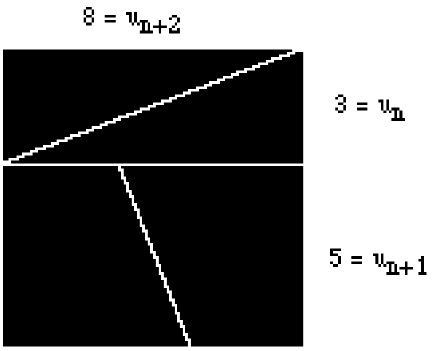
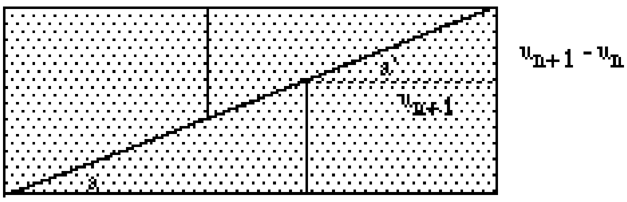
le paradoxe de Lewis Carroll … errare oculo est

par Olivier Bonnet (2nde),
Philippe Chas (1°S),
Razidine Fazal (2nde),
Aurore Jeanne (Tle C),
Carlos Do Couto (1°S),
Raimond Rivière (1°S).

Lycée Jean Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris
Lycée Jean Jaurès, 25 rue Charles Lecoq,
95104 Argenteuil Cédex

En déplaçant les quatre morceaux qui composent le carré, on peut les disposer de manière à obtenir le rectangle. Or l'aire du carré vaut 64, tandis que celle du rectangle vaut 65. D'où vient la différence ?





Examinons la figure de plus près : on remarque évidemment que 8 est la somme de 5 et de 3. Obtient-on la même situation en choisissant au hasard des triplets de ce genre ? Essayons par exemple 3, 4 et 7. Le résultat est nettement moins convaincant. Pour 2, 3 et 5, c'est déjà meilleur. Et pour 8, 13 et 21, l'illusion est presque parfaite. Le lecteur averti aura déjà reconnu dans les nombres proposés trois termes successifs de la célèbre suite de Fibonacci. Et plus on va loin dans les termes de la suite, plus l'illusion semble réussie.

Pour un rang fixé, l'aire du carré vaut $(u_{n+1})^2$ quand celle du rectangle vaut u_n x u_{n+2}. Quelle est exactement la différence ? Le calcul ci-dessous nous prouve que cette différence est toujours d'une unité, soit dans un sens, soit dans l'autre (tantôt le rectangle est le plus grand, et tantôt c'est le carré).

Alors pourquoi cette différence paraît-elle s'amenuiser à vue d'œil ? On montre que u_{n+1}/u_n converge vers le nombre d'or ϕ et que u_{n+2}/u_n converge vers $1+\phi$.
Or ϕ vérifie l'équation

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0, \text{ soit encore } 1/\phi = 1 - 1/(\phi+1).$$

Lorsque n devient grand on peut remplacer ϕ par u_{n+1}/u_n et f+1 par u_{n+2}/u_n :

$$u_n/u_{n+2} = (u_{n+1} - u_n)/u_{n+1}$$

Or $u_n/u_{n+2} = \tan a$ et $(u_{n+1}-u_n)/u_{n+1} = \tan a'$. On en conclut que pour des termes très grands de la suite de Fibonacci, les valeurs de tan a et de tan a' sont très voisines. L'espace entre le carré et le rectangle, pourtant toujours égal à une unité, devient négligeable pour l'œil.

La suite de Fibonacci est définie de la manière suivante : $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Montrons par récurrence que les termes de la suite de Fibonacci vérifient $(u_{n+1})^2 = u_{n+2} \times u_n + (-1)^n$

On a : $(1)^2 = 2 \times 1 + (-1)^1$ Vrai.
Admettons la propriété au rang n :

P(n) : $u_{n+1}^2 = u_{n+2} \times u_n + (-1)^n$. D'où :

$u_{n+1}^2 = u_n(u_{n+1} + u_n) + (-1)^n = u_n \times u_{n+1} + u_n^2 + (-1)^n$

Complétons pour obtenir $(u_{n+1} + u_n)^2$ dans le second membre :

$u_{n+1}(u_n + u_{n+1} + u_{n+1}) = (u_{n+1} + u_n)^2 + (-1)^n$

$u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1}) = (u_{n+2})^2 + (-1)^n$

$u_{n+1}u_{n+3} = (u_{n+2})^2 + (-1)^n$
P(n+1) … Vrai.

La version intégrale de cet article est parue dans "Tangente", n°17.