Décomposition d'un nombre carré sous forme de sommes de carrés

par Moaiz Bendhaou, Christophe Perrot, François Yacob
du Lycée Alfred Kastler de Cergy-Pontoise

enseignante : Mme Annie Soismier

chercheur : Mme Michèle Vergne, Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Ecole Normale Supérieure.

Notre travail consiste à rechercher des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire trois entiers a, b et c qui vérifient l'égalité : $c^2 = a^2 + b^2$.

I— Dans un premier temps, nous avons montré qu'il est possible à partir de tout triplet pythagoricien d'en former d'autres en multipliant a, b et c par un même nombre entier (k). Calculons pour cela $(ka)^2 + (kb)^2$:

$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2 a^2 + k^2 b^2 = k^2 (a^2 + b^2) = k^2 c^2$
$\Leftrightarrow$ (ka, kb, kc) est un triplet pythagoricien.

Le triplet (a, b, c) est dit primitif si au moins deux des termes (a, b, c) sont premiers entre eux.

II— Dans un second temps, nous avons dressé une liste de triplets pythagoriciens primitifs à l'aide d'une calculatrice. Nous nous sommes intéressés aux triplets (a, b, c) tels que c=b+1.

Après des calculs (différence première, etc …), nous avons trouvé une relation qui permet de donner un triplet pythagoricien en fonction d'un entier naturel m :

a = 2m+1 ; b = 2m(m+1) ; c = 2m(m+1) + 1

vérification :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2m + 1)^2 + [2m(m + 1)]^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 + 4m^4 + 4m^2 + 8m^3 \\ &= 4m^4 + 8m^3 + 8m^2 + 4m + 1 \end{aligned}$$

> Loi de Clément 1
>
> Les nombres ne s'arrêtent jamais, mais il y a un dernier nombre. Après lui, ça recommence à 0. Ça fait comme un grand cercle qui ne finit jamais mais on repasse toujours au même endroit.

$$\begin{aligned} c^2 &= [2m(m + 1) + 1]^2 \\ &= (2m^2 + 2m + 1)^2 \\ &= 4m^4 + 4m^2 + 1 + 8m^3 + 4m^2 + 4m \\ &= 4m^4 + 8m^3 + 8m^2 + 4m + 1 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

exemples d'application de cette formule :

pour m=1: $3^2 + 4^2 = 5^2$ (9 + 16 = 25)
pour m=2: $5^2 + 12^2 = 13^2$ (25 + 144 = 169)
pour m=3: $7^2 + 24^2 = 25^2$ (49 + 576 = 625)
pour m=4: $9^2 + 40^2 = 41^2$ (81 + 1600 = 1681)
…

application directe de la formule :
Nous allons tenter de décomposer un carré en somme de deux carrés à l'aide de cette formule :
Soit X ce nombre et x tel que $X = x^2$ (avec x > 0 et entier). x doit donc être égal à c, c'est-à-dire 2m(m + 1) + 1.

Première condition :
x doit être impair sinon il faut le décomposer en un produit dont l'un des termes est impair, l'autre sera le facteur k (voir 1er paragraphe).

$$x = 2m(m + 1) + 1$$
$$2m^2 + 2m - x + 1 = 0.$$

Ce trinôme possède toujours deux solutions :

$$b^2 - 4ac = 4 - 4.2.(1 - x) = 8x - 4 ;$$
$$x > 0 \Rightarrow 8x - 4 > 0.$$

Ces deux solutions sont :

$$m' = \frac{-2 + \sqrt{8x - 4}}{4} \quad \text{et } m'' = \frac{-2 - \sqrt{8x - 4}}{4}$$

m'' < 0 donc solution négative à rejeter, donc la solution est

$$m = \frac{-2 + \sqrt{8x - 4}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{2x - 1}}{2}$$

Deuxième condition :
2x - 1 doit être un carré parfait pour que m soit un entier.

Ayant retrouvé m il suffit d'appliquer la formule et si nécessaire de multiplier par le facteur k pour avoir le triplet pythagoricien.

Exemple : prenons X = 2500 donc x = 50. Mais x est pair donc il faut le décomposer :
50 = 5 x 5 x 2 c'est-à-dire :

1) 25 x 2 avec x = 25 et k = 2 ;
2) 5 x 10 avec x = 5 et k = 10.

1) Après calcul, on obtient m = 3. Donc a = 7, b = 24, c = 25. En multipliant par k (= 2), le triplet final est (14, 48, 50).
2) De même, on obtient m = 1. Donc a = 3, b = 4, c = 5. En multipliant par k (= 10), cela fait : (30, 40, 50).

Les deux décompositions trouvées de 2500 en somme de carrés d'après cette formule sont : (14, 48, 50) et (30, 40, 50).

triplets obtenus grâce à notre 1ère formule:
A = 2m + 1, B = 2m(m + 1), C = 2m(m+1)+1

III— De façon analogue à la première formule, nous nous sommes intéressés aux triplets tels que c = b + 2 (toujours pour des triplets primitifs). Nous avons trouvé la formule qui permet de les donner en fonction d'un entier naturel :

$$\mathbf{a = 4n \;;\; b = 4n^2 - 1 \;;\; c = 4n^2 + 1}.$$

vérification :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (4n)^2 + (4n^2 - 1)^2 \\ &= 16n^2 + 16n^4 + 1 - 8n^2 \\ &= 16n^4 + 8n^2 + 1 \\ c^2 &= (4n^2 + 1)^2 \\ &= 16n^4 + 8n^2 + 1 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

exemples d'application de cette formule :

pour n=1 : $4^2 + 3^2 = 5^2$ (16+9=25)
pour n=2 : $8^2 + 15^2 = 17^2$ (64+225=289)
pour n=3 : $12^2 + 35^2 = 37^2$ (144+1225=1369)
pour n=4 : $16^2 + 63^2 = 65^2$ (256+3969=4225)
…

A	B	C
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
17	144	145
19	180	181
21	220	221
23	264	265
25	312	313
27	364	365
29	420	421
31	480	481
33	544	545
35	612	613
37	684	685
39	760	761
41	840	841
43	924	925
45	1 012	1 013
47	1 104	1 105
49	1 200	1 201
51	1 300	1 301
53	1 404	1 405
55	1 512	1 513
57	1 624	1 625
59	1 740	1 741
61	1 860	1 861
63	1 984	1 985
65	2 112	2 113
…		

67	2 244	2 245
69	2 380	2 381
71	2 520	2 521
73	2 664	2 665
75	2 812	2 813
77	2 964	2 965
79	3 120	3 121
81	3 280	3 281
83	3 444	3 445
85	3 612	3 613
87	3 784	3 785
89	3 960	3 961
91	4 140	4 141
93	4 324	4 325
95	4 512	4 513
97	4 704	4 705
99	4 900	4 901
101	5 100	5 101
103	5 304	5 305
105	5 512	5 513
107	5 724	5 725
109	5 940	5 941
110	6 160	6 161
113	6 384	6 385
115	6 612	6 613
117	6 844	6 845
119	7 080	7 081
121	7 320	7 321
123	7 564	7 565
125	7 812	7 813
127	8 064	8 065
129	8 320	8 321
131	8 580	8 581
…		

133	8 844	8 845
135	9 112	9 113
137	9 384	9 385
139	9 660	9 661
141	9 940	9 941
143	10 224	10 225
145	10 512	10 513
147	10 804	10 805
149	11 100	11 101
151	11 400	11 401
153	11 704	11 705
155	12 012	12 013
157	12 324	12 325
159	12 640	12 641
161	12 960	12 961
163	13 284	13 285
165	13 612	13 613
167	13 944	13 945
169	14 280	14 281
171	14 620	14 621
173	14 964	14 965
175	15 312	15 313
177	15 664	15 665
179	16 020	16 021
181	16 380	16 381
183	16 744	16 745
185	17 112	17 113
187	17 484	17 485
189	17 860	17 861
191	18 240	18 241
…		

application directe de la formule :

Nous allons, comme nous l'avons fait pour la première formule, essayer de décomposer un carré en somme de deux carrés :

Soit X ce carré et x tel que X = x^2 (avec x > 0 et entier). x doit donc être égal à c, c'est-à-dire $4n^2 + 1$.

Première condition :

Il faut que x soit impair sinon on le décompose en un produit dont l'un des termes sera impair et l'autre sera le facteur k.

$$x = 4n^2 + 1$$
$$4n^2 = x - 1$$
$$n = \frac{\sqrt{x - 1}}{2}$$

Deuxième condition :

Il faut que x - 1 soit un carré parfait pour que n soit un entier (voir démonstration).

Quand nous avons n, il est possible de calculer le triplet pythagoricien en entier.

Loi d'Anaïs 1

Pour faire de très grandes additions avec des nombres composés du même chiffre (ex : 333333333333) on peut écrire

$$\begin{array}{rcr} 3333 & {}^{10\,000\,000\,000} & 3333 \\ +\quad 4 & {}^{10\,000\,000\,000} & 4444 \\ \hline = 3337 & {}^{10\,000\,000\,000} & 7777 \end{array}$$

(il y a 10 000 000 000 de chiffres identiques à la place des pointillés)

programme basic très simple qui nous a permis de dresser une liste des triplets pythagoriciens sur lesquels nous avons travaillé :

```
10 cls
20 input "recherche jusqu'à";d
30 for a = 1 to d
40 for b = 1 to a
50 s = sqr(a2 +b2)
60 if s = int (s) then print a,b,s
70 next b,a
```

tous les triplets jusqu'à c = 255

c	a	b	97	65	72	183	33	180
5	3	4	101	20	99	185	111	148
13	5	12	105	63	84	185	104	153
15	9	12	109	60	91	185	60	175
17	8	15	111	36	105	185	57	176
25	15	20	113	15	112	187	88	165
25	7	24	115	69	92	193	95	168
29	20	21	117	45	108	195	117	156
35	21	28	119	56	105	195	99	168
37	12	35	123	27	120	195	75	180
39	15	36	125	75	100	195	48	189
41	9	40	125	44	117	197	28	195
45	27	36	125	35	120	203	140	147
51	24	45	135	81	108	205	133	156
53	28	45	137	88	105	205	123	164
55	33	44	143	55	132	205	84	187
61	11	60	145	100	105	205	45	200
65	39	52	145	87	116	215	129	172
65	33	56	145	24	143	219	144	165
65	25	60	145	17	144	221	140	171
65	16	63	149	51	140	221	104	195
73	48	55	153	72	135	221	85	204
75	45	60	155	93	124	221	21	220
75	21	72	157	85	132	225	135	180
85	51	68	159	84	135	225	63	216
85	40	75	165	99	132	229	60	221
85	36	77	169	119	120	233	105	208
85	13	84	169	65	156	235	141	188
87	60	63	173	52	165	241	120	209
89	39	80	175	105	140	245	147	196
91	35	84	175	49	168	247	95	228
95	57	76	181	19	180	255	153	204
…			…			…		

Exemple :

prenons

X = 10 201,

x = 101.

Après calcul, on obtient

n = 5,

ce qui fait

a = 20,

b = 99,

c = 101.

IV— On tente maintenant de démontrer **que ces deux formules ne se recoupent jamais**, même si on les multiplie par des facteurs k et k' entiers positifs non nuls.

pour n=0 ou m=0, on obtient 0,-1, 1 ou 1, 0, 1 donc il n'y a pas d'intérêt.

pour $n = 1$, on a $4n^2 - 1 < 4n < 4n^2 + 1$
pour $n > 1$, on a $4n < 4n^2 - 1 < 4n^2 + 1$
pour $m>0$, on a

$$2m+1 < 2m(m+1) < 2m(m+1)+1$$

pour n = 1, nous avons :

$$(1)\quad 2.k.m+k < 2.k.m.(m+1) < 2.k.m.(m+1)+k$$
$$4.k'.n^2 - k' < 4.k'.n < 4.k'.n^2 + k'$$
$$(2)\quad 4.k' - k' < 4.k' < 5.k'$$

Pour que les deux formules se recoupent, il faut que (1) = (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3.k' = 2.k.m+k \\ 4.k' = 2.k.m.(m+1) \\ 5.k' = 2.k.m.(m+1)+k \end{cases}$

Après résolution du système, on trouve que : $k' = k$ et $m = 1$. Donc ces deux formules se recoupent pour $n = 1$, $m = 1$, $k = k' = 1$; le triplet commun est (3, 4, 5).

pour n > 1 :

Considérons $k = k' = 1$. Nous avons :

$$4n < 4n^2 - 1 < 4n^2 + 1$$
$$2m+1 < 2m^2+2m < 2m^2+2m+1.$$

Pour que les formules se recoupent, il faudrait que $4n = 2m+1$ ce qui est impossible pour n et m entiers. Donc les formules ne se recoupent pas pour $k = k' = 1$.

Considérons k et k' supérieurs à 1. Nous avons $4.k.n < 4.k.n^2 - k < 4.k.n^2 + k$

$$2.k'.m+k' < 2.k'.m^2+2.k'.m < 2.k'.m^2+2.k'.m+k'$$

Pour que les formules se recoupent, il faudrait que : (3) $4.k.n^2 - k = 2.k'.m^2+2.k'.m$
(4) $4.k.n^2 + k = 2.k'.m^2+2.k'.m+k'$

Remarquons que $4.k.n^2 - k + 2.k = 4.k.n^2 + k$. Nous obtenons :

$$2.k'.m^2 + 2.k'.m + 2.k = 2.k'.m^2 + 2.k'.m + k'$$
$$2.k = k'$$
$$k = k'/2$$

Maintenant additionnons membre à membre les équations (3) et (4) :

$$4.k.n^2-k + 4.k.n^2+k = 2.k'.m^2+2.k'.m + 2.k'.m^2+2.k'.m+k'$$
$$8.k.n^2 = 4.k'.m^2 + 4.k'.m + k'$$
$$4.k'.n^2 = 4.k'.m^2 + 4.k'.m + k'$$
$$n^2 = m^2 + m + 1/4$$

n^2 n'est pas un entier et donc n ne le sera pas non plus. Donc ces deux équations ne peuvent admettre de solutions entières, et donc les deux formules ne peuvent se recouper.

Nous avons démontré que les deux formules ne peuvent se recouper qu'en un seul triplet (3, 4, 5).

V— Nous allons à présent étudier la parité de a, b et de c :

a) existe-t-il des triplets avec a et b impairs ?

si a est impair, alors il est de la forme $2.k + 1$
si b est impair, alors il est de la forme $2.k' + 1$
et donc c sera pair, et donc de la forme $2.k''$

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2$$
$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1$$
$$= 4(k^2 + k'^2 + k + k' + 1/2)$$

$c^2 = 4k''^2$. On voit donc que c^2 ne peut pas être égal à $a^2 + b^2$. Donc nous avons démontré que les triplets avec a et b impairs n'existaient pas.

b) si a et b sont pairs ?

si a et b sont pairs, alors c le sera aussi et donc on peut diviser le triplet par 2 pour obtenir un autre triplet. Un tel triplet n'est donc pas primitif.

c) existe-t-il des triplets avec a et b de parité différente ?

Prenons arbitrairement a pair et b impair, donc a est de la forme 2.k et b est de la forme 2.k'+1. c est aussi impair donc de la forme 2.k''+1.

$$a^2 + b^2 = (2k)^2 + (2k' + 1)^2$$
$$= 4k^2 + 4k'^2 + 4k' + 1$$
$$= 4(k^2 + k'^2 + k') + 1$$
$$c^2 = (2k''+ 1)^2$$

$= 4k''^2 + 4k'' + 1$. Si $a^2 + b^2 = c^2$ alors $4(k^2 + k'^2 + k') + 1 = 4k''^2 + 4k'' + 1$. Cette équation peut admettre des solutions, donc il peut exister des triplets avec a et b de parité différente.