De l'aire !

Année 2013

BUCHE Nathan (2nd), CHIRPAZ Yann (2nd), DIJOUX Thomas (1ère S), OUSSENY Irfaane (Terminale S), REBECA Florian (Terminale S).

Lycée Jean Hinglo
2 rue des sans soucis - 97420 LE PORT.

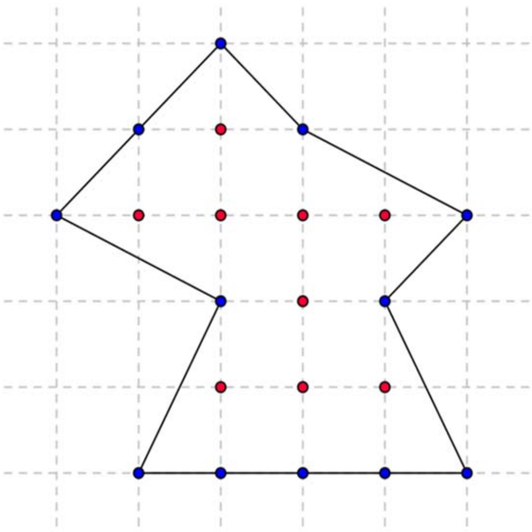
Lycée Bellepierre
Avenue Gaston Monnerville - 97475 ST DENIS Cedex

Enseignants :
ANSELMET Jérôme, FUR-DESOUTTER Sophie.

Chercheur : LEGONIDEC Marion, Université de La Réunion.

I- Le sujet : une formule magique !

On cherche à calculer l'aire d'un polygone dont les sommets sont des points à coordonnées entières.



Quel lien y a-t-il entre le nombre de points du polygone et son aire ?

On note :
- n_c le nombre de points sur les côtés du polygone,
- n_i le nombre de points à l'intérieur du polygone,
- A l'aire du polygone.

Nous avons démontré que $\boldsymbol{A = \frac{n_c}{2} + n_i - 1}$ **.**

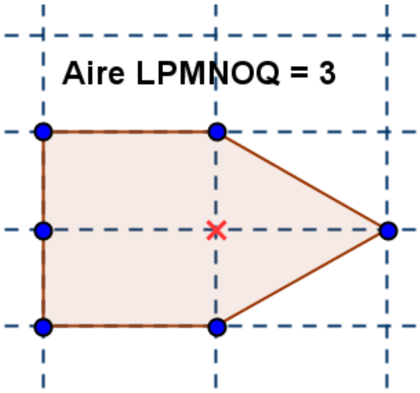
(1)

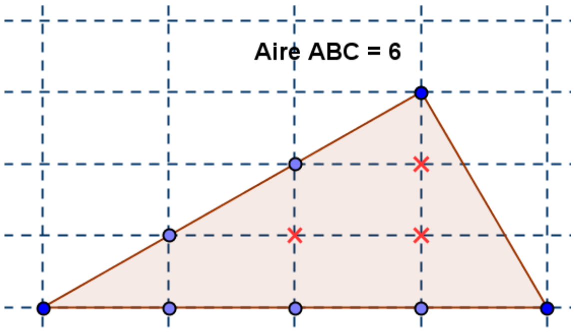
Nous allons d'abord étudier le cas d'un rectangle, puis le cas général d'un polygone quelconque.

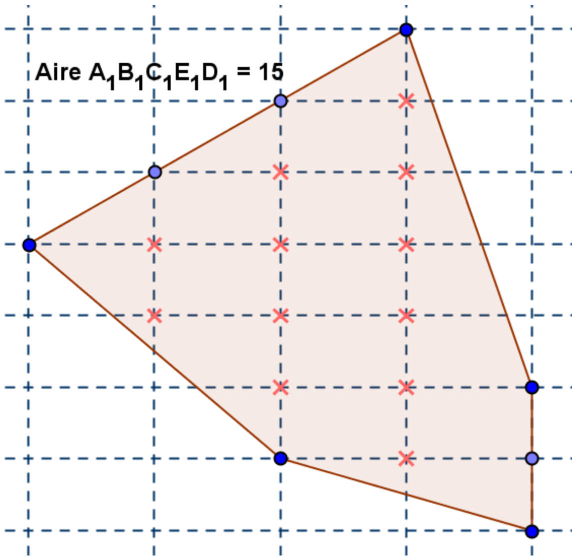
II- Conjecture

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, nous avons tout d'abord conjecturé une formule.

Nous avons étudié plusieurs figures, en voici trois, nous avons résumé les résultats dans un tableau.







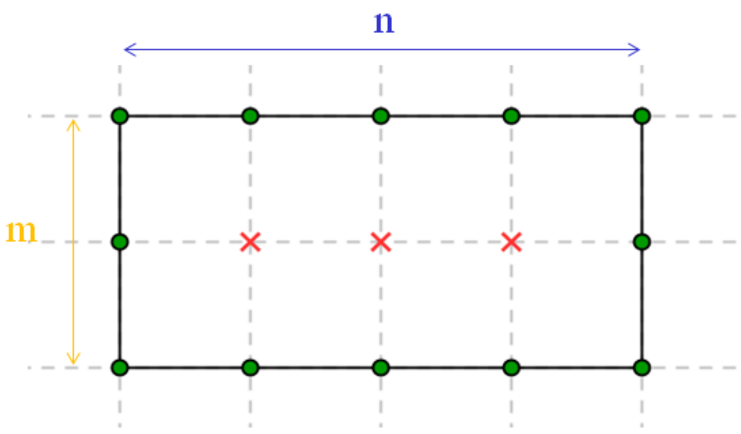
Aire	3	6	15
Point intérieur	1	3	12
Points sur les côtés :	6	8	8

Conjecture : $A = \frac{n_C}{2} + n_i - 1.$

III - Démonstration

- **Pour un rectangle**

Considérons un rectangle de côtés m et n.



On note :
- n_c le nombre de points sur les côtés,
- n_i le nombre de points à l'intérieur,
- A l'aire du polygone.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} n_C + n_i = \text{nombre total de points} = (n+1)(m+1) \\ n_C = n+1+m+n+m-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_C + n_i = (n+1)(m+1) \\ n_C = 2n+2m \end{cases}$$

A l'aide de la seconde ligne du système, nous avons donc :

$$m = \frac{n_C - 2n}{2}$$

En remplaçant dans la première ligne du système :

$$\begin{aligned} n_C + n_i &= nm + n + m + 1 \\ &= A + \frac{n_C - 2n}{2} + n + 1 \\ &= A + \frac{n_C}{2} - n + n + 1 \\ &= A + \frac{n_C}{2} + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $A = n_C + n_i - \dfrac{n_C}{2} - 1$

$$A = \frac{n_C}{2} + n_i - 1$$

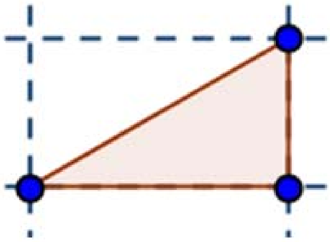
La formule est donc démontrée pour un rectangle.

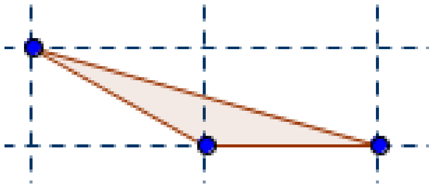
☐ Généralisation

Nous avons ensuite cherché à décomposer un polygone quelconque. Pour cela, nous avons introduit la notion de triangle élémentaire.

- Décomposition en triangles élémentaires

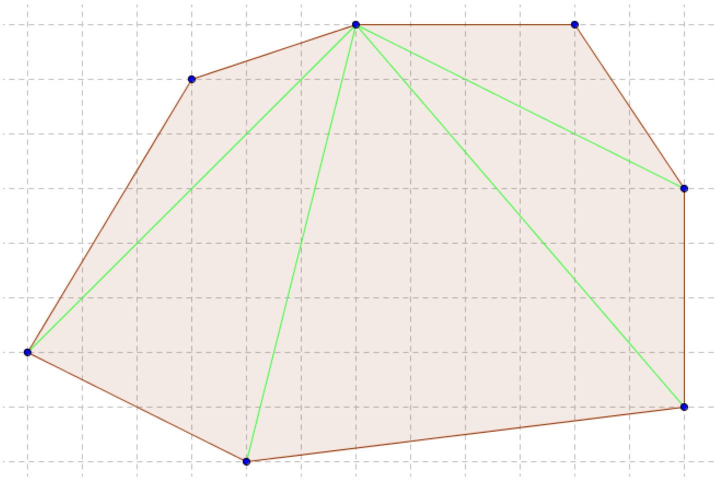
<u>Définition</u> : un triangle élémentaire est un triangle ne contenant aucun point intérieur et dont les seuls points côtés sont les sommets du triangle. Par exemple, (2)



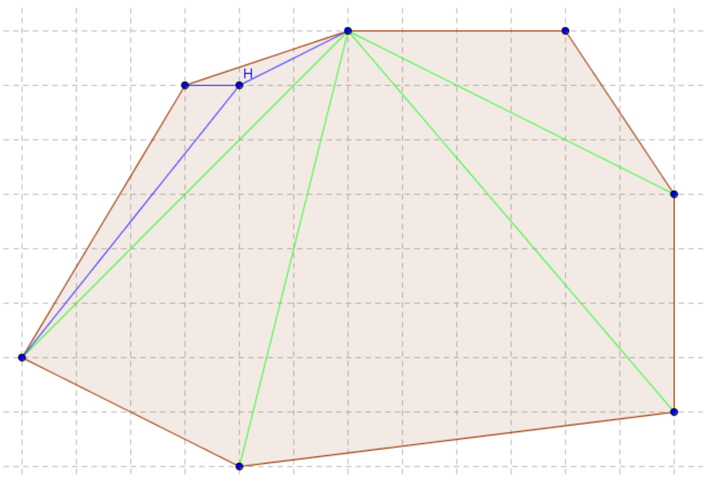


<u>Décomposition d'une figure en triangles élémentaires</u>

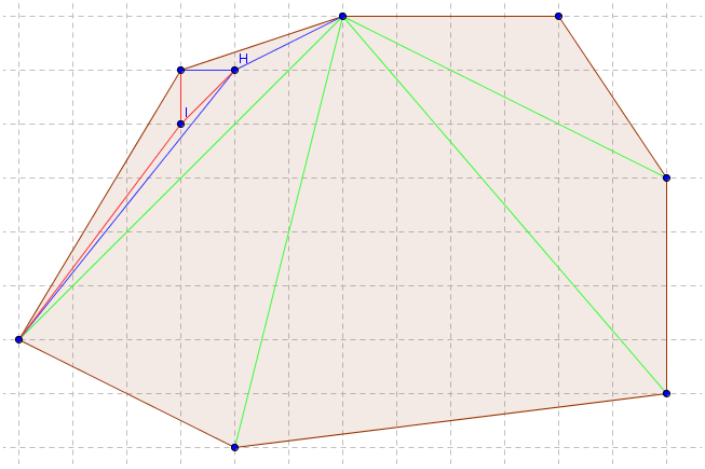
On choisit un sommet du polygone que l'on relie à tous les autres sommets, créant ainsi des triangles.



Dans un triangle, un point intérieur (ici H) est relié à tous les sommets du triangle, redécoupant le triangle précédent en plusieurs triangles.



Cette opération est recommencée (ici avec I) jusqu'à n'avoir que des triangles sans point intérieur.



Chaque figure est décomposable en triangles élémentaires, on ne travaillera donc qu'avec des triangles élémentaires.

- Démonstration par récurrence

On démontre par récurrence que pour toute figure composée de n triangles élémentaires, $n \in \mathbb{N}^*$, la formule est vraie.

- Initialisation : pour $n = 1$.

Pour un triangle élémentaire, $A = \frac{1}{2}$. (3)

Un triangle élémentaire ne contient pas de point intérieur, donc $n_i = 0$ et a trois points côtés donc $n_c = 3$.

Ainsi $\frac{n_C}{2} + n_i - 1 = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}$.

La formule est donc vérifiée pour un triangle élémentaire.

- Hérédité : on suppose que la formule est vraie pour une figure composée de n triangles élémentaires. On démontre que la formule reste valable pour une figure comprenant $n+1$ triangles élémentaires, soit un triangle élémentaire supplémentaire.

Pour cela, nous devons considérer deux cas.

Notation :

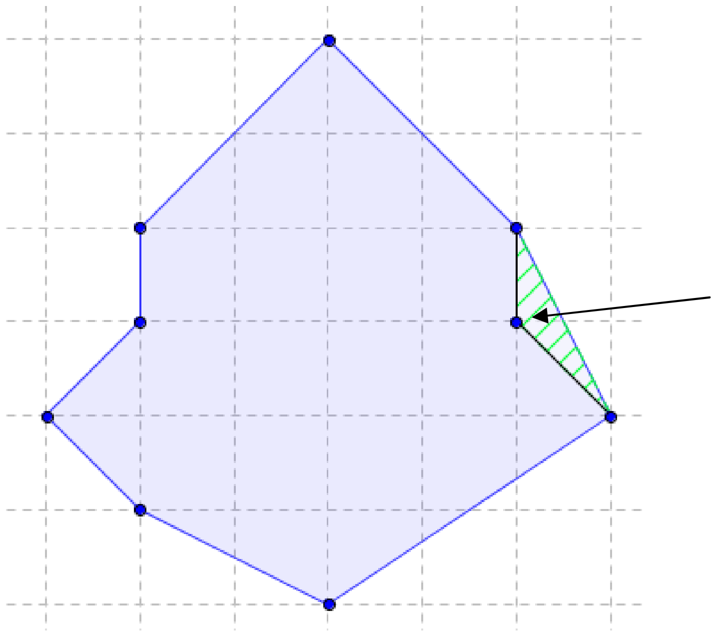
n_C : *nombre de points côtés du polygone à* n *triangles élémentaires*

n_C' : *nombre de points côtés du polygone à* $n+1$ *triangles élémentaires.*

n_i *et* n_i' : *nombres respectifs de points intérieurs des polygones ;*

A *et* A' : *aires respectives des polygones.*

- 1er cas : on considère un polygone à $n+1$ triangles élémentaires et on enlève un triangle élémentaire (triangle hachuré).



Dans ce cas, par rapport au polygone de base :
- On ajoute un point côté : $n_C = n_C\,'+1$
- On enlève un point intérieur : $n_i = n_i\,'-1$

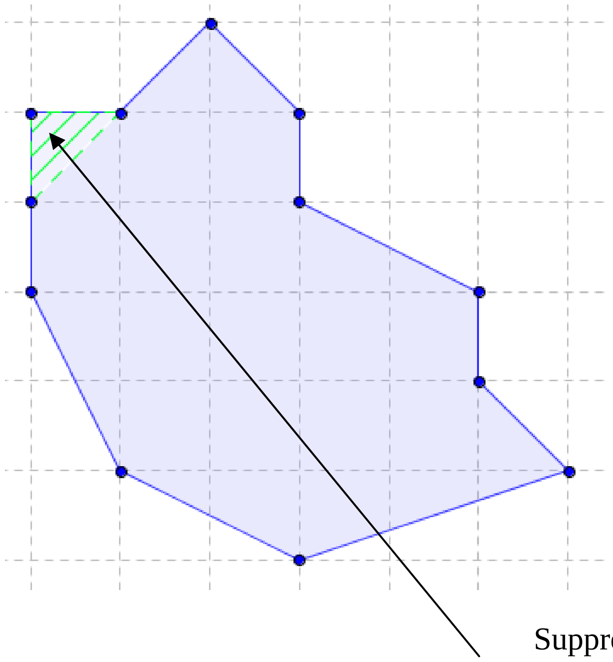
De plus, $A' = A + \frac{1}{2}$ car l'aire d'un triangle élémentaire est $\frac{1}{2}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
A' &= A + \frac{1}{2} \\
&= \frac{n_C}{2} + n_i - 1 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{n_C\,'+1}{2} + n_i\,' - 1 - 1 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{n_C\,'}{2} + n_i\,' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \\
&= \frac{n_C\,'}{2} + n_i\,' - 1
\end{aligned}$$

La formule est donc retrouvée dans ce premier cas.

- <u>2^{nd} cas</u> : on considère un polygone à $n+1$ triangles élémentaires et on enlève un triangle élémentaire (triangle hachuré) comme ci-dessous.



Suppression d'un point côté.

Dans ce cas, par rapport au polygone de base :

- On supprime un point côté : $n_C = n_C{}'-1$
- Le nombre de points intérieurs est inchangé : $n_i{}' = n_i$.

De même que dans le premier cas :

$$\begin{aligned} A' &= A+\frac{1}{2} \\ &= \frac{n_C}{2}+n_i-1+\frac{1}{2} \\ &= \frac{n_C{}'-1}{2}+n_i{}'-1+\frac{1}{2} \\ &= \frac{n_C{}'}{2}+n_i{}'-\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} \\ &= \frac{n_C{}'}{2}+n_i{}'-1 \end{aligned}$$

La formule est donc aussi valable dans le 2^{nd} cas.

- o <u>Conclusion</u> : Pour tout polygone dont les sommets sont des points à coordonnées entières, composé de n triangles élémentaires, $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \frac{n_C}{2}+n_i-1$.

IV- Conclusion

Tout polygone dont les sommets sont des points à coordonnées entières peut être décomposé en triangles élémentaires, donc pour tous ces polygones :

$$\boldsymbol{A = \frac{n_C}{2}+n_i-1.}$$

Notes d’édition

(1) Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Pick.

(2) Attention, ce ne sont pas les seules formes possibles de triangles élémentaires. Il en existe de plus compliquées comme celle du triangle dont les sommets ont pour coordonnées : (0,0), (3,1), (5,2).

(3) Ce résultat n’est pas du tout évident. Cela est facile à calculer pour les exemples donnés page 4, moins pour celui donné dans la précédente note d’édition et encore plus difficile en général !
Le lecteur intéressé pourra trouver une démonstration à l’adresse suivante :
http://lmrs.univ-rouen.fr/Vulgarisation/Pick/Pickproof.html