2, à 4, 8, 16, …, 2^n côtés. Le cercle est tangent à chacun des côtés du polygone, en son milieu. Pour un polygone régulier à 2^n côtés, l'angle au centre AOC mesure $360/2^n$ degrés et l'angle AOB_n mesure la moitié : $180/2^n$ degrés. B_n est le milieu de $[AC_n]$, $OB_n = 1/2$ et (OB_n) est perpendiculaire à (AC_n).

Dans le triangle rectangle AOB_n, on a

$$\tan(180/2^n) = AB_n / OB_n. \text{ D'où :}$$

$$AB_n = 1/2 \tan(180/2^n)$$

Le côté du polygone mesure tan $(180/2^n)$ et le périmètre : 2^n tan $(180/2^n)$. On a ainsi :

$$\pi \leq \mathbf{2^n \tan(180/2^n)}$$

**** CONCLUSION***

On peut ainsi obtenir des encadrements de π de la forme :

$$\mathbf{2^n \sin(180/2^n) \leq \pi \leq 2^n \tan(180/2^n)}$$

La précision sera d'autant meilleure que n sera grand. Par exemple :

pour $n = 10$, $2^n = 1024$.

On trouve à l'aide de la calculatrice les approximations suivantes :

$$3{,}14158 \leq \pi \leq 3{,}14161$$

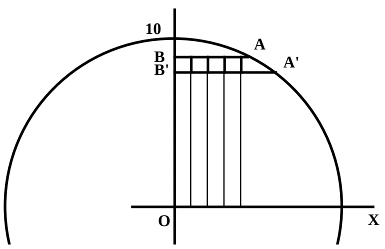
Pour $n = 20$, $2^n = 1048576$ (plus d'un million de côtés), on trouve les mêmes valeurs approchées par défaut et par excès à la calculatrice.

Encadrement de π par des aires.

Objectif : calculer le nombre de carrés de côté 1, compris dans un cercle de rayon 10.

Après ce calcul nous pourrons ainsi calculer π par défaut, en prenant les carrés uniquement complets (dont les quatre sommets sont à l'intérieur du cercle).

Dans le premier quadran, on considère les points B et B' d'abscisse nulle et d'ordonnées entières consécutives, et les points A et A' de ce quadran situés sur le cercle et de même ordonnée respective que B et B'.



x représente le nombre de carrés complets de côté 1 situés dans la partie du plan délimitée par les segments [AB], [BB'], [B'A'] et l'arc de cercle d' extrémités A et A'.

On a : $x \times 1 \leq AB$

$x^2 \leq AB^2$; $OB^2 + x^2 \leq OB^2 + AB^2$

$OB^2 + x^2 \leq OA^2$ car $OA^2 = OB^2 + AB^2$

Donc $\mathbf{x^2 \leq OA^2 - OB^2}$

<u>Exemple</u> : OB = 9 ; OA = 10.

Donc $81 + x^2 \leq 100$, soit $x^2 \leq 19$, soit encore :

$$x \leq \sqrt{19}$$

Il existe uniquement quatre carrés complets dans le quadrilatère ABB'A'.

Le tableau ci-dessous nous donne pour les différentes valeurs de OB le nombre de carrés compris dans le quadrilatère ABB'A', pour un rayon égal à 10 :

OB	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	9	9	9	9	8	8	7	6	4	0

On obtient ainsi 276 carrés de côté 1 contenus entièrement dans un cercle de rayon 10. On peut alors écrire : $276 \leq \pi R^2$, soit $276/R^2 \leq \pi$: $\pi \geq 2{,}76$ pour un rayon R = 10.

Un programme sur calculatrice permet de donner différentes valeurs à R et d'obtenir les résultats suivants :

Rayon	**Valeurs approchées de π par défaut**
10	2,76
100	3,1016
150	3,114667
200	3,1207
250	3,12512
300	3,127733
350	3,12950
400	3,1314
500	3,133392
550	3,13407

[La calculatrice utilisée ne permet pas d'obtenir un résultat pour $R \geq 600$.]

Création d'un programme permettant de comptabiliser le nombre de points à coordonnées entières dans un cercle de rayon R.

Démarche :
On choisit un rayon pour le cercle ; on cherche à compter le quart des points du cercle, en travaillant donc sur un quart de cercle (point central excepté). Pour chaque valeur entière de x entre 0 et R, on calcule le nombre de points sur la colonne d'abscisse x, en utilisant le théorème de Pythagore :

$$\text{nb points} = \text{int}\sqrt{(\text{rayon}^2 - x^2)}.$$

En multipliant la somme des points trouvés par quatre, et en ajoutant le point central, on obtient le nombre de points à coordonnées entières dans le cercle. Une approximation par défaut de π peut être obtenue en divisant le nombre de points par le carré du rayon. Le nombre de points comptés est la partie entière de l'aire du cercle. On a donc :

$$\text{nb points} \leq \pi \times R^2 ,$$

d'où

$$\pi \geq (\text{ nombre de points } / R^2).$$

```
program pi;
uses printer;
var
        rayon : word;
        boucle: byte;
        points: longint;
        pi    : extended;
const
liste : array[1..8] of extended = ( 1,5,10, 100,500,1000,5000,10000);
procedure calcul(rayon:extended; var points:longint; var _pi:extended); var
        somme : extended;
        s     : extended;
begin
        s:=rayon;
        somme:=0;
repeat somme:=somme+int(sqrt(sqr(rayon)-sqr(s-1) )); s:=s-1;
        until s=0;
        points:= round(4*somme+1);
        _pi := (4*somme+1)/sqr(rayon) ;
end;
begin
        writeln;
write('Rayon :'); readln(rayon); calcul(rayon,points,_pi);
writeln('Nombre de points :', points); writeln('D''oó PI = ', _pi);
        writeln('Pressez une touche...');
        readln;
        for boucle:=1 to 8 do
        begin
                calcul(liste[boucle],points,_pi);
        writeln(lst,'Rayon:', liste[boucle]:7:0 ,'Nombre de points:', points:10, 'Pi˜', _pi:10:8); end;
end.
```

Codage de la procédure en Turbo-Pascal (4.0 ou supérieur) :

```
procédure calcul (rayon:extended; var points : longint; var _pi : extended); var
        somme  : longint;
        abscisse : longint;
begin
        abscisse: = rayon;
        somme : = 0;
repeat somme : = somme+ round(sqrt(sqr(rayon)-sqr(s-1) )); dec(abscisse);
        until abscisse=0;
        points:= 4*somme+1;
        _pi := points/sqr(rayon) ;
        end.
```