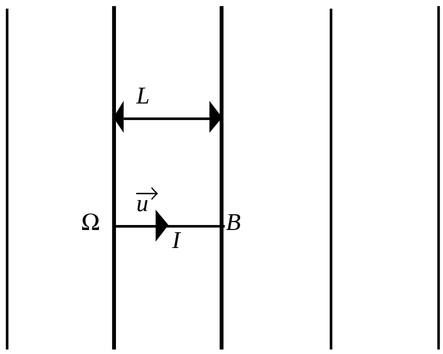
l'aiguille de Buffon

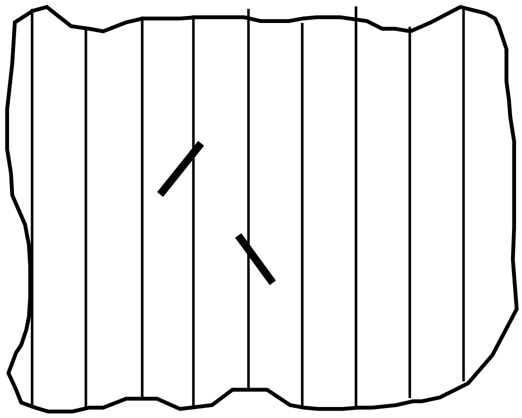
par David Benveniste, Luc Béhard, Harry Sokol, Martin Renard, Benoît Prax, Pierre de Guido, Eric Villa, Pascal Levant, Clément Cadiou, Gaspar Lamoureux, élèves de premières et terminales scientifiques des lycées La Fontaine et Buffon de Paris.

enseignants : Mmes et M. Biscarat, Gaudemet, Lattuati et Moscovici.

chercheur : M. Gilles Godefroy



le problème



« Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, et que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, et que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques unes de ces parallèles ; on demande le sort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.* »

Essai d'arithmétique morale.
G. L. L. comte de Buffon

hypothèses :
• On considère un plan infini composé de bandes parallèles.
• La longueur de l'aiguille est égale à la largeur d'une bande.

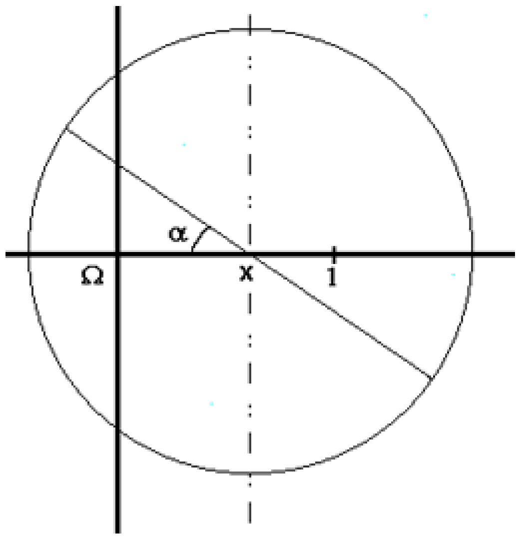
problème :
• On lance une aiguille sur un plancher.
• On cherche la probabilité qu'elle « coupe » un joint de parquet une fois retombée.

limitation et choix des variables

Symétrie

Par translation, on peut ramener la position du centre de l'aiguille sur un unique segment perpendiculaire aux bandes noté [ΩB] et de longueur la largeur d'une bande. On peut se limiter à l'étude des positions du centre de l'aiguille sur la moitié du segment [ΩI] car [$B\Omega$] admet un axe de symétrie passant par I.

Choix des variables



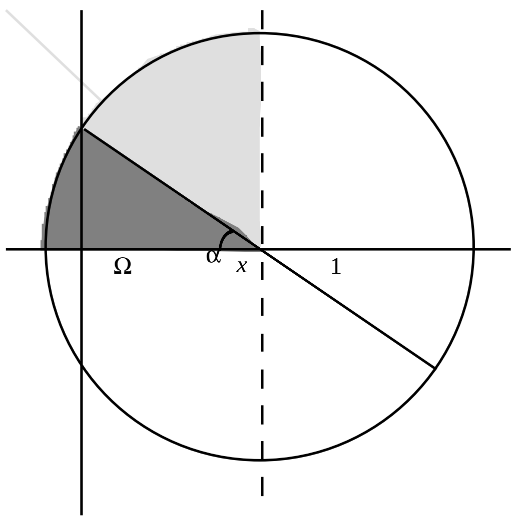
La position de l'aiguille par rapport aux bandes peut donc être définie à l'aide de deux paramètres :

• soit x l'abscisse du centre de l'aiguille $x \in [0,1]$;

• soit α l'angle formé par l'aiguille avec l'horizontale $\alpha \in [0, \pi/2]$.(=[0, 90°])

développement de la formule

probabilité en un point



On fixe le centre de l'aiguille en un point. L'angle α_{limite} correspond au cas où l'extrémité de l'aiguille se trouve sur le joint. Lorsque $\alpha < \alpha_l$ l'aiguille coupe. La probabilité correspond alors au rapport des positions dans lesquelles l'aiguille coupe sur toutes les positions qu'elle peut prendre soit $2\alpha_l/\pi$.

$$P = \frac{2\,\alpha_l}{\pi}$$

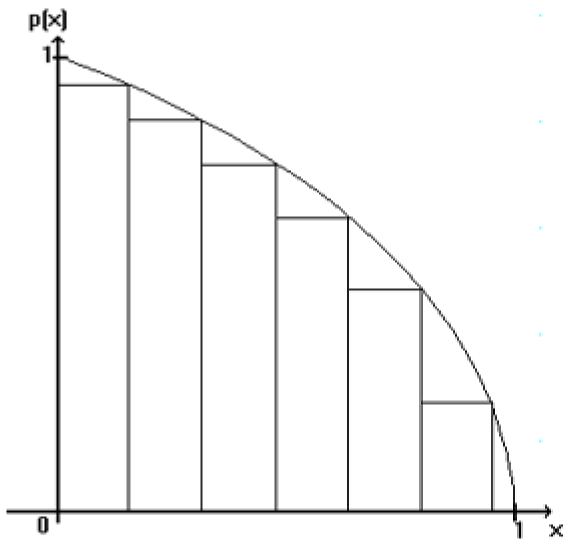
$$P = \frac{2\cos^{-1} x}{\pi}$$

probabilité globale

On étudie ensuite ce qui se passe lorsque x décrit [0, 1]. Comme toutes les positions de x entre 0 et 1 sont équiprobables, on va chercher à calculer la moyenne de $P(x)$: Q. Un programme effectué sur un calculateur nous donne une première estimation :

Pas de x	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001	0.0005
n	10	20	100	200	1000	2000
Q	0.68	0.66	0.64	0.639	0.637	0.6368

[NDLR : le « pas de x » est l'écart régulier entre deux valeurs de x pour lesquelles on fait (faire) le calcul.]



La moyenne peut donc s'écrire :

$$Q = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cos^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)}{\pi}$$

calcul de l'intégrale

On cherche à calculer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\cos^{-1}x}{\pi}\,dx$

intégration par parties

$$P(A) = \left[x\ \cos^{-1}x\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

pas définie pour $x = 1$,
mais a une limite

$$P(A) = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

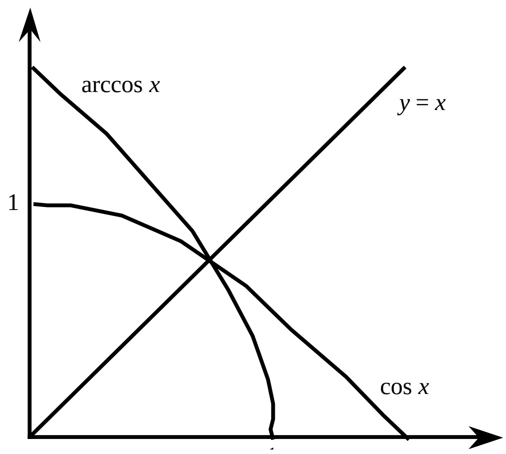
car :

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

avec $u(x) = 1 - x^2$.

$P(A) = 2/\pi$

calcul géométrique



On constate que l'intégrale entre 0 et 1 de la fonction arccos correspond à l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = \arccos x$, l'axe des abscisses et celui des ordonnées. Par symétrie par rapport à la première bissectrice, on peut plus simplement calculer l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = \cos x$, l'axe des abscisses et celui des ordonnées.

$$P(A) = \int_0^1 \frac{2\cos^{-1}x}{\pi}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos x}{\pi}\,dx$$
$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} - \frac{2\sin 0}{\pi}$$

$P(A) = 2/\pi$.

extension du problème

Après une étude en une dimension, pourquoi ne pas étendre le problème en deux dimensions par un quadrillage du plan ?

hypothèses :
• On considère un quadrillage infini du plan.
• La longueur de l'aiguille est égale au côté du carré.

problème :
• On lance une aiguille sur ce quadrillage.
• On cherche la probabilité qu'elle « coupe » au moins une droite du quadrillage une fois retombée.

première idée

On considère les évènements
• A : “l'aiguille coupe une bande horizontale”
• B : “l'aiguille coupe une bande verticale”

On cherche la probabilité de l'union des évènements en utilisant les formules :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

et

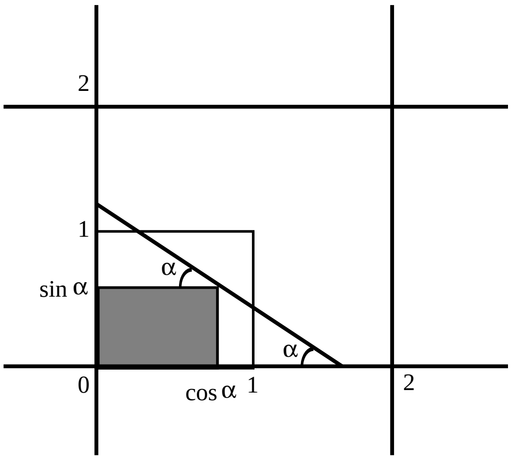
$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

formule valable pour des évènements indépendants. On aurait alors

$$P(A\cup B) = (4\pi - 4)/\pi^2 \approx 0.867954.$$

Mais l'expérimentation informatique contredit ce résultat. Les évènements A et B ne peuvent donc être indépendants. On est donc amené à calculer la probabilité que l'aiguille coupe les deux bandes : $P(A\cap B)$.

calcul complet dans le carré



On a besoin d'un troisième paramètre. Par un raisonnement analogue on peut se limiter aux cas où x et y sont compris entre 0 et 1. Lorsque le paramètre est fixé, la probabilité cherchée correspond au rapport de l'aire grisé sur l'aire carré unitaire.

$$P(A\cap B)_\alpha = \cos\alpha \times \sin\alpha$$

$$P(A\cap B) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \times \sin\alpha \, d\alpha$$

$$P(A\cap B) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\alpha \, d\alpha$$

$$P(A\cap B) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$P(A\cap B) = 1/\pi$. D'où

$$P(A\cup B) = 2/\pi + 2/\pi - 1/\pi = 3/\pi$$

Ce résultat confirme l'expérimentation informatique.

[NDLR : on aurait aimé avoir quelques explications sur cette expérimentation informatique, qu'elle soit confirmée ou contredite. L'aridité des formules de dérivation ou d'intégration en aurait été adoucie.]

[NDLR : on aurait aimé en savoir plus sur les points clefs qui ont forcément fait question au fur et à mesure de l'avancement du travail, lors des échanges entre élèves, avec les enseignants, avec le chercheur. Par exemple :

• Est-ce que lancer l'aiguille « au hasard » peut se “modéliser” avec : le milieu de l'aiguille est équiprobable entre 0 et 1 & l'angle formé avec l'horizontale est équiprobable dans [0, 360°] ? dans [0, 90°] ?

• Et si ce modèle est adopté, peut-on séparer les variables : la position du milieu étant fixée, évaluer d'abord pour quels angles (équiprobables) l'aiguille coupera le joint du parquet ?

• Dans une situation où toutes les possibilités envisageables sont en nombre fini, la probabilité d'un “évènement” se calcule comme la proportion de “cas favorables” par rapport à tous les “cas possibles” ; c'est une sorte de moyenne.

Comment faire ce calcul de moyenne s'il y a une infinité de possibilités envisageables pour l'expérience ? Peut-on considérer ce “cas infini” comme limite de “cas finis” où on pourrait faire les calculs de moyenne précédents ? Comment faire ce “passage à la limite” ?

• Nouvelle “extension du problème”, on change la longueur de l'aiguille par rapport à la largeur des bandes du parquet (plus longue, moins longue) ou celle du quadrillage : est-ce que le modèle précédemment utilisé est résistant ? (c'est-à-dire toujours valable)]