Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Jouer avec des allumettes

Année 2018-2019

Aguillon Nathan, Besnault Louison, Champigny Florian, Denis Romain, Fardègue Inès, Nouar Adil, élèves de seconde

Encadrés par Jildaz Cousin

Établissement : Lycée Edouard Branly de Châtellerault

Chercheur : Lionnel Ducos, université de Poitiers

Présentation

Règle du jeu

Ce jeu se joue à 2 joueurs.

On a un nombre aléatoire d'allumettes sur la table.

Le premier joueur prend 1 ou 2 allumettes,

Le suivant prend un nombre d'allumettes compris entre un et le double du joueur précédent.

Par exemple, si le joueur 1 a pris 2 allumettes, le joueur 2 peut en prendre de 1 à 4.

Celui qui prend la dernière allumettes gagne la partie.

Exemple

La partie commence avec 12 allumettes.

Le joueur 1 peut prendre 1 ou 2 allumettes.

	On peut prendre au max...	Choix du joueur	Allumettes restantes
Joueur 1	2 allumettes	1 allumette	11 allumettes
Joueur 2	2 allumettes	2 allumettes	9 allumettes
Joueur 1	4 allumettes	2 allumettes	7 allumettes
Joueur 2	4 allumettes	4 allumettes	3 allumettes
Joueur 1	8 allumettes	3 allumettes	0 allumette

Le joueur 1 gagne car il a prit la dernière allumette qui était posée sur la table.

Problématique

Y a-t-il une stratégie gagnante ?

Annonce des résultats

Nous avons trouvé une stratégie mais elle ne permet pas de gagner à tous les coups : cela dépend du nombre d'allumettes sur la table au départ.

1. Réalisation d'un algorithme

Nous avons réalisé un premier algorithme sur Scratch pour jouer contre l'ordinateur.

Cet algorithme joue aléatoirement.

Tout d'abord l'algorithme choisit un nombre d'allumettes de départ entre 5 et 50.

Ensuite le joueur commence: il retire entre 1 et 2 allumettes.

L'ordinateur choisit un nombre aléatoire entre un et le double de ce qu'a pris le joueur précédent.

Ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des deux gagne en prenant toutes les allumettes qui restent sur la table.

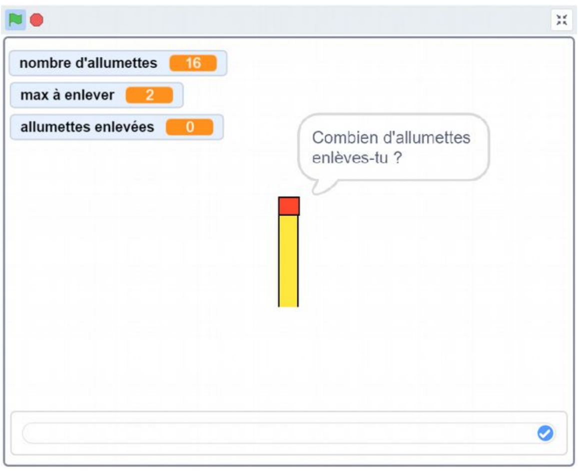

Illustration 2: Algorithme 1, écran de jeu

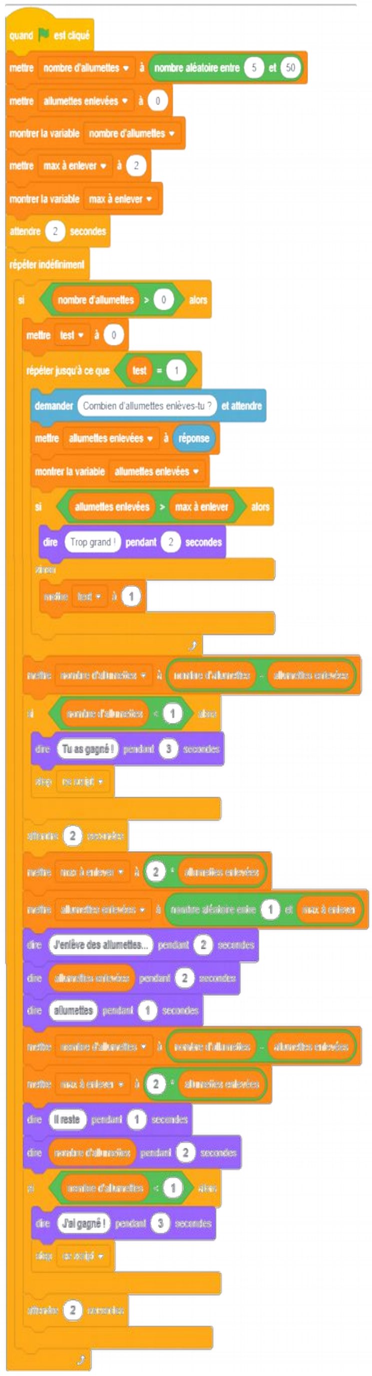

Illustration 1: Algorithme 1

2. *Etude des situations gagnantes et perdantes*

2.1. Premier tableau

Définitions :

Une situation est gagnante lorsque, pour le joueur dont c'est le tour, il existe une stratégie pour gagner.

Une situation est perdante lorsque, quel que soit le choix du joueur dont c'est le tour, il existe pour l'adversaire une stratégie pour être sûr de gagner.

Pour savoir si une situation (à un moment quelconque de la partie) est gagnante ou perdante, il faut connaître le nombre d'allumettes sur la table et le nombre maximum d'allumettes que l'on peut enlever. On note (p, q) la situation correspondant à p allumettes sur la table et q allumettes à enlever au maximum.

Nous avons réalisé un tableau donnant les situations gagnantes et perdantes en fonction du nombre d'allumettes sur la table et du nombre maximum d'allumettes à enlever, pour des petits nombres d'allumettes (1).

nombre d'allumettes sur la table	nombre maximum d'allumettes à enlever				
	2	4	6	8	10
1	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant
2	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant
3	Perdant	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant
4	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant
5	Perdant	Perdant	Gagnant	Gagnant	Gagnant
6	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant
7	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant
8	Perdant	Perdant	Perdant	Gagnant	Gagnant
9	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant
10	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant	Gagnant

Illustration 3: Tableau 1 des situations gagnantes et perdantes

Exemple : situation $(4;2)$

S'il y a 4 allumettes sur la table et qu'on peut en enlever jusqu'à 2, nous sommes toujours dans une situation gagnante : J'enlève 1 allumette, il reste 3 allumettes sur la table et le joueur suivant peut en enlever jusqu'à 2… c'est une situation perdante pour lui :

- S'il en enlève 1, je prends les 2 qui restent et je gagne.
- S'il en enlève 2, je prends la dernière allumette et je gagne.

Les cases en gris clair dans le tableau sont des situations gagnantes en 1 seul coup.

Propriété : Quand le nombre maximum d'allumettes à enlever est supérieur au nombre d'allumettes sur la table alors on gagne en prenant toutes les allumettes.

D'après cette propriété, toutes les situations au-dessus d'une diagonale passant par $(2;2)$, $(4;4)$, $(6;6)$ ... sont gagnantes (cases en gris clair).

Ce tableau nous indique les situations perdantes et gagnantes mais ne nous donne pas de stratégie pour gagner. On a créé une 2eme version du tableau pour donner une stratégie.

2.2. Deuxième tableau

a) Lecture du deuxième tableau

Les nombres de la première colonne représentent le nombre d'allumettes sur la table.

Les nombres de la première ligne représentent le nombre maximum d'allumettes à enlever.

Les valeurs du tableau correspondent au nombre d'allumettes à enlever lorsqu'il s'agit d'une situation gagnante (2), 0 lorsqu'il s'agit d'une situation perdante (fond gris foncé).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1			nombre maximum d'allumettes à enlever														
2			2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	nombre d'allumettes sur la table	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5		3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6		4	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
7		5	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
8		6	1	1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
9		7	2	2	2	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10		8	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
11		9	1	1	1	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
12		10	2	2	2	2	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
13		11	0	3	3	3	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
14		12	1	1	1	1	1	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
15		13	0	0	0	0	0	0	13	13	13	13	13	13	13	13	13
16		14	1	1	1	1	1	1	14	14	14	14	14	14	14	14	14
17		15	2	2	2	2	2	2	2	15	15	15	15	15	15	15	15
18		16	0	3	3	3	3	3	3	16	16	16	16	16	16	16	16
19		17	1	1	1	1	1	1	1	1	17	17	17	17	17	17	17
20		18	0	0	5	5	5	5	5	5	18	18	18	18	18	18	18
21		19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19	19	19	19	19	19
22		20	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20	20	20	20	20	20
23		21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21	21	21	21	21
24		22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	22	22	22	22	22
25		23	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	23	23	23	23
26		24	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	24	24	24	24
27		25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	25	25	25
28		26	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	26	26	26
29		27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	27	27
30		28	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	28	28
31		29	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	29
32		30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	30
33		31	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
34		32	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
35		33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
36		34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37		35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
38		36	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
39		37	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Illustration 4: Tableau 2 des situations gagnantes et perdantes

Exemple 1 : situation $(28\,;2)$

Si je joue en 1er et qu'il y a 28 allumettes sur la table, je regarde la cellule B30 : je dois enlever 2 allumettes.

Le joueur suivant est alors dans une situation perdante.

Exemple 2 : situation $(26\,;8)$

Si le joueur précédent a enlevé 4 allumettes et qu'il en reste 26 sur la table, je dois regarder dans la cellule F28 et je dois enlever 5 allumettes.

Le joueur suivant est alors dans une situation perdante.

b) Remplissage du tableau

Voyons quelques exemples pour comprendre comment nous avons rempli le tableau.

Situation 1 : $(8;14)$

On enlève 8 allumettes : c'est une situation gagnante en 1 coup.

Donc, on met la valeur 8 dans le tableau.

	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5
6	1	1	6	6	6	6	6	6	6	6
7	2	2	2	7	7	7	7	7	7	7
8										
9										
10										
11										
12										

Illustration 5: Situation (8;14)

Situation 2 : $(20;6)$

Si on enlève 1 allumette, le joueur suivant est dans la situation (19 ;2) : c'est une situation gagnante pour lui donc perdante pour nous.

Si on enlève 2 allumettes, le joueur suivant est en (18 ;4) : c'est une situation perdante pour lui.

On met donc 2 dans le cellule.

	2	4	6	8	10	12	14	16	18
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	0	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4	4	4	4	4
5	0	0	5	5	5	5	5	5	5
6	1	1	6	6	6	6	6	6	6
7	2	2	2	7	7	7	7	7	7
8	0	0	0	8	8	8	8	8	8
9	1	1	1	1	9	9	9	9	9
10	2	2	2	2	10	10	10	10	10
11	0	3	3	3	3	11	11	11	11
12	1	1	1	1	1	12	12	12	12
13	0	0	0	0	0	0	13	13	13
14	1	1	1	1	1	1	14	14	14
15	2	2	2	2	2	2	2	15	15
16	0	3	3	3	3	3	3	16	16
17	1	1	1	1	1	1	1	1	17
18	0	0	5	5	5	5	5	5	18
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20									
21									

Illustration 6: Situation (20;6)

Situation 3 : $(21;10)$

Si on enlève 1 allumette, l'adversaire est en (20 ;2), gagnant pour lui.

Si on enlève 2 allumettes, l'adversaire est en (19 ;4), gagnant pour lui.

(18 ;6),(17 ;8),(16 ;10)… sont toutes gagnantes pour l'adversaire.

Donc la situation (21;10) est perdante : on met 0 dans la cellule.

(3)

	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	1	1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	2	2	2	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	1	1	1	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
10	2	2	2	2	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
11	0	3	3	3	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
12	1	1	1	1	1	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	0	0	0	0	0	0	13	13	13	13	13	13	13	13	13
14	1	1	1	1	1	1	14	14	14	14	14	14	14	14	14
15	2	2	2	2	2	2	2	15	15	15	15	15	15	15	15
16	0	3	3	3	3	3	3	16	16	16	16	16	16	16	16
17	1	1	1	1	1	1	1	1	17	17	17	17	17	17	17
18	0	0	5	5	5	5	5	5	18	18	18	18	18	18	18
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19	19	19	19	19	19
20	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20	20	20	20	20	20
21															
22															

Illustration 7: situation (21;10)

c) Remarque sur les valeurs obtenues

Il y a des lignes de situations perdantes qui vont jusqu'à la diagonale des situations gagnantes en 1 coup : ligne 3, 5, 8, 13, 21, 34

On remarque que : 3+5=8 , 5+8=13, 8+13=21, 13+21=34 (4)

On peut calculer les numéros de ces lignes à l'aide du tableur :

	A
1	3
2	5
3	8
4	13
5	21
6	34
7	55
8	89
9	144
10	233
11	377
12	610
13	987
14	1597
15	2584
16	4181
17	6765
18	10946
19	17711
20	28657
21	46368
22	75025
23	121393
24	196418

Illustration 8: Lignes de situations perdantes maximales

Il y a aussi d'autres lignes qui commencent par une série de situation perdantes mais sans aller jusqu'à la diagonale des situations gagnantes en 1 coup : 11, 16, 18, 24, 26, 29, 32

On obtient ces valeurs en ajoutant les valeurs obtenues dans le tableur.

Entre 8 et 13 : 8+3=11

Entre 13 et 21 : 13+3=16 et 13+5=18

Entre 21 et 34 : 21+3=24, 21+5=26, 21+8=29

21+3+5=29, 21+3+8=32, 21+5+8=34

Mais ça ne marche pas avec 21+5+5 ou 21+3+3.

Entre 34 et 55 : 34+3=37, 34+5=39, 34+8=42, 34+13=47

34+3+5=42, 34+3+8=45, 34+3+13=50 mais pas 34+3+3

34+5+3=42, 34+5+8=47, 34+5+13=52 mais pas 34+5+5

34+8+3=45, 34+8+5=47 mais pas 34+8+8 (5)

d) Autre remarque

Entre deux lignes rouges, il y a 1 ou 2 lignes vertes. Il y a donc plus de lignes vertes que de lignes rouges.

En jouant en premier, il y a donc plus de chances d'être dans une situation gagnante que dans une situation perdante.

3. Amélioration de l'algorithme

Pour être efficace quand on joue, on peut regarder le tableau.

Mais comment créer un algorithme qui joue efficacement et qui ne joue pas de manière aléatoire ?

3.1. Algorithme 2

Ce qui change dans ce deuxième algorithme est la partie ci -contre, ajoutée à la place de la ligne où l'ordinateur joue en choisissant un nombre au hasard entre 1 et le nombre maximum d'allumettes à enlever.

Illustration 9: Extrait de l'algorithme 2

Si le nombre d'allumettes sur la table est inférieur au nombre d'allumettes à enlever, alors l'ordinateur prend toutes les allumettes.

Sinon, il joue toujours au hasard.

3.2. Stratégie

Si possible, on retire le nombre d'allumettes pour pouvoir arriver à une ligne avec des 0 jusqu'à la diagonale.

Exemple 1

S'il y a 18 allumettes et qu'on peut en enlever jusqu'à 6 :

3+5=8, 5+8=13, 8+13=21, on a dépassé 18.

Donc on essaie d'amener l'adversaire à 13 allumettes sur la table.

C'est possible en enlevant 5 allumettes.

L'adversaire est dans la situation (13;10). C'est une situation perdante pour lui car 10<13.

Exemple 2

S'il y a 20 allumettes sur la table, il faudrait en enlever 7.

L'adversaire est dans la situation (13;14). C'est une situation gagnante en 1 coup car $14 \geqslant 13$.

Il faut donc essayer de se ramener à la dernière ligne qui commence par des 0.

13+3=16, 13+5=18 : on enlève 2 allumettes. L'adversaire est dans la situation (18,4) qui est perdante.

Exemple 3

S'il y a 200 allumettes sur la table, que faut-il jouer ?

On cherche la dernière grande ligne de 0 :

3+5=8, 5+8=13, 8+13=21, 13+21=34, 21+34=55, 34+55=89, 55+89=144, 89+144=233>200

Pour arriver à 144 allumettes, il faudrait en enlever 56 : l'adversaire est en situation (144,112) qui est perdante car 112<144.

Si la situation ne permet pas d'enlever 56 allumettes, il faut se ramener à la dernière petite ligne :

144+3=147, 144+5=149, 144+13=157… 144+55=199 : on enlève donc 1 allumette.

Mais il y a d'autres petites lignes entre 144 et 233 :

147+5=152, 147+8=156, 147+13=160, … 147+55=202 (6)

149+3=152, 149+8=157, …

Conclusion

Pour avoir plus de chances de gagner, il faut jouer en premier et utiliser le tableau ou la stratégie de la partie précédente (7). Si au départ, on est dans une situation perdante, soit on joue aléatoirement, soit on enlève un petit nombre d'allumettes pour faire durer la partie et espérer que l'adversaire fasse une erreur.

Notre objectif était de d'écrire un algorithme qui utilise la stratégie mise en place mais nous n'avons pas eu le temps.

Notes d'édition

(1) La construction de ce tableau et du tableau suivant sera expliquée plus loin (§2.2 b).

(2) Il peut y avoir plusieurs possibilités pour le nombre d'allumettes à enlever afin de gagner. Le nombre dans le tableau est le plus petit possible, sauf si on peut gagner directement en enlevant toutes les allumettes (voir ci-dessous).

(3) En résumé, on remplit une ligne après avoir rempli les précédentes. Si on peut enlever toutes les allumettes, on inscrit ce nombre d'allumettes. Sinon on regarde les situations obtenues en enlevant successivement 1, 2, 3… allumettes sans dépasser le maximum autorisé. Si on arrive à une situation perdante (laissée à l'adversaire), la situation était gagnante et on note dans la case le nombre d'allumettes enlevées (donc le plus petit qui permet de gagner) ; et par contre si on n'arrive qu'à des situations gagnantes, la situation était perdante et on note 0.

(4) On trouve ainsi, aux premiers termes près, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, puis $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Cependant, il n'est pas prouvé ici qu'au delà de ce qui a été calculé dans le tableau, cela correspond exactement aux situations perdantes lorsqu'on ne peut pas enlever toutes les allumettes (mais c'est une conjecture vraisemblable).

(5) Ainsi on obtient des lignes commençant par des situations perdantes avec les sommes de nombres de Fibonacci *distincts* (et en excluant 0, 1 et 2). Mais il est inutile de considérer des sommes avec deux nombres de Fibonacci consécutifs comme 3 et 5 qu'on trouve aussi en les remplaçant par 8 – par exemple 21+3+5=21+8 et 21+8=29 a déjà été noté ; de même pour 21+8+5=21+13=34, 34+5+3, 34+8+5…

(6) Comme 147 n'est pas un nombre de Fibonacci mais la somme de deux nombres de Fibonacci, 144+3, on a aussi 147+5=152=144+8 qui aurait dû être mentionné à la ligne au-dessus et de même 152=149+3 revient encore à 152=144+5+3=144+8.

(7) Pour les lecteurs qui voudraient compléter le résultat, déterminer les situations gagnantes et trouver une stratégie précise dans le cas général, on peut faire une observation de plus sur le tableau 2 : les lignes entre deux nombres de Fibonacci sont exactement les mêmes que les lignes du début de tableau si on s'arrête avant la diagonale. Il faudrait donc montrer en général que lorsque le nombres d'allumettes n est compris entre deux nombres de Fibonacci F_k et F_{k+1} (exclus), alors le nombre minimum d'allumettes à enlever pour gagner, si on le peut, est le même que pour $n–F_k$ et que pour les nombres de Fibonacci on ne peut gagner que si on peut enlever toutes les allumettes.

Si ceci est vrai, on peut soustraire à n le plus grand nombre de Fibonacci qui lui est inférieur ou égal, et recommencer jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre de Fibonacci (éventuellement 1 ou 2), qui est alors le nombre minimum d'allumettes à enlever – et s'il dépasse le maximum autorisé, la situation est perdante.