Les additions pannumériques

2018-2019

Nom, prénom et niveaux des élèves : Lacluche Camille, Monard Julie et Ouffela–Ménecier Lyna, classe de 4ème

Établissement : Collège Henri de Montherlant, Neuilly-en-Thelle

Enseignant(s) : Ide Morgan

Chercheur(s) : Bonino marc, Université paris 13

1 Présentation du sujet

Sujet : On veut faire l'addition de deux nombres entiers à trois chiffres pour en obtenir un troisième de telle façon que tous les chiffres de 1 à 9 apparaissent dans cette addition. [1]

Exemple :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 6\ 5\ 4 \\ +\ 3\ 1\ 8 \\ \hline 9\ 7\ 2 \end{array}$$

Les questions posées :

— Que peut-on remarquer concernant les chiffres du résultat de l'addition ? Est-ce une coïncidence ?

— Peut-on faire la liste de toutes les additions répondant à la question ?

2 Annonces des conjectures et résultats obtenus

Il semble que la somme des chiffres du résultat soit toujours de 18.
Exemples :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 6\ 5\ 4 \\ +\ 3\ 1\ 8 \\ \hline 9\ 7\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 2\ 8\ 3 \\ +\ 1\ 7\ 6 \\ \hline 4\ 5\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1\ 5\ 9 \\ +\ 3\ 2\ 7 \\ \hline 4\ 8\ 6 \end{array}$$

3 Texte de l'article

3.1 Pourquoi 18?

Propriété n°1 : Dans une addition pannumérique il y a exactement une retenue, et celle-ci vaut 1.
Nous allons étudier les retenues dans ce type d'opération. Pour prouver qu'il y a forcément une retenue, nous allons supposer qu'il n'y en a pas :

Notons a, b, c, d, e, f, g, h, i les 9 chiffres intervenant dans notre opération

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\ d\ e\ f \\ \hline g\ h\ i \end{array}$$

Donc $c+f=i$, $b+e=h$ et $a+d=g$,
La somme des chiffres de 1 à 9 est de 45 donc :

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$$

On fait apparaitre les regroupements ci-contre :

$$\begin{aligned} (a+d)+(b+e)+(c+f)+g+h+i &= 45 \\ g+h+i+g+h+i &= 45 \\ 2\times(g+h+i) &= 45 \\ g+h+i &= 22{,}5 \end{aligned}$$

Notation 1 :

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\ d\ e\ f \\ \hline g\ h\ i \end{array}$$

$c+f=i$
$b+e=h$
$a+d=g$

Or g,h et i sont des chiffres donc leur somme donnera un nombre entier. Donc l'hypothèse de départ est fausse, il y a forcement une retenue. [2]
Nous voulons montrer que la retenue a toujours une valeur de 1 :
La retenue ne sera pas supérieure à 1 car les plus grands chiffres que nous pouvons additionner sont 8 et 9 qui donneront 17 , donc la retenue ne sera pas supérieure à 1, et comme nous

l'avons démontré précédemment, il y a forcement une retenue ; ce sera 1.

Montrons qu'il n'y a qu'une seule retenue. Si il y a deux retenues, elles proviennent de la colonne des unités et de celle des dizaines. Faisons la démonstration avec la colonne des unités : [3]

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$$

Notation 2 :

$$\begin{array}{rccc} & & \text{①} & \\ & a & b & c \\ + & d & e & f \\ \hline & g & h & i \end{array}$$

$c+f=10+i$
$b+e=h-1+10$
$a+d=g-1$

On fait apparaitre les regroupements ci-contre :

$$\begin{aligned} (a+d)+(b+e)+(c+f)+g+h+i &= 45 \\ (g-1)+(h-1+10)+(10+i)+g+h+i &= 45 \\ g-1+h+9+10+i+g+h+i &= 45 \\ 2g+2h+2i+18 &= 45 \\ 2g+2h+2i &= 27 \\ 2(g+h+i) &= 27 \\ g+h+i &= 13,5 \end{aligned}$$

Or g,h et i sont des chiffres donc leur somme donnera un nombre entier. Donc l'hypothèse de départ est fausse, il ne peut y avoir deux retenues. En conclusion, il n'y a qu'une seule et unique retenue de 1.

Propriété n°2 :

- La somme des chiffres du résultat d'une addition pannumérique est de 18.
- La somme des chiffres des termes d'une addition pannumérique est de 27.

Montrons que la somme du résultat est toujours 18. Si il y a une retenue, elle provient soit de la colonne des unités soit de celle des dizaines.
Faisons la démonstration avec la colonne des unités :

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$$

On fait apparaitre les regroupements ci-contre :

$$\begin{aligned}(a+d)+(b+e)+(c+f)+g+h+i &= 45\\ g+(h-1)+(10+i)+g+h+i &= 45\\ g+h-1+10+i+g+h+i &= 45\\ 2g+2h+2i+9 &= 45\\ 2g+2h+2i &= 36\\ 2(g+h+i) &= 36\\ g+h+i &= 18\end{aligned}$$

Notation 3 :

$$\begin{array}{cccc} & & ① & \\ & a & b & c \\ + & d & e & f \\ \hline & g & h & i \end{array}$$

$c+f=10+i$
$b+e=h-1$
$a+d=g$

Nous avons donc démontré que lorsque la retenue est sur la colonne des dizaines, nous trouvons toujours 18 au résultat.

$$45-18=27$$

La somme des chiffres des deux termes est donc de 27.

La démonstration précédente donne les mêmes résultats si la retenue provient de la colonne des dizaines.

3.2 La liste des résultats

Nous avons cherché la liste de tous les triplets dont la somme donne 18 car, comme nous l'avons démontré, la somme des chiffres du résultat d'une addition pannumérique donne 18. Ensuite, nous avons recherché si il y avait des additions pannumériques pour chaque résultat. Dans le tableau suivant : les résultats noirs possèdent au moins une addition pannumérique possible et les rouges, eux, n'en possèdent pas.

378	981	972	459	864	765	639
387	918	927	495	846	756	693
873	819	792	549	648	675	369
837	891	729	594	684	657	396
783	189	279	945	468	567	963
738	198	297	954	486	576	936

Il y a 31 résultats possibles. [4]

3.3 Les permutations

Nous avons découvert que nous pouvons créer 3 additions pannumériques de plus à partir d'une seule en effectuant des permutations.

$$\begin{array}{rrr} & 1 & \\ 6 & 5 & 4 \\ +\,3 & 1 & 8 \\ \hline 9 & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 1 & \\ 3 & 5 & 4 \\ +\,6 & 1 & 8 \\ \hline 9 & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 1 & \\ 6 & 1 & 4 \\ +\,3 & 5 & 8 \\ \hline 9 & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 1 & \\ 6 & 5 & 8 \\ +\,3 & 1 & 4 \\ \hline 9 & 7 & 2 \end{array}$$

Dans la première addition, nous permutons les chiffres des centaines (le 3 et le 6) pour obtenir la deuxième addition. La troisième addition est obtenue en permutant les chiffres des dizaines (le 1 et le 5) de la première addition. enfin nous avons fait de même avec les chiffres des unités (le 8 et le 4) pour obtenir la quatrième addition.
Il ne sert à rien de permuter deux chiffres car cela revient à n'en permuter qu'une seule (Par exemple permuter les dizaines et les centaines revient à permuter les unités). Permuter les trois chiffres ne change rien (par exemple 654+318 et 318+654 est la même addition pannumérique).

3.4 Combien il y en a?

Il y a 31 résultats possibles, nous avons donc déjà 31 additions pannumériques et grâce aux permutations nous avons au minimum 124 additions pannumériques possibles (31x4=124). Pour certains résulats, il existe 2 types d'additions pannumériques. C'est à dire 2 additions pour lesquelles il est impossible de passer de l'une à l'autre par permutations. Nous avons trouvés qu'en tout, il y avait 168 additions pannumériques possibles. [5]

4 Conclusion

Nous avons donc vu que dans une addition pannumérique il y avait forcement une retenue et qu'elle avait une valeur de 1. Ensuite, nous avons démontré que la somme des chiffres du résultat est de 18 et que la somme des chiffres des termes est égale à 27. Concernant les résultats, il y a 31 résultats possibles. Et pour chacune des additions pannumériques nous en trouvons 3 de plus grâce aux permutations. Au final, il y a 168 additions pannumériques.

864	739	125	981	246	735	954	716	238	891	567	324
	735	129		245	736		216	738		367	524
	729	135		236	745		736	218		527	364
	725	139		746	235		718	236		564	327
	571	293		324	657		673	281		654	237
	271	593		654	327		273	681		254	637
	591	273		354	627		683	271		634	257
	573	291		357	624		671	283		657	234
486	159	327	693	475	218	927	586	341	738	596	142
	157	329		478	215		386	541		196	542
	129	357		415	278		381	546		546	192
	127	359		275	418		581	346		592	146
936	752	184	459	173	286	576	192	384	495	168	327
	152	784		273	186		392	184		167	328
	782	154		183	276		182	394		128	367
	754	182		176	283		194	382		368	127
675	493	182	783	519	264	837	195	642	639	487	152
	492	183		514	269		145	692		187	452
	483	192		569	214		142	695		182	457
	193	482		219	564		192	645		482	157
	394	281		124	659		241	596			
	294	381		129	654		291	546			
	384	291		154	629		246	591			
	391	284		159	624		296	541			
594	278	319	468	293	175	657	439	218	729	586	143
	276	318		193	275		239	418		186	543
	218	376		273	195		419	238		546	183
	378	216		295	173		438	219		583	146
567	348	219	918	576	342	819	576	243	945	328	617
	248	319		572	346		276	543		628	317
	318	249		546	372		546	273		318	627
	349	218		376	542		573	246		327	618
	139	428		245	673		352	467		163	782
	439	128		645	273		362	457		763	182
	129	438		275	643		357	462		183	762
	138	429		243	675		367	452		162	783
648	291	357	972	658	314	963	245	718	873	614	259
	297	351		654	318		745	218		214	659
	251	397		618	354		215	748		654	219
	391	257		358	614		248	715		619	254
549	387	162	846	317	529	792	658	134			
	187	362		517	329		158	634			
	367	182		319	527		638	154			
	382	167		327	519		654	138			

Notes d'édition

[1] Si, comme le relecteur, vous l'ignoriez, "pannumérique" veut dire "constitué de tous les chiffres".
[2] Il aurait peut-être été plus simple de dire que que $2(g+h+i)$ est un nombre pair et ne peut donc pas être égal à 45.
[3] Ici, les auteurs travaillent en faisant l'hypothèse qu'il y a des retenues à la fois sur les unités et sur les dizaines. D'où les égalités $c+f=10+i$, $b+e+1=10+h$ et $a+d+1=g$.
[4] [5] Il aurait pu être intéressant de savoir comment les auteures ont fait pour être certaines de ne pas avoir oublié de cas. Le relecteur étant paresseux, il a écrit un petit programme en python pour établir la liste des cas possibles, et il confirme que les nombres indiqués par les auteures sont exacts. Bravo!