Les tours de Hanoï

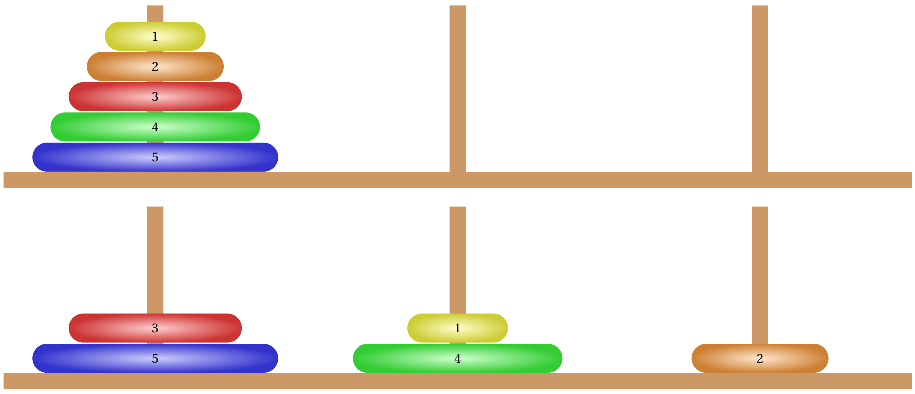
Mathis, Sterenn, Elouan, Anna, Ethann, classe de 2$^{\text{de}}$ D

Année 2022-2023

Établissement : Lycée de l'Harteloire, Brest
Enseignant· : M. Gourmelon
Chercheur·Chercheuse(s) : Rachid REGBAOUI, Université de Bretagne Occidentale

1 Présentation du sujet

Le jeu des tours de Hanoï a été inventé au dix-neuvième siècle par Édouard LUCAS, c'est un jeu qui se joue seul. Trois piliers A, B et C sont disponible, sur le pilier A sont empilés n disques de diamètres décroissants. le but est de déplacer tous les disques sur le pilier C en respectant les règles suivantes : On ne déplace qu'un disque à la fois; on ne peut déposer un disque que sur un pilier vide ou sur un disque de diamètre plus grand.



Par exemple, la disposition ci-dessus est autorisée mais on ne peut alors pas déplacer le disque n°3 car en haut des deux autres piliers se trouvent les disques 1 et 2 qui sont plus petits que 3.

Combien de mouvements faut-il pour déplacer la pile de disques du pilier A au pilier C? Et s'il y avait plus de piliers?

2 Résultats

Tout d'abord, plus il y a de disques plus il y a de mouvements. Si le nombre de disques est inférieur à 3, il y aura toujours un pilier de libre. Nous avons fait des tests avec peu de disques :

Pour 1 disque : 1 mouvement

Pour 2 disques : 3 mouvements

Pour 3 disques : 7 mouvements

Pour 4 disques : 15 mouvements

Les résultats, représentés dans un repère orthonormé ne définissent pas une fonction affine ni linéaire.

Pour trouver un nombre de mouvements minimum on multiplie le nombre de mouvements des disques précédents et on ajoute 1.

Exemple pour 4 disques, sachant que pour 3 disques il faut 7 mouvements : $7 \times 2 + 1 = 15$. Donc pour 4 disques il y a 15 mouvements.

Sans formule il faut connaître le nombre de mouvements du précédent résultat pour effectuer le calcul en notant x_n le nombre de mouvements pour n disques :

$$x_{n+1} = 2x_n + 1$$

Nous avons pu alors poursuivre et conjecturer les valeurs suivantes :

Nb disques	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nb mouvements	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191

etc. ...

Nous avons alors observé que cela se base sur les mêmes nombres que le jeu du 2048 :

-2

-4

-8

-16

-32

-64

-128

-256

-512

-etc...

C'est à dire toutes les puissances de deux.

Dans notre cas, on aurait :

$$x_n = 2^n - 1$$

avec n le nombre de disques ; en effet on retrouve nos résultats, par exemple :

$2^6 - 1 = 63$

$2^5 - 1 = 31$

$2^4 - 1 = 15$

3 Suppositions

1. Si l'anneau le plus grand se retrouve sur le pilier du milieu, le joueur aura fait des mouvements inutiles.
2. Si le nombre de disque est impair, le premier mouvement consistera à mettre le plus petit disque au pilier C. Le dernier mouvement consistera à déplacer le plus petit disque du pilier A au pilier C. On peut donc supposer que si le plus petit disque se retrouve sur le pilier B à l'avant dernier mouvement, le joueur aura fait des mouvements inutiles.
3. Si le nombre de disques est pair, le premier mouvement consistera à déplacer le plus petit disque sur le pilier B, et le dernier mouvement consistera à déplacer le plus petit disque du pilier B au C. On peut donc supposer que si le disque se retrouve sur le pilier A à l'avant dernier mouvement alors le joueur aura fait des mouvements inutiles.

4 Autres suppositions :

1. Si le premier mouvement consiste à deplacer le disque sur le pilier B alors le dernier mouvement consistera à déplacer le plus petit disque du pilier B au C.
2. Si le premier mouvement consiste à déplacer le disque sur le pilier C alors le dernier mouvement consistera à déplacer le plus petit disque du pilier A au C.
3. La formule pour calculer le nombre de mouvements pour que le plus gros disque se retrouve au pilier C en étant resté sur le pilier A depuis le début est : 2^{n-1} avec n le nombre de disques.

   Par exemple : pour 2 disques il faut 2 mouvements pour que le plus gros disque se retrouve sur le pilier C. Cette situation se vérifie avec la formule : $2^{2-1} = 2$

   pour 3 disques il faut 4 mouvements, cette situation confirme la formule : $2^{3-1} = 4$

   pour 4 disques il faut 8 mouvements, cette situation confirme la formule : $2^{4-1} = 8 \ldots$

5 Conclusion

Pour conclure, la formule permettant de calculer le nombre de mouvements minimum pour déplacer une tour de n disques du pilier A au pilier C en respectant les règles du jeu des Tours de Hanoï est : $2^n - 1$.