Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

ÉTUDE DE LA FORME DES ALVÉOLES DES ABEILLES

Année 2016 – 2017

GABARRA Clara, *élève de 1ère L*. TALON Emilie, BAREILLES Claire, KOLJIC Mirnesa , MARIN Sacha, WAGNER Brayan, RICHARDSON Victor, LIENARD Lucas, DRAPEAU Joris, *élèves de 1èreS*

Encadrés par Christelle Sjollema.

Établissement: Lycée Jules Supervielle – Oloron Sainte Marie (64)

Chercheur: Jacky Cresson, Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau UMR 5142 du CNRS

Tables des matières

1. Présentation du sujet 1

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus 1

Hypothèse 1: La forme doit correspondre à celle de la larve. 1

Hypothèse 2: La structure répond à un principe d'économie de matière. 1

Hypothèse 3: La structure répond à une optimisation du traitement de l'information et de la communication. 1

Hypothèse 4: La structure répond à une optimisation du nombre d'alvéoles. 1

Hypothèse 5: La structure doit répondre à un maximum d'échange de chaleur entre les alvéoles. 1

Hypothèse 6: La structure répond à une optimisation de la solidité de la structure de l'alvéole. 1

Hypothèse 7: Des alvéoles rondes. 1

3. Traitement du sujet 1

L'abeille (1) 1

L'alvéole 2

La complexité 3

Le pavage 4

Le cercle 4

Les polygones réguliers 4

Démontratration de la conjecture Honeycomb 5

Une surface hexagonale 6

1. Présentation du sujet

La nature fonctionne sur un principe bien connu: *la sélection naturelle*, c'est à dire qu'une espèce adoptera la méthode qui s'adapte le mieux au milieu ou à sa survie. L'Homme de tout temps a étudié la morphogenèse, les lois régissant les formes et les structures de la nature et s'en est inspiré, c'est le Biomimétisme. A travers le temps, l'abeille a fasciné de nombreux peuples comme les Mayas, les Grecs et même les Basques et en particulier de nombreux scientifiques comme Aristote, Darwin et Archimède qui ont étudié l'organisation de la ruche, l'anatomie de l'abeille, et la structure de l'alvéole.

Domaine de recherches

Étudier mathématiquement la sélection de la forme de l'alvéole.

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

En étudiant la structure en 2 dimensions et en 3 dimensions, nous avons émis et vérifié les hypothèses suivantes:

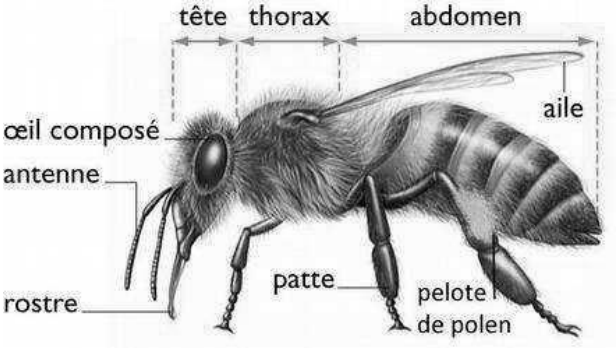
Hypothèse 1: La forme doit correspondre à celle de la larve.
Hypothèse 2: La structure répond à un principe d'économie de matière.
Hypothèse 3: La structure répond à une optimisation du traitement de l'information et de la communication.
Hypothèse 4: La structure répond à une optimisation du nombre d'alvéoles.
Hypothèse 5: La structure doit répondre à un maximum d'échange de chaleur entre les alvéoles.
Hypothèse 6: La structure répond à une optimisation de la solidité de la structure de l'alvéole.
Hypothèse 7: Des alvéoles rondes.

3. Traitement du sujet

L'abeille (1)

L'abeille joue un rôle essentiel dans la pollinisation, elle assure 80% des espèces de plantes. L'abeille joue alors un rôle essentiel dans l'alimentation végétale humaine. L'abeille a une morphologie lui permettant la récolte et le transport de pollen.

Morphologie d'une abeille



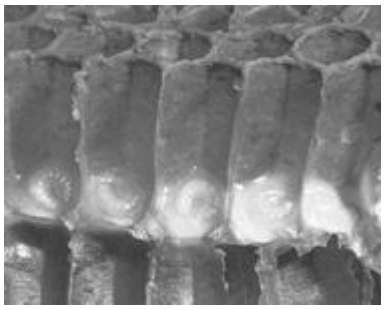
Nous pouvons noter **les antennes** permettent à l'abeille de se renseigner sur l'environnement (nature, forme, la rugosité, température,) et de communiquer avec ses congénères ; ainsi que **les pattes** postérieures qui sont utilisées pour la récolte et au transport du pollen. Elles possèdent des brosses à pollen et des corbeilles qui retiennent le précieux butin. Puis notons également **les ailes qui** servent à

émettre des sons intervenant dans la communication. Pour finir dans les éléments principaux **l'abdomen** contient le jabot, sorte de réservoir où l'abeille accumule le nectar et fabrique le miel. Les abeilles vivant au sein des ruches possèdent un comportement social, elles communiquent entre elles avec l'aide de phéromone, d'une gestuelle précise…

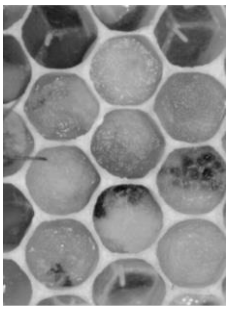
Il faut savoir qu'un essaim moyen est constitué d'environ 100 000 cellules, ce qui représente 1 200 grammes de cire nécessaire à sa fabrication. Cette cire est produite à l'aide du miel, sachant que pour un essaim moyen on a besoins de 7,5 kg de miel. De plus chaque alvéole possède un bourrelet d'une épaisseur de 0,07 millimètre

L'alvéole

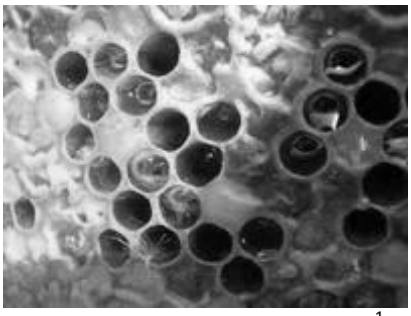
Les alvéoles sont construites essentiellement en cire par les abeilles et c'est là que sont élevées les larves et stockés le miel et le pollen. Les ouvrières travaillent en groupe à l'édification des alvéoles dans lesquelles seront abrités le couvain et les réserves de nourriture.



Coupe horizontale d'alvéole, guidée[1]



Vue du dessus d'une planche d'alvéole, guidée



Alvéole de ruche, non guidée[1]

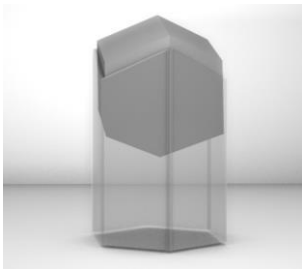
On pourrait penser que l'alvéole est un prisme droit à base hexagonale, mais en fait l'alvéole d'abeille est composée d'un prisme droit à base hexagonale surmonté d'une partie d'un dodécaèdre rhombique(2) que la ruche soit "sauvage" ou guidée

Construction non guidée[1]*, les formes sont aussi régulières mais en "tranches"*

Structure "guidée"[1] *de la ruche*

[1] **Structure guidée:** ce sont les ruches construites à l'aide d'un "Cadre" contenant des feuilles de cire gaufrée dans ce cas la construction sera guidée (photo). A l'inverse si elles n'ont aucune base cela sera une construction non guidée, sauvage ou libre.

Nos recherches nous ont permis de modéliser une alvéole d'abeille en 3 dimensions. Nous pouvons voir qu'une alvéole est composée d'un dodécaèdre rhombique modélisé en jaune puis d'un prisme à base hexagonale.



De plus, nous pouvons voir que tout au cours de l'évolution de la larve jusqu'à ce qu'elle devienne une abeille capable d'être autonome, elle entre parfaitement dans l'alvéole jusqu'à pouvoir en sortir *(Cf Schéma de l'évolution de la larve)*. Nous allons étudier plusieurs hypothèses sur sa forme. Ainsi la vérification de l'hypothèse numéro (3) [2] va nous permettre d'exclure certaines géométries. La photographie ci-contre montre les prémices d'une ruche sans l'aide d'une base artificielle.

Schéma de l'évolution de la larve

Prémice d'un essaim

La complexité

A un moment les abeilles vont devoir créer des alvéoles pour stocker le miel, la reine, leur descendance. Il va falloir traiter de l'information : lieu constructible, le nombre de côtés d'une alvéole, profondeur, base… Ces informations nécessaires sont inscrites génétiquement dans l'abeille donc dès sa naissance et doivent être les plus faciles à reproduire pour un nombre indéterminé de fois. Les abeilles ont un besoin d'effectuer rapidement la construction du fait que l'abeille européenne ne vit que environs 122 à 152 jours.

Une des conditions nécessaires à sa construction est la rapidité ainsi que la dextérité et l'optimisation ; pour cela l'abeille essaye de créer la forme la plus simple à produire et la plus rentable, il existe les polygones réguliers qui répondent à ces critères, ils sont formés d'une seule longueur et d'un seul angle.(3) Mathématiquement, on dit que le polygone est de complexité 1 du fait qu'un polygone régulier est un ensemble de segments, générés par des droites de degré 1, modélisables par des fonctions affines, linéaires (les fonctions constantes étant exclues), alors que le cercle est de complexité 2 créé à partir d'une équation de degré 2.

Equation de degré 1	Equation de degré 2
Fonction affines: **f(x) = ax+b** Fonction linéaire: **f(x) = ax**	Équation du cercle: $\mathbf{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$

On peut donc confirmer cette hypothèse et rejeter la forme circulaire.(4)

Après avoir étudié le comportement et la morphologie des abeilles vivant en société, nous avons observé une planche de ruches, on en a déduit les hypothèses suivantes *"Dans un espace donné, l'abeille construit un maximum d'alvéoles"* et *"La structure doit répondre à un maximum d'échange de chaleur entre les alvéoles. "* Ces hypothèses peuvent être interprétées par le pavage du plan. Le pavage du plan est une

[2] **Rappel:** La structure répond à une optimisation du traitement de l'information et de la communication.

façon de remplir un espace à l'aide de figures ou d'un motif identique sans trous ni débordements.

Le pavage

Si une ruche ne pave pas une surface par conséquent, elle aura des espaces non comblés de matière ce qui serait une perte de stockage ainsi qu'une perte d'échange de chaleur entre les alvéoles (émissions ou absorptions). Les abeilles chauffent la cire jusqu'à ce que la cire deviennent ductile ce qui permet aux cloisons hexagonales très régulières de s'ériger presque d'elles-mêmes. De plus la construction de la ruche semble se faire par couches superposées les unes par rapport aux autres, si la ruche possède un espace à un endroit de la couche inférieure alors la couche supérieure ne pourra pas par conséquent se faire à l'endroit vide de la couche inférieure.

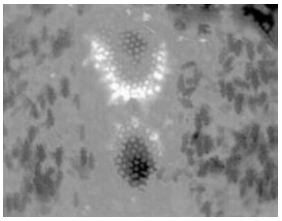
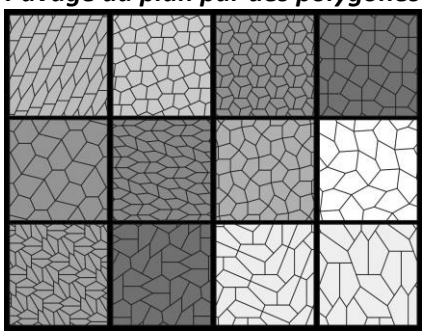


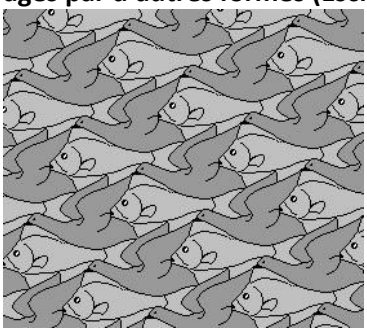
Image thermique de deux sites en construction

Après ces observation on en déduit que la ruche doit paver l'espace. Nous allons alors étudier le pavage du plan à l'aide des mathématiques, il faut savoir qu'il existe une infinité de formes qui peuvent paver le plan. Ci-dessous il y a quelque représentation possible du pavage du plan par des formes.

Pavage du plan par des polygones



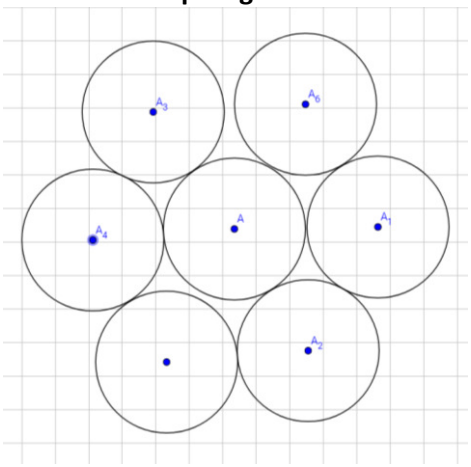
Pavages par d'autres formes (Escher)



Le cercle

Il faut savoir que toutes les formes géométriques ne pavent pas le plan ; le cercle ne pave pas le plan par exemple. Ainsi le cercle laissera des espaces vides, ce qui ne sera pas optimal pour la ruche qui perd une quantité d'air non utilisable servant pour le stockage (miel, abeille reine…). Nous pouvons alors définitivement exclure le cercle qui n'est pas une forme optimale, et bien trop complexe à reproduire. Nous avons vu que l'alvéole à produire ne doit pas être trop compliquée du fait que l'abeille ne vit pas longtemps et doit en produire le plus possible. Nous avons vu plus haut qu'il existe les polygones réguliers nous allons alors les étudier.

Tentative de pavage avec un Cercle

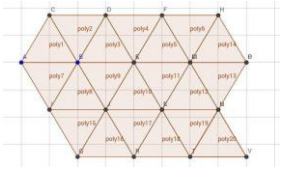


Les polygones réguliers

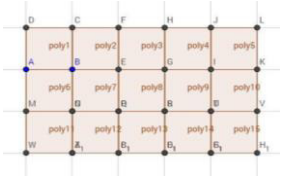
Les abeilles ont choisi de créer des alvéoles à l'aide de polygones réguliers car ils sont simples à produire. Les caractéristiques d'un polygone régulier sont seulement une longueur *a* et un angle. On peut distinguer deux types de polygones réguliers ceux qui pavent le plan puis ceux qui ne pavent pas le plan. Nous démontrerons qu'il existe peu de polygones réguliers qui pavent le plan.

Deux polygones réguliers qui pavent

Triangles équilatéraux

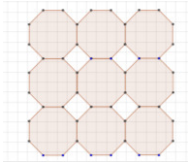


Carrés

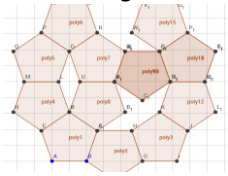


Deux polygones réguliers qui ne pavent pas

Octogone



Pentagone

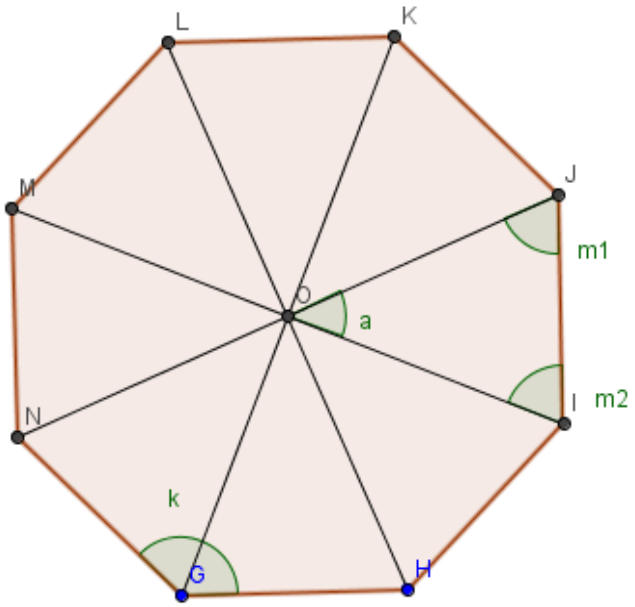


De même que pour le cercle les polygones réguliers qui ne pavent pas le plan ne sont pas optimaux et laissent des trous ne permettant pas le stockage ou l'espace suffisant pour stocker. Nous allons alors les exclure également car les abeilles sont dans un principe d'optimisation.

Démontration de la conjecture *Honeycomb* (7)

Données:

- *n est* le nombre de côtés du polygone
- *k est l'*angle formé par deux côté du polygone
- *m est la mesure des deux angles de la base des triangles, où* $m=m_1=m_2$
- *a est* la mesure de l'angle au centre
- *n* est le nombre de côtés du polygone $n > 2$



Démonstration:

Dans un polygone régulier tous les angles en partant du centre sont égaux, on a alors $m = \frac{360}{n}$

Les angles m_1 et m_1 sont égaux on note alors $m = \frac{180-a}{2}$, on soustrait l'angle *a* à 180 pour trouver combien mesurent les deux angles restant car la somme des angles d'un triangle est égal à 180 puis on effectue un division par 2 car m_1 et m_2 sont égaux.

Pour trouver la valeur de *k*, c'est simplement la somme des angles de deux côtés adjacents donc on a l'égalité $k = 2 \times m = 180 - a = 180 - \frac{360}{n} = 180(1 - \frac{2}{n})$.

Le polygone régulier pave le plan équivaut à 360° est divisible par *k* car on suppose que *k* est un entier

Cette condition est nécessaire ; prouvons qu'il existe un entier naturel y tel que $360 = y \times k$, Nous pouvons alors en déduire $360 = y \times k \iff 360 = y \times 180 \times (1 - \frac{2}{n}) \iff 2 = y \times (1 - \frac{2}{n})$, on obtient alors l'équation suivante $y = \frac{2}{1-\frac{2}{n}} = \frac{2n}{n-2} = \frac{2(n-2)+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$ de plus on sait que $n > 2$ donc on obtient la condition nécessaire $\frac{4}{n-2}$ est un entier. L'équivalente à $n - 2$ divise 4, vrai uniquement pour $n = 3, n = 4$ et $n = 6$ car on obtient un entier.

Si on considère la propriété suivante : " si un polygone régulier pave le plan, alors la somme des angles du centre du polygone régulier équivaut à 360° est il est divisible par k, alors seuls les polygones réguliers tels que le triangles, le carré et l'hexagone pavent le plan

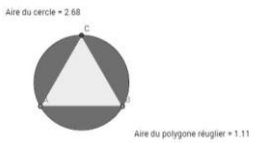
Parmi ces 3 formes de polygones réguliers qui pavent le plan, l'abeille choisit l'hexagone

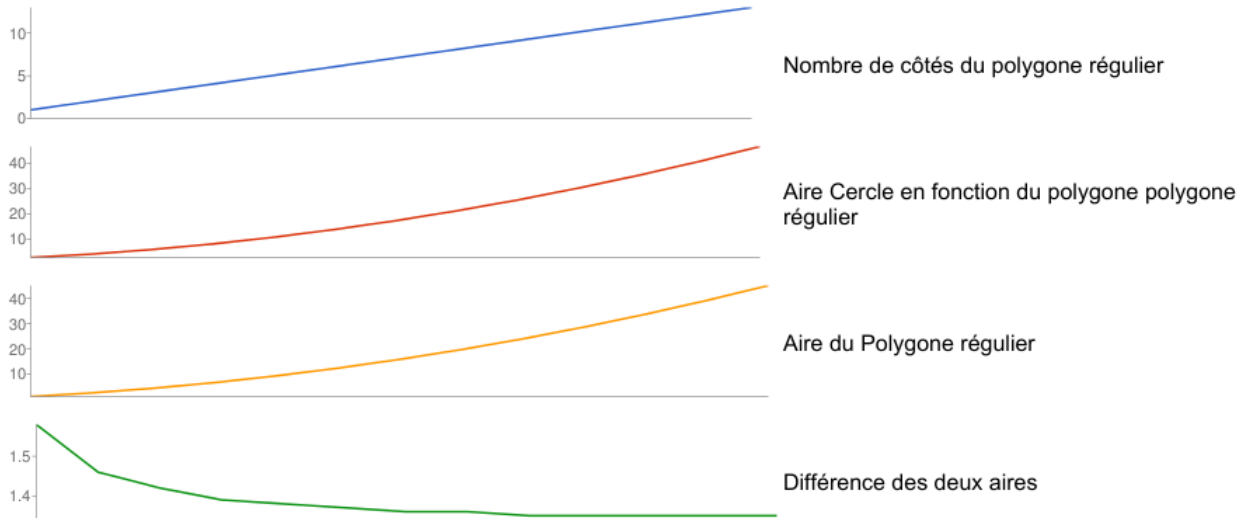
Une surface hexagonale

Dans la partie précédente nous avons vu que l'alvéole avait une forme étrange et particulière. Cette forme semblait bien pratique pour contenir au mieux la larve dans les alvéoles. Cela fait appel aux hypotheses 1 et 2 vues plus haut. Si la forme de l'alvéole devait approximer au mieux celle de l'abeille et de la larve, cela devrait être un cercle ou une forme qui s'en approche.

Cependant tout polygone régulier est inscrit dans un cercle. Plus le polygone a de côtés, plus il approxime un cercle (Travaux d'Archimède : approximation du cercle par des polygones réguliers.). Il y a donc moins d'espace vide, la quantité de matière est optimisée.(5)

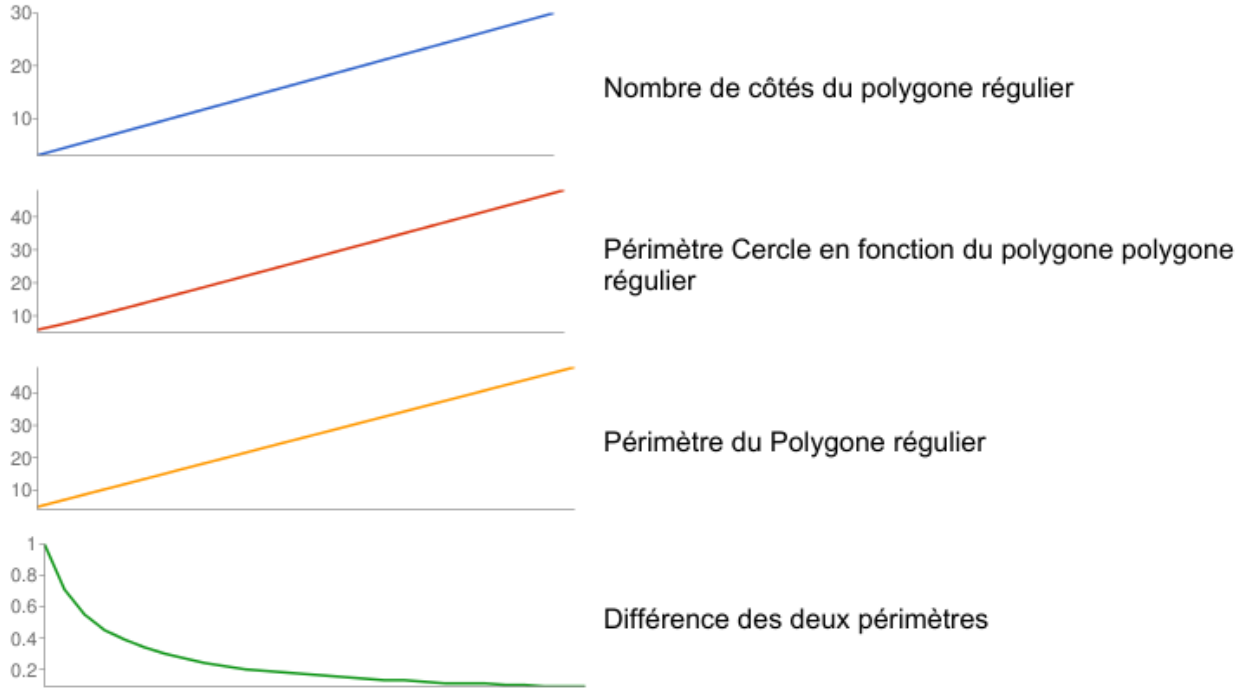
Ci contre il y a la modélisation de l'évolution de la différence de l'aire entre le disque et le polygone régulier où le polygone régulier a pour côté *a* = 1,6. Les côtés sont toujours d'une même longueur *a*. Cette aire diminue au fur et à mesure que le nombre de côtés du polygone régulier augmente. La partie en blanc est le polygone et la partie en vert l'aire du cercle qui n'est pas comblée par le polygone régulier inscrit. Les graphiques ci dessous décrivent ces évolutions.





(Si l'animation ne marche pas : http://urlz.fr/5Gcu)

La forme des alvéoles d'abeille est un prisme à base hexagonale donc à 6 côtés soit une différence d'air entre le polygone et le cercle de 1,39 U.A. Alors que pour le triangle nous avons une différence bien plus grande de 1,58 U.A soit 0,19 U.A en moins par alvéole. Sachant qu'un cadre artificiel d'une ruche comporte 3220 alvéoles environ, nous pouvons estimé une perte aux alentours de 630,8 U.A par cadre artificiel en quantité de miel pour les abeilles. Cependant il existe toujours des polygones réguliers qui prennent encore plus d'aire que l'hexagone : ce sont tous les polygones à 6+n côtés. Pour un polygone régulier à 20 côtés la différence d'aire est de 1,34 ; cette valeur à deux décimales près reste constante pour n'importe quel nombre de côtés. De ce fait malgré la forme observée le cercle pourrait très bien satisfaire : il n'y a même aucune perte d'aire. Nous allons nous intéresser au point de vue du périmètre.

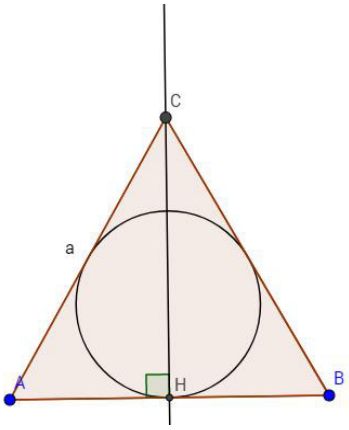


Ci dessus le graphique nous montre que plus le nombre de côtés augmente plus la différence des deux périmètres va tendre vers la valeur 0. Cela signifie que plus le nombre de côtés est important, plus la quantité de cire nécessaire à la fabrication d'une alvéole se rapprochera de la valeur maximum qui est le périmètre du cercle. La valeur qui nous intéresse est celle d'un hexagone où la différence de périmètre est

de 0,45 U.A(8). La différence de périmètre se situe proche de la moyenne à 0,5 près, du fait que entre la valeur différente maximale (1) et la valeur minimale proche de 0. Cependant le pentagone a aussi une valeur qui se situe à 0,5 près de la moyenne : sa différence étant de 0,55 U.A. Cependant 0,55 U.A, demande plus de matière que 0,45 U.A. Nous reviendrons sur cette différence de quantité de matière entre les deux dans la partie sur les échanges de chaleur et l'isolation pour lesquels il est préférable d'avoir un périmètre demandant 0,45 U.A, ainsi que dans la partie sur le pavage du plan rejetant définitivement la possibilité qu'une alvéole soit un polygone régulier à 6 côtés.

Revenons sur notre hypothèse numéro 2 où l'abeille est dans le principe d'économie de matière alors parmi ces 3 polygones réguliers qui pavent le plan il va falloir qu'on trouve le plus optimal au niveau du périmètre et l'aire. Pour cela nous allons analyser les trois polygones réguliers (triangle équilatéral, carré, hexagone) pour déterminer celui qui minimise la quantité de matière nécessaire à sa construction. De plus nous avons besoin d'avoir le plus grand disque inscrit parmis ces 3 polygones réguliers qui pavent le plan pour une même surface car il faut aussi un espace suffisamment grand pour y stocker les larves.
Mathématiquement cela peut se traduire en : pour une surface fixée, quel est de ces 3 polygones celui qui a le plus petit périmètre et le plus grand disque inscrit ?(5)

Triangle Equilatéral



Données

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

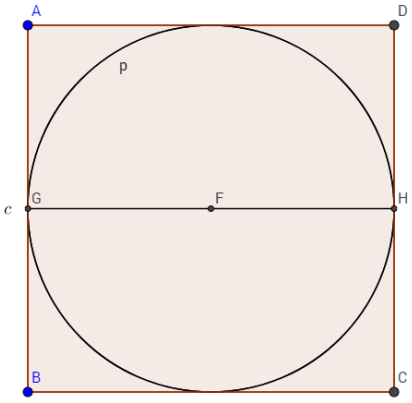
$$A_{cercle} = \pi * a \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$i_{perpendiculaire} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$AH = \frac{a}{2}$$

$$P = 3a$$

Carré



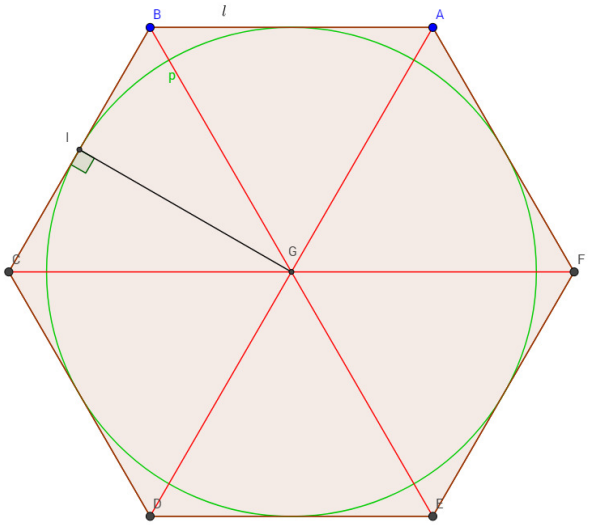
Données

$$S = c^2$$

$$P = 4c$$

$$GH = AD = c$$

$$A_{cercle} = \pi * (\frac{c}{2})^2$$



Données

$P = 6l$

$A_{hexagone_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

$A_{hexagone_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

$IG = \sqrt{BG^2 - BI^2} = \sqrt{l^2 - (\frac{l}{2})^2}$

$A_{cercle} = \pi * (\frac{\sqrt{3}}{2} l)^2$

	Triangle équilatéral de côté a	Carré de côté c	Hexagone de côté l
Périmètre P en fonction du côté	$3a$	$4c$	$6l$
Aire S en fonction du côté	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	c^2	$\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$
S en fonction de P	$\frac{p^2\sqrt{3}}{36}$	$\frac{p^2}{16}$	$\frac{p^2\sqrt{3}}{24}$
P^2 en fonction de S	$\frac{36S}{\sqrt{3}}$	$16S$	$\frac{24S}{\sqrt{3}}$

Pour une aire donnée = 1

Triangles équilatéraux	$\frac{36}{\sqrt{3}} = 20,7846096908$
Carré	16
Hexagone	$\frac{24}{\sqrt{3}} = 13,8564064606$
$P^2_{hexagone} < P^2_{triangleéquilatéral} < P^2_{carré}$ $P_{hexagone} < P_{triangleéquilatéral} < P_{carré}$	

Nous pouvons conclure et dire que l'hexagone a le plus petit périmètre entre le triangle et le carré ce qui nécessite moins de matière pour sa confection. Cependant les alvéoles stockent non seulement du miel mais aussi des larves. Nous allons alors étudier l'aire du cercle inscrit dans ces polygones réguliers. En moyenne la longueur d'un côté d'une alvéole sur une planche artificiel est de 0,5cm, cela sera notre base

pour calculer l'aire du cercle inscrit dans les 3 polygones réguliers.

Pour une longueur de 0,5cm

Cercle inscrit dans le triangle équilatéral	$\pi * 0,5\frac{\sqrt{3}}{6} = 0,45344984105857$
Cercle inscrit dans le carré	$\pi * (\frac{0,5}{2})^2 = 0,19634954084936$
Cercle inscrit dans l'hexagone	$\pi * (\frac{\sqrt{3}}{2} * 0,5)^2 = 0,58904862254812$
$A_{Cercle\ hexagone} > A_{Cercle\ trangle\acute{e}quilat\acute{e}ral} > A_{Cercle\ carr\acute{e}}$	

Cela confirme alors les hypotheses 2 et 3 sur l'économie de matière qui consiste à produire un périmètre minimal autour des larves avec la plus grande aire de stockage possible pour le miel, ainsi que l'hypothèse qui doit correspondre à la forme de la larve

Cependant lorsque nous observons les alvéoles, elles possèdent un bourrelet de 0,07 millimètre sur les côtés de l'hexagone. Ce bourrelet est présent pour plusieurs raisons, la première, la plus intuitive, est la nécessité que si l'alvéole doit avoir un bourrelet, l'épaisseur ne peut être nulle ou être proche de 0 (invisible à l'oeil nu). Le second argument est la solidité : la structure doit supporter du poids (progéniture, miel…), la solidité de l'alvéole dépendra de son épaisseur, de sa masse, de sa longueur, de sa forme et de sa structure**.** Nous allons donc essayer de voir comment la structure répond à une optimisation de la solidité de la structure de l'alvéole. Dans un premier temps étudions l'architecture de l'alvéole en détails.

Si il y a des trous, ils seront comblés par l'air qui est un isolant donc l'échange de chaleur entre les alvéoles sera diminué. Il ne faut pas non plus de débordement car d'après l'hypothèse 2 la quantité de matière doit être la plus petite possible.

La forme de l'alvéole doit donc paver le plan.

Le cercle ne pave pas le plan, il se forme des espaces vides ou des superpositions

Le solide

Observation

D'après ce que l'on a étudié, l'alvéole devrait être un prisme à base hexagonale. Or l'alvéole est un solide à fond non plat (non hexagonal) mais constitué de trois losanges de mesures particulières. Cette structure confirme-t-elle mathématiquement les hypothèses?

Nous allons alors reprendre les hypothèses précédentes et ajouter les conditions manquantes pour que cela reste vrai avec une alvéole en 3 dimensions. L'hypothèse "*La structure doit correspondre à celle de la larve",* reste vraie en obtenant un fond qui n'est pas plat mais constitué de trois losanges, comme nous l'avons vu avec la morphologie de la larve à l'abeille. ***(Cf:** Schéma de l'évolution de la larve)*

La morphologie de l'abeille au niveau de l'extrémité de l'abdomen n'est pas plat mais triangulaire. Tous les solides constitués de trois losanges peuvent être utilisés comme base pour l'alvéole du fait qu'ils ressemblent à la morphologie triangulaire de l'abeille. Cette forme ci spécial construit à base de losanges est appelé le rhombe.

Schéma de l'évolution de la larve

Si nous passons à l'hypothèse suivante *"L'abeille est dans le principe d'économie de matière." et "*La structure répond à une optimisation du traitement de l'information et de la communication.*"* l'hypothèse concernant le principe d'économie de matière n'est plus vraie : cela a été démontré en 1964 par Fejes Toth

qui a prouvé que si le fond était formé de deux petits hexagones ainsi que de deux losanges, à la place de trois rhombes, la quantité de cire serait inférieure, mais seulement de 0,35% de quantité de cire économisé, pour une forme beaucoup plus compliqué à réaliser. Cela reste donc la forme la plus optimale mais pas la plus économique.

Hypothèse 4: Dans un espace donné, l'abeille construit un maximum d'alvéoles

Hypothèse 5: La structure doit répondre à un maximum d'échanges de chaleur entre les alvéoles.

Hypothèse 6: La structure optimise la solidité

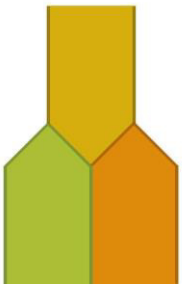
Tout comme l'hexagone dans un plan en 2 dimensions, la forme de l'alvéole pave *en surface* l'espace. De plus, la morphologie de la larve n'ayant pas d'extrémité inférieure plate mais se rapprochant de la forme triangulaire, l'alvéole ne doit pas avoir une extrémité inférieure plate non plus, pour approcher au mieux la forme de la larve. Les deux images qui vont suivre sont deux photographies vues du dessus et une coupe d'une ruche où les alvéoles contiennent des larves.

Photographie vue du dessus

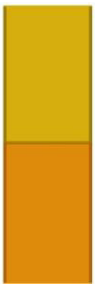
Photographie d'une coupe vertical

Ensuite, l'alvéole possède un fond constitué de trois losanges qui sont collés à trois autres alvéoles, contrairement au fond plat qui n'est collé qu'à une seule autre alvéole. Le fait d'avoir quatre alvéoles mutuellement en contact au lieu de deux permet aux alvéoles remplies de posséder une meilleure solidité ainsi qu'un échange de chaleur par surface de contact au niveau de la base superieure. voir https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00890188/document)

Alvéole à base triangulaire



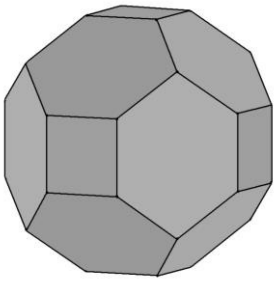
Alvéole à base hexagonal



Si on considère le prisme droit à base hexagonale *(fond plat)* et que l'on rajoute le dodécaèdre rhombique tronqué pour obtenir la forme de l'alvéole, le volume reste constant. On peut voir que ce qui est enlevé est ajouté.

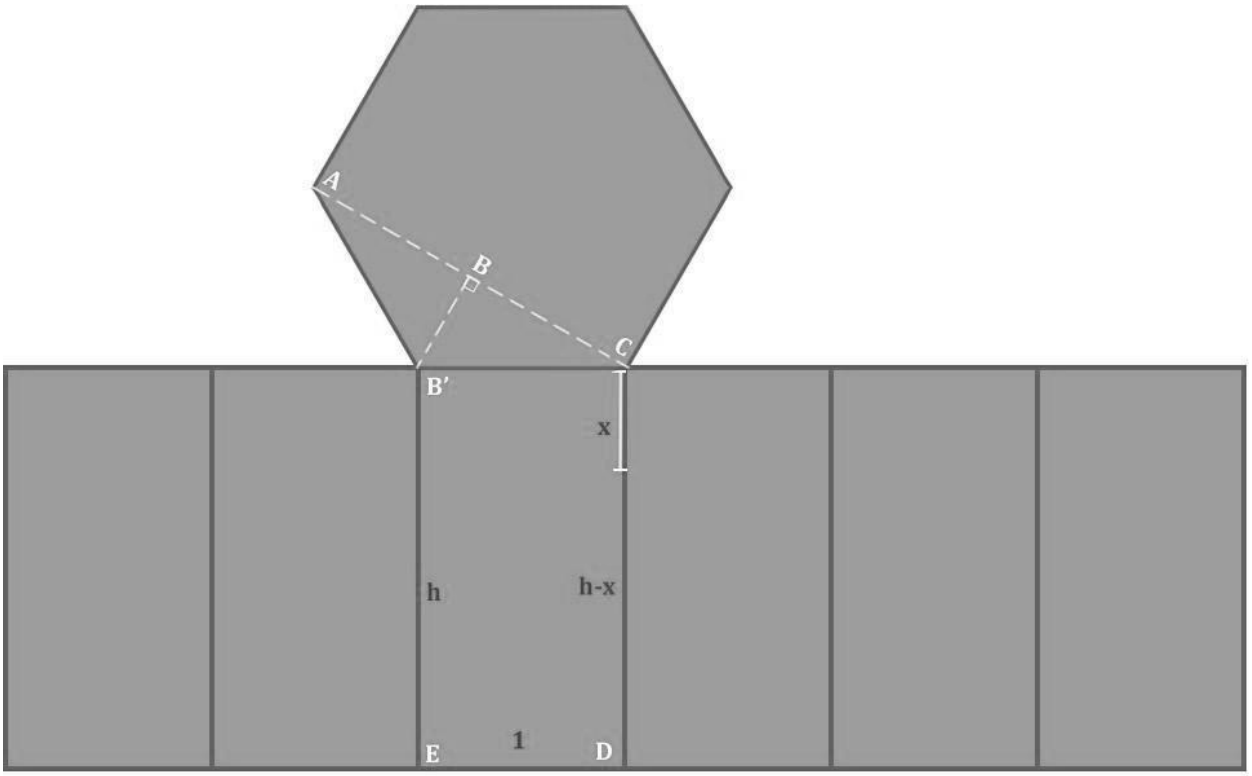
On le démontre par un calcul après avoir obtenu les expressions algébriques de l'aire de chacune des bases

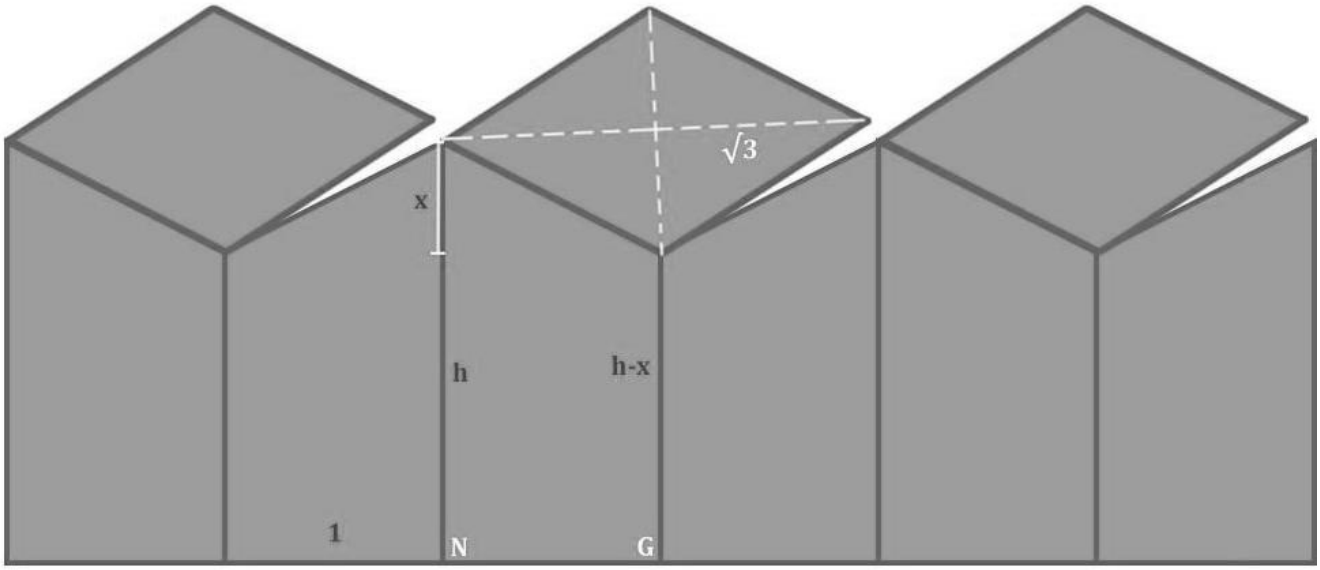
Mais il existe une infinité de losanges qui peuvent tous satisfaire ces conditions. Ajoutons un autre critère: l'optimisation de la quantité de cire.



Dodécaèdre rhombique tronqué

Notre fond aux trois losanges doit utiliser le minimum de cire c'est à dire avoir un minimum d'aire de surface et contenir quand même le même volume qu'une alvéole à fond hexagonal.





$$A_{plat} = aire_{hexagone} + 6 * aire_{face} = \frac{3\sqrt{3}}{2}+6h$$

$$A_{los} = aire_{losange} + 6 * aire_{trapèze} = 3 * \frac{d1 * d2}{2} + 6 * \frac{2h - x}{2} = 3\left(2h - x + \frac{\sqrt{3 + 2x^2}}{2}\right)$$

où d1 et d2 sont les diagonales du losange.

Avec ces formules, on démontre par le calcul que le volume du prisme droit à base hexagonale est égal au volume du solide à base rhombique,

En effet, le volume est égale à $V = h * A_i$ soit,

$$V = \frac{3h\sqrt{3}}{2}$$

Gardons en tête que le côté de l'hexagone est considéré comme égal à 1, la hauteur de l'alvéole h est une constante, et x varie entre 0 et h, où $x = 0$ correspond à une alvéole à fond plat.

A partir de là nous pouvons étudier l'aire d'une telle alvéole avec la fonction,

$$A_{los} = 3(2h - x + \frac{\sqrt{3 + 12x^2}}{2})$$

Mais comme on cherche une aire de surface minimale pour un volume donné, nous allons étudier les variations de cette fonction à l'aide de la dérivée,

$$A'_{los} = 3(\frac{6x}{\sqrt{3 + 12x^2}} - 1) = 9\frac{8x^2 - 1}{\sqrt{3 + 12x^2}(6 + \sqrt{3 + 12x^2})}$$

A' a le signe de $8x^2 - 1$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	h
$8x^2-1$	−	0	+
$A'_{los}(x)$	−	0	+
$A_{los}(x)$	↘	A min	↗

L'aire de la surface d'une alvéole au fond formé de trois losanges atteint un minimum quand $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

De tous les losanges possibles, celui des alvéoles est celui qui optimise la surface et donc la matière, avec un angle qui mesure à peu près 109°. C'est celui qui est observé. L'aire du solide rhombique de l'alvéole est inférieure à celle du prisme droit.

Considérons ce solide pour $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$, la surface est égale à :

$$A_{los} = 3(2h - x + \frac{\sqrt{3+12x^2}}{2})$$

$$= 3 * 2h - 3 * \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3+12(\frac{\sqrt{2}}{4})^2}}{2} = \frac{3\sqrt{4,5}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} + 6h$$

$$\sim 3,18 - 1,06 + 6h \sim 2,12 + 6h$$

Le prisme à base hexagonale a pour aire, $A_{plat} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 6$ □ $\simeq 2{,}59 + 6$ □ On peut alors dire que $A_{plat} > A_{los}$

L'hypothèse d'économie de matière est confirmée à nouveau.

Conclusion(6)

La forme étudiée de l'alvéole composée d'un prisme droit dont une base hexagonale à fond composé de trois losanges décrits ci dessus confirme par un point de vue mathématique que la structure de l'alvéole construite par l'abeille reposerait sur un principe d'optimisation :

- minimisation la matière , le traitement de l'information et la communication,
- maximisation la solidité de la structure, et l'échange de chaleur. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Nid_d%27abeilles_(structure)

Notes d'éditions

(1) Il est nécessaire de décrire l'abeille et la "géométrie" de son corps pour bien comprendre la suite

(2) Un dodécaèdre rhombique est un polyèdre convexe à 12 faces rhombiques, c'est-à-dire dont les arêtes sont de même longueur.

(3) On ne comprend pas de quelle information l'abeille a besoin pour former un cercle, ni en quoi le degré de l'équation est relié au traitement du tracé. Cette partie manque d'arguments Il faudrait en savoir plus sur ce que signifie « le traitement de l'information ».

(4) On ne peut pas confirmer l'hypothèse à l'aide de ce qui précède.

(5) On s'éloigne un peu vite du problème des larves ; si on souhaite seulement stocker le miel, on peut ne s'intéresser qu'à la surface. Si on souhaite loger des larves, le problème est un peu différent, car ce n'est pas l'aire totale qui est intéressante, mais l'aire du plus grand disque logeable dans le polygone (cercle inscrit).
(6) Pour la conclusion, il y a des points qui n'ont pas été traités : le traitement de l'information n'est pas clair dans l'article. De même, il n'y a pas d'argument convaincant concernant les échanges de chaleur. Cela n'a pas été modélisé ni décrit.
On pourrait dire que, d'un point de vue mathématique, l'étude montre que les hypothèses 1, 2, 4 semblent pertinentes…il y a sans doute d'autres hypothèses possibles.
Par exemple l'origine de la structure hexagonale n'est pas du tout claire et les dernières études semblent indiquer au contraire que les abeilles ne fabriquent pas des hexagones, mais des cercles… il y a encore des recherches à approfondir !
(7) Honeycomb : Parmi ces 3 formes de polygones réguliers qui pavent le plan, l'abeille choisit l'hexagone
(8) U.A = unité d'aire