Allo ! La communication est-elle bien passée ?

Année 2015 - 2016

Pauline Camard ; Orlane Mfoukou ; Pauline Rouat élèves de 5ème

Encadrées par Pascale Béasse et Béatrice Boillot

Chercheur : Victor Kleptsyn, CNRS et Université de Rennes

I- Sujet étudié

Voici comment le chercheur Victor Kleptsyn nous a présenté le jeu sur lequel nous avons travaillé.

Règles du jeu:

Au début, une personne va choisir un nombre entier et positif dans sa tête. Une seconde personne va essayer de le deviner. Pour cela, la seconde personne va poser une suite de questions simples auxquelles la première personne n'aura le droit de répondre que par oui ou non. Mais il y a un hic ! La première personne a le droit de mentir...mais pas plus d'une fois.

But de la recherche

Quel est le nombre minimal de questions à poser pour trouver de façon certaine le nombre à deviner ?

Lien entre ce jeu et la communication dans l'espace

La sonde et la Terre

Victor Kleptsyn, le chercheur qui nous a fait travaillé, nous a expliqué que, parfois, des scientifiques envoient une sonde en orbite autour d'une planète, d'une comète ou d'un objet quelconque dans l'espace. Le but de cette sonde est d'enregistrer des données (photographie, température..) et de les envoyer sur la terre pour que ces données se fassent étudier et analyser.

La sonde peut être considérée comme la personne qui pense à un nombre, la NASA est la personne qui veut deviner le nombre.
La distance entre la Terre et la sonde est grande, et parfois, il peut y avoir une erreur de transmission : c'est modélisé dans notre jeu par la possibilité de mentir.
Les réponses de la sonde à la Terre sont assimilables au message que la sonde envoie sur la Terre. Avec ces réponses, les scientifiques, sur la Terre, vont reconstituer l'information transmise par la sonde.

Comme la sonde est très loin de la Terre, le temps de transmission entre la Terre et elle (dans un sens comme dans l'autre) est long. Moins on posera de questions, mieux cela sera. On gagnera ainsi du temps et de l'argent. On évitera aussi ainsi des erreurs.

II- Résultats obtenus

PARTIE 1: Nous avons d'abord étudié le jeu sans laisser la possibilité de mentir au joueur qui veut faire deviner un nombre auquel il pense.

Choix de la manière de poser des questions

Au début, nous avons parlé de questions simples, avec comme réponses autorisées, seulement oui ou non. Maintenant, nous allons préciser ce que nous voulions dire. Nous avons toujours utilisé la même question « Est-ce que ce nombre est égal ou inférieur à... ». Le nombre limite est choisi de manière à ce qu'il nous permette de couper la suite de nombre en deux groupes de même taille. Une fois que les deux groupes sont formés, nous répétons l'opération, toujours sur le groupe de gauche (il a bien fallu faire un choix)(1).Au final, cela va former des groupes de plus en plus petits, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un : le nombre qui était à trouver(2).

Voici un exemple de questions-réponses, pour un nombre à deviner compris entre un et huit :

Supposons que la personne a choisi le nombre trois dans sa tête.

« -Est-ce que ce nombre est égal ou inférieur à 4 ? » (là, on coupe le groupe en deux parties égales)

« -Oui »

« - Est-ce que ce nombre est égal ou inférieur à 2 ? » (on coupe à nouveau le groupe en deux parties égales)
« Non »

« -Est-ce que ce nombre est inférieur ou égal à 3 » ?

« Oui »

Il a fallu trois questions pour deviner ce nombre.

Conséquence : lien entre le nombre de questions et le nombre de nombres que l'on peut deviner

Cette manière de poser les questions fait qu'avec 3 questions on pouvait deviner un nombre compris entre 1 et 8 , avec 4 questions un nombre entre 1 et 16 et avec 5 questions un nombre entre 1 et 32 … On a donc décidé d'imaginer que le joueur qui cherche à faire deviner un nombre le choisit toujours dans une suite de nombre allant de 1 à une puissance de 2 (entre 1 et 2 ; ou entre 1 et $2^2 = 4$; ou entre 1 et 2^3 =8 etc...)
On a remarqué que, à chaque fois qu'on augmentait la puissance de un, on devait poser une question de plus.
Par exemple, pour un nombre à deviner compris entre 1 et 64 (2^6), il nous faudrait 6 questions et pour un nombre compris entre 1 et 128 (2^7), il nous faudrait 7 questions(3).

Pourquoi cette manière de poser les questions ?

Nous avions trouvé d'autres techniques, mais aucune n'était aussi « performante » que celle-ci. En particulier, avec notre technique choisie, si la personne qui fait deviner le nombre sait que les questions seront posées dans cet ordre et toujours sous cette forme, il pourra ainsi préparer à l'avance sa série de réponse... ce qui lui évitera d'avoir à écouter les questions !

La personne est ainsi capable de préparer ses réponses à l'avance, elle est capable de créer une table de codage : les réponses sont toujours les mêmes (oui ou non) et elles ont un ordre bien précis.

Tables de codages

Nous avons vu dans l'exemple précédent que, avec trois questions, nous pouvions deviner le nombre 3 dans une série de nombres comprises entre 1 et 8.
Les réponses pour faire deviner le nombre 3 avec cette manière de poser les questions sont OUI NON OUI. C'est le codage pour 3 (soit ONO).

Une série de photos, en Annexe montre comment, avec trois questions, on peut faire deviner huit nombres. (Sur ces photos, OUI est écrit O et NON est écrit N). Et voici la table de codage obtenue :

Q3 Q2 Q1
OUI OUI OUI → 1
OUI OUI NON → 2
OUI NON OUI → 3
OUI NON NON → 4
NON OUI OUI → 5
NON OUI NON → 6
NON NON OUI → 7
NON NON NON → 8

Observons cette table de codage : on s'aperçoit que les réponses à la question 1 sont successivement OUI puis NON, alors que pour la question 2, on a deux OUI, suivis de deux NON et pour la question 3, on a quatre OUI suivis de quatre NON. On en a déduit qu'en ajoutant une quatrième question, on aurait pour celle-ci huit OUI suivi de huit NON alors que les successions quatre/quatre de la question 3, deux/deux de la question 2 et un/un de la question 1 resteraient. On pourrait ainsi, avec quatre questions, faire deviner 16 nombres et avec cinq questions, 32 nombres.(4)

Ces tables étant assez grosses, nous les avons mise en Annexes 2 et 3.
La table de codage à cinq questions permettant de faire découvrir 32 nombres, nous avons attribué à chacun des 26 premiers nombres la lettre de l'alphabet qui lui correspond et ajouté quelques signes de ponctuations pour compléter. Ainsi, nous nous sommes amusés à nous faire deviner des messages codés. Par exemple :
ONNOO OOOOO NOONN OONNN NNNNN OONOO ONNON NNNNN ONOON OONOO OOOOO ONNON NOONO pour « Math en jeans »

PARTIE 2 : Nous avons ensuite étudié le jeu tel que Victor Kleptsyn nous l'avait donné : le joueur qui fait deviner le nombre a la possibilité de mentir mais pas plus d'une fois.

Nous avons ensuite repris l'étude du jeu avec mensonge. Nous rappelons que la personne qui fait deviner le nombre ne peut mentir qu'une seule fois et qu'elle n'est pas obligée de mentir une fois.

Première résolution du problème

Dans une première partie, nous avons décidé de cesser d'imposer que la personne qui fait deviner le nombre puisse prévoir ses réponses à l'avance. Nous avons recommencé à faire vraiment « dialoguer » les deux joueurs.

Nous avons remarqué que le joueur qui doit deviner le nombre peut procéder ainsi :

Pour chaque question qu'elle désire poser, elle va la poser deux fois de suite cette même question :

-si la réponse est deux fois la même, alors il n'y a pas de mensonge et on tient compte de la réponse donnée.

-si la réponse n' est pas deux fois la même, alors il y a un mensonge mais on ne sait pas où. On pose donc une troisième fois la même question : on sait où est le mensonge et on peut le corriger.

Une fois le mensonge passé, une seule fois chaque question suffit.

Exemple : pour cette fois, on imagine qu'on doit deviner un nombre entre 1 à 4 et que le joueur qui fait deviner ce nombre a choisi (chut !) le nombre 3.

« Est ce que le chiffre est inférieur ou égal à 2
-Non
-Est ce que le chiffre est inférieur ou égal à 2 ?
-Oui
(Il y a un mensonge mais où)
-Est ce que le chiffre est inférieur ou égal à 2 ?
-Non
(Le mensonge était à la deuxième réponse)
-Est ce que le chiffre est inférieur à 4 ?
-Oui
-Le nombre est donc 3!!!

Création d'une nouvelle table de codage

Cette méthode est infaillible, mais Victor nous a demandé de construire une nouvelle table de codage qui permette au moins de détecter qu'il y a un mensonge, à défaut de le corriger. En effet, dans l'espace, ce serait bien trop long (et donc bien trop coûteux) si on posait deux ou trois fois les questions et comme les temps pour faire parvenir un message de la Terre jusque la sonde où de la sonde jusque la Terre sont très très long, on ne peut pas imaginer faire ainsi un jeu de questions-réponses : il faut que la sonde puisse transmettre d'un seul coup une succession de oui et de non qui permette aux scientifiques sur la Terre de deviner son message.

Nous avons réfléchi et compris que

– Il faut deux différences entre deux «lignes» de codage, car comme il ne peut y avoir plus d'un mensonge, si deux lignes contiennent deux différences, nous sommes certains qu'avec un seul mensonge, on ne pourra pas croire avoir obtenu un nombre alors que c'en est en fait un autre.
  Exemple :
  Dans la table de codage présentée au dessus(5), 12 était codé par OUI NON OUI NON NON.
  Avec un mensonge, cela peut devenir OUI NON OUI NON OUI,ou OUI NON OUI OUI NON, ou OUI NON NON NON NON, ou OUI OUI OUI NON NON, ou encore NON NON OUI NON NON. (Le mensonge est souligné à chaque fois). Donc on ne peut pas savoir si on a vraiment reçu « 12 » ou si on a reçu « 11 » avec une erreur (un mensonge) sur la question 1 ou « 10 » avec une erreur sur la

question 2 ou « 16 » avec une erreur sur la question 3 et ainsi de suite. Les lignes de la table de codage qui ont une seule différence avec la ligne du code « 12 » nous gênent donc. On n'aurait pas de problème si toutes les lignes possédaient au moins deux différences. Avec un mensonge, la ligne reçue ne serait tout simplement pas dans notre table. On saurait qu'il y a un problème.

- Nous avons donc décider de choisir une première ligne dans la table de codage et de barrer les lignes ne contenant qu'une seule différence avec celle-ci ; ensuite nous avons garder la première ligne restante et barré toutes les lignes qui n'avaient qu'une seule différence avec celle-ci, et ainsi de suite. Nous avons ainsi trouvé une nouvelle table de codage, en gardant uniquement des successions de réponses ayant chacune au moins deux différences les unes avec les autres.
- Nous avons concrètement créer ainsi une nouvelle table de codage mais en repartant de la table de codage faite avec 3 questions. Cela nous fait découvrir qu'avec trois questions, on peut deviner quatre nombres uniquement et non plus huit.
- Avec cette technique, on peut tout de suite savoir s'il y a eu un mensonge ou non. Mais contrairement d'avec la technique présentée dans le paragraphe précédent, nous ne pouvons pas le corriger : on ne peut pas savoir ou se trouve le mensonge.

<u>Table avec trois questions</u>

Avec trois questions, la table sans mensonge était celle de gauche (en tenant compte des lignes barrées)
La nouvelle table de codage est celle de droite. Quelques soient deux lignes prises dans cette nouvelle table, vous pouvez constater qu'elles diffèrent l'une de l'autre par deux fois.

Q3 Q2 Q1	Nouvelle table de codage
OUI OUI OUI→ 1	**OUI OUI OUI → 1**
~~OUI OUI NON→ 2~~	**OUI NON NON→ 2**
~~OUI NON OUI→ 3~~	**NON OUI NON→ 3**
OUI NON NON→ 4	**NON NON OUI→4**
~~NON OUI OUI→ 5~~	
NON OUI NON→ 6	
NON NON OUI→ 7	
~~NON NON NON→ 8~~	

Pour les lignes qui correspondaient à 2,3,5 , il n'y avait qu'une seule différence avec la première ligne. En cas où il y aurait un mensonge, on ne peut donc pas les distinguer de la première ligne. C'est pour cela qu'on les supprime. On garde la première ligne restante non barrée (OUI NON NON). Les lignes NON OUI NON et NON NON OUI contiennent deux différences avec cette nouvelle ligne mais par contre, NON NON NON n'a qu'une seule différence par rapport à OUI NON NON : on la barre aussi. On garde la ligne suivante (NON OUI NON). La ligne NON NON OUI a deux différences avec cette ligne, donc on la garde aussi.

<u>Comment détecter un mensonge avec cette nouvelle table de codage ?</u>

Supposons qu'on reçoive OUI NON NON . Cette ligne existe dans notre nouvelle table de codage et correspond au nombre 2. On a décodé.
Par contre, si on reçoit OUI NON OUI, on remarque que c'est un code qui n'est pas dans notre nouvelle

table de codage. On en déduit qu'il y a eu mensonge.

Pourquoi ne peut-on pas corriger le mensonge avec cette table ?

Mais où est le mensonge ? Si l'erreur est sur la question 1, le « vrai » message serait en fait OUI NON NON ce qui correspond à 2 dans notre nouvelle table. Mais peut-être l'erreur est-elle en fait dans la question 2 et alors le message aurait du être OUI OUI OUI qui correspond à 1 dans la table. Et peut-être l'erreur est-elle en fait dans la question 3. Le message serait en fait NON NON OUI qui se trouve aussi dans notre table de codage : c'est 4. En recevant OUI NON OUI, on est donc certain qu'il y a mensonge puisque ce n'est pas un code de notre nouvelle table, mais on ne sait pas si le nombre à deviner était 1, 2 ou 4.

Notre chercheur nous a indiqué qu'il faudrait ajouter un « bit de parité » et que c'est à peu près ainsi que réellement, l'information circule entre certaines sondes de l'espace et la Terre. Mais nous n'en parlerons pas... parce que nous n'avons pas compris et pas eu le temps d'approfondir ce point.

Remerciements
Nous remercions beaucoup Victor Kleptsyn qui nous a donné ce sujet difficile mais passionnant. Nous le remercions aussi de nous avoir fait visiter son lieu de travail et de nous avoir fait faire des expériences marrantes avec de la glace carbonique. Nous remercions aussi les élèves de Lannion avec lesquels nous étions jumelés et qui étaient vraiment sympas. Ils n'ont malheureusement pas pu participer à cet article.

Notes d'édition

(1) Ce n'est pas toujours le groupe de gauche sur lequel on répète l'opération. C'est sur le groupe dans lequel on sait que de trouve le nombre cherché. Le choix que l'on fait est de demander toujours si le nombre cherché et dans la partie de « gauche » de l'intervalle en question (les nombres entiers étant calssés par ordre croissant de gauche à droite).

(2) Il faudrait dire : Il ne reste plus qu'un seul groupe qui ne contient qu'un seul entier : le nombre qu'il faut trouver

(3) On pourrait énoncer le résultat suivant : avec cette technique on peut trouver un nombre entier compris entre 1 et 2^n en n questions. Et la preuve (par récurrence) de ce résultat est laissée à la lectrice et au lecteur.

(4) L'énoncé correspond à ces résultats serait : à chaque entier compris entre 1 et 2^n correspond un n uplet formé de « oui » et de « non », et réciproquement. Donc, une fois la « table de codage » établie pour les entiers compris entre 1 et 2^n , il suffit de trouver le n uplet des réponses données pour trouver le nombre cherché

(5).Il s'agit de la table de codage donnée en annexe pour coder les entiers compris entre 1 et 2^5 avec 5 questions, sans mensonge.

ANNEXE 1 :
Comment on a obtenu la table de codage avec trois questions (sans mensonge)

1 ~~2~~ ~~3 4~~ ~~5 6 7 8~~

Question 3 OUI

Question 2 OUI

Question 1 OUI

1 → OUI OUI OUI

~~1~~ 2 ~~3 4~~ ~~5 6 7 8~~

Question 3 NON

Question 2 OUI

Question 1 OUI

2 → OUI OUI NON

~~1 2~~ 3 ~~4~~ ~~5 6 7 8~~

Question 3 OUI

Question 2 NON

Question 1 OUI

3 → OUI NON OUI

~~1 2~~ ~~3~~ 4 ~~5 6 7 8~~

Question 3 NON

Question 2 NON

Question 1 OUI

4 → OUI NON NON

~~1 2 3 4~~ 5 ~~6~~ ~~7 8~~

Question 3 OUI

Question 2 OUI

Question 1 NON

5 → NON OUI OUI

1 2 3 4 5 6 7 8

Question 3 NON

Question 2 OUI

Question 1 NON

6 → NON OUI NON

1 2 3 4 5 6 7 8

Question 3 OUI

Question 2 NON

Question 1 NON

7 → NON NON OUI

1 2 3 4 5 6 7 8

Question 3 NON

Question 2 NON

Question 1 NON

8 → NON NON NON

ANNEXE 2 :
Table de codage avec quatre questions (sans mensonge)

OUI	OUI	OUI	OUI	→ 1
OUI	OUI	OUI	NON	→ 2
OUI	OUI	NON	OUI	→ 3
OUI	OUI	NON	NON	→ 4
OUI	NON	OUI	OUI	→ 5
OUI	NON	OUI	NON	→ 6
OUI	NON	NON	OUI	→ 7
OUI	NON	NON	NON	→ 8
NON	OUI	OUI	OUI	→ 9
NON	OUI	OUI	NON	→ 10
NON	OUI	NON	OUI	→ 11
NON	OUI	NON	NON	→ 12
NON	NON	OUI	OUI	→ 13
NON	NON	OUI	NON	→ 14
NON	NON	NON	OUI	→ 15
NON	NON	NON	NON	→ 16

ANNEXE 3 :
Table de codage avec cinq questions (sans mensonge) et correspondance avec la place dans l'alphabet.

OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	→ 1	→ A
OUI	OUI	OUI	OUI	NON	→ 2	→ B
OUI	OUI	OUI	NON	OUI	→ 3	→ C
OUI	OUI	OUI	NON	NON	→ 4	→ D
OUI	OUI	NON	OUI	OUI	→ 5	→ E
OUI	OUI	NON	OUI	NON	→ 6	→ F
OUI	OUI	NON	NON	OUI	→ 7	→ G
OUI	OUI	NON	NON	NON	→ 8	→ H
OUI	NON	OUI	OUI	OUI	→ 9	→ I
OUI	NON	OUI	OUI	NON	→ 10	→ J
OUI	NON	OUI	NON	OUI	→ 11	→ K
OUI	NON	OUI	NON	NON	→ 12	→ L
OUI	NON	NON	OUI	OUI	→ 13	→ M
OUI	NON	NON	OUI	NON	→ 14	→ N
OUI	NON	NON	NON	OUI	→ 15	→ O
OUI	NON	NON	NON	NON	→ 16	→ P
NON	OUI	OUI	OUI	OUI	→ 17	→ Q
NON	OUI	OUI	OUI	NON	→ 18	→ R
NON	OUI	OUI	NON	OUI	→ 19	→ S
NON	OUI	OUI	NON	NON	→ 20	→ T
NON	OUI	NON	OUI	OUI	→ 21	→ U
NON	OUI	NON	OUI	NON	→ 22	→ V
NON	OUI	NON	NON	OUI	→ 23	→ W
NON	OUI	NON	NON	NON	→ 24	→ X
NON	NON	OUI	OUI	OUI	→ 25	→ Y
NON	NON	OUI	OUI	NON	→ 26	→ Z
NON	NON	OUI	NON	OUI	→ 27	→ .
NON	NON	OUI	NON	NON	→ 28	→ ,
NON	NON	NON	OUI	OUI	→ 29	→ -
NON	NON	NON	OUI	NON	→ 30	→ '
NON	NON	NON	NON	OUI	→ 31	→ :
NON	NON	NON	NON	NON	→ 32	→ _ (espace)