

Derrière la magie ... Le CODE !

Nouveau tour de magie

Année 2021- 2022

Baptiste CLAUDEL, Zackary HUMBLLOT, élèves de 4^{ème}.
Auxence PORTAL, Baptiste CHAMPAGNAT, élèves de 3^{ème}.

Encadrés par HIRIART Louissette, FINDIK Ziya.

Établissement : Collège George CHEPFER de VILLERS lès NANCY

Chercheuse : Marie DUFFLOT-KREMER, LORIA Nancy.



1. Présentation du sujet

Tour de magie

Pour ce nouveau tour de magie, une magicienne et son assistant disposent d'un plateau carré de 4 lignes et 4 colonnes ainsi que des jetons blancs et rouges.

La magicienne se trouve dans une autre pièce.

Un élève remplit le plateau 4×4 avec des jetons des 2 couleurs à sa guise, un jeton par case.

L'assistant regarde le plateau et décide alors de changer la couleur d'un seul jeton du plateau.

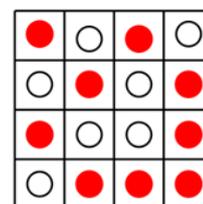
L'élève change à son tour la couleur d'un 2^{ème} jeton.

La magicienne entre dans la pièce et réussit à tous les coups à déterminer quel est le jeton que l'élève a changé.

Impressionnant non ?

Les apprentis chercheurs sauront-ils expliquer ce nouveau tour de magie ?

Ensuite les apprentis chercheurs vont pouvoir modifier une partie des règles selon leur choix (dimension du plateau, qui change son jeton en 1^{er} : l'assistant ou l'élève ?) et voir si le tour de magie fonctionne toujours pour continuer à bluffer le public.



2. Sommaire

1°) Dans un premier temps, les élèves vont expliquer ce tour de magie et en énoncer la règle de fonctionnement.

2°) Puis les élèves vont modifier certaines conditions de ce tour et voir s'il fonctionne toujours ou bien s'il faut en modifier quelque peu la règle de fonctionnement :

- Si on modifie les dimensions du plateau ?
- Si l'élève change son jeton avant que l'assistant n'en change un à son tour ?

3. Conclusion

Après avoir énoncé les règles de fonctionnement de ce tour de magie, nous avons trouvé une formule qui selon les dimensions du plateau, indique le nombre de jetons que l'assistant pourra changer au maximum pour que le tour de magie fonctionne toujours.

Puis, si l'élève change son jeton en premier, nous avons trouvé comment l'assistant pourra toujours en changeant un seul jeton après l'élève permettre à la magicienne de retrouver le jeton changé par l'élève.

1° Règle de base du tour de magie

Tout d'abord, pour simplifier l'expression, dans tout l'article, nous dirons que :

- **une ligne du plateau est paire (P)** si le nombre total de jetons rouges dans cette ligne est pair.
- **une ligne du plateau est impaire (I)** si le nombre total de jetons rouges dans cette ligne est impair.
- **une colonne du plateau est paire (P)** si le nombre total de jetons rouges dans cette colonne est pair.
- **une colonne du plateau est impaire (I)** si le nombre total de jetons rouges dans cette colonne est impair.

La magicienne est dans une autre pièce.

Un élève place un jeton de couleur blanche ou rouge sur chaque case du plateau à sa guise. **(fig.1)**

○	○	○	●
●	●	●	○
●	○	●	○
○	●	●	○

(fig.1)

L'assistant note la parité des 3 premières lignes et des 3 premières colonnes.

Par exemple dans la 1^{ère} colonne, il y a 2 jetons rouges, il note la 1^{ère} colonne paire et dans la 1^{ère} ligne, il y a 1 jeton rouge, il note la 1^{ère} ligne impaire. **(fig.2)**

	P	P	I	
I	○	○	○	●
I	●	●	●	○
P	●	○	●	○
	○	●	●	○

(fig.2)

En changeant un seul jeton, l'assistant peut faire en sorte que la parité soit la même sur les 3 premières lignes et sur les 3 premières colonnes.

▪ Comme il y a 2 colonnes paires, il peut rendre la 3^{ème} colonne paire aussi en changeant la couleur d'un jeton de la 3^{ème} colonne.

▪ Comme il y a 2 lignes impaires, il peut rendre la 3^{ème} ligne impaire en changeant la couleur d'un jeton de la 3^{ème} ligne.

Ainsi en changeant la couleur du jeton à l'intersection de la 3^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne, les 3 premières lignes seront impaires et les 3 premières colonnes seront paires. **(fig.3)**

	P	P	P	
I	○	○	○	●
I	●	●	●	○
I	●	○	○	○
	○	●	●	○

(fig.3)

Remarque :

Le magicien peut rendre les 3 premières lignes et les 3 premières colonnes de même parité en ne changeant la couleur que d'un seul jeton. **C'est toujours possible !**

En effet, sur les 3 premières colonnes :

▪ soit il y a 2 colonnes seulement de même parité, l'assistant changera la couleur d'un jeton de la colonne où la parité est différente.

▪ soit il y a les 3 colonnes déjà de même parité, l'assistant changera la couleur d'un jeton de la 4^{ème} colonne pour que la parité reste inchangée dans les 3 premières colonnes.

Et sur les 3 premières lignes :

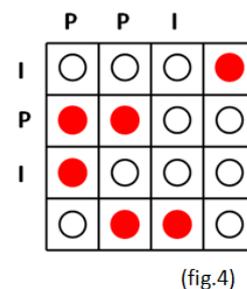
▪ soit il y a 2 lignes seulement de même parité, l'assistant changera la couleur d'un jeton de la ligne où la parité est différente.

▪ soit il y a les 3 lignes déjà de même parité, l'assistant changera la couleur d'un jeton de la 4^{ème} ligne pour que la parité reste inchangée dans les 3 premières lignes.

L'assistant changera la couleur du jeton à l'intersection de la ligne et de la colonne trouvées.

Et ainsi, si la parité est déjà la même sur les 3 premières lignes **et** les 3 premières colonnes, l'assistant changera la couleur du jeton à l'intersection de la 4^{ème} ligne et de la 4^{ème} colonne.

L'élève change la couleur d'un jeton, celui à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne. Cela modifie la parité de la 2^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne. (fig.4)



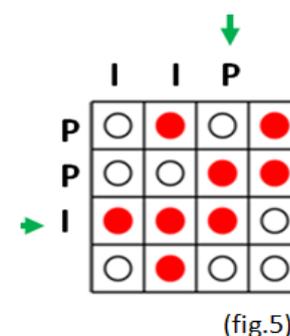
La magicienne entre dans la pièce.

Elle retrouve immédiatement le jeton changé par l'élève à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne. En effet, elle remarque que la 2^{ème} ligne est paire alors que les deux autres sont impaires et que la 3^{ème} colonne est impaire alors que les deux autres sont paires. (fig.4)

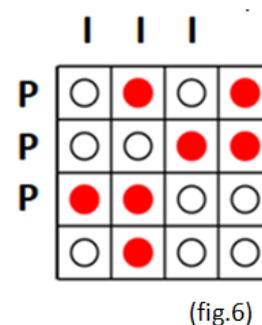
Sur un autre exemple, nous allons étudier selon les choix possibles de changement d'un jeton par l'élève que cette règle de fonctionnement du tour de magie fonctionne parfaitement bien et que la magicienne pourra retrouver le jeton changé par l'élève.

L'élève a placé les jetons sur le plateau 4 × 4 et l'assistant note la parité des 3 premières lignes et des 3 premières colonnes.

Il remarque que la parité de la 3^{ème} colonne est différente de celle des deux premières colonnes et que la parité de la 3^{ème} ligne est différente de celle des deux premières lignes. (fig.5)



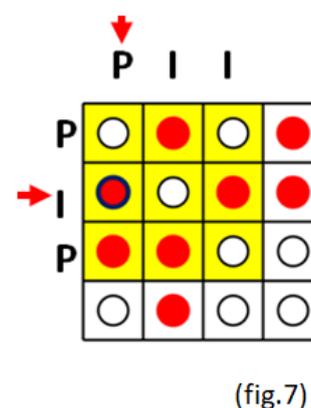
L'assistant change donc la couleur du jeton à l'intersection de la 3^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne pour que les 3 premières lignes soient paires et les 3 premières colonnes soient impaires. (fig.6)



• Premier cas :

L'élève choisit de changer un jeton dans le carré jaune, celui à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 1^{ère} colonne. (fig.7)

La magicienne retrouve ce jeton car elle remarque que la parité de la 2^{ème} ligne n'est pas la même que celle de la 1^{ère} et de la 3^{ème} ligne et que la parité de la 1^{ère} colonne n'est pas la même que celle de la 2^{ème} et de la 3^{ème} colonne. La magicienne retrouve le jeton changé par l'élève à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 1^{ère} colonne. (fig.7)

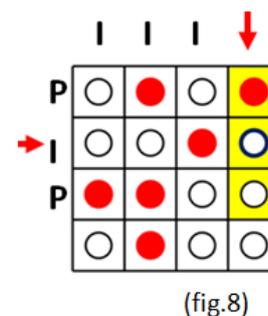


• **Deuxième cas :**

L'élève choisit de changer un jeton dans le rectangle jaune de la dernière colonne, celui à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de dernière colonne. **(fig.8)**

La magicienne retrouve ce jeton car elle remarque que la parité de la 2^{ème} ligne n'est pas la même que celles de la 1^{ère} et de la 3^{ème} ligne, donc l'élève a changé un jeton dans cette ligne. Elle remarque aussi que les 3 premières colonnes sont impaires, donc de même parité et l'élève a donc changé un jeton dans la 4^{ème} colonne.

La magicienne retrouve le jeton changé par l'élève à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la dernière colonne. **(fig.8)**



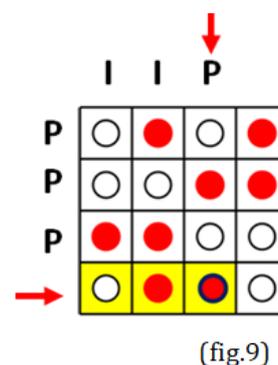
(fig.8)

• **Troisième cas :**

L'élève choisit de changer un jeton dans le rectangle jaune de la dernière ligne, celui à l'intersection de la 3^{ème} colonne et de dernière ligne. **(fig.9)**

La magicienne retrouve ce jeton car elle remarque que la parité de la 3^{ème} colonne n'est pas la même que celles des 2 premières colonnes, donc l'élève a changé un jeton dans cette colonne. Elle remarque aussi que les 3 premières lignes sont paires, donc de même parité et l'élève a donc changé un jeton dans la 4^{ème} ligne.

La magicienne retrouve le jeton changé par l'élève à l'intersection de la 3^{ème} colonne et de la dernière ligne. **(fig.9)**



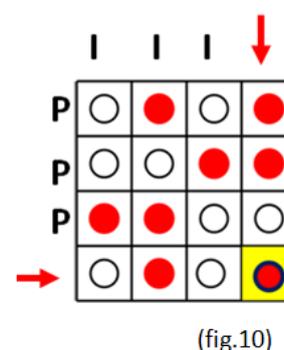
(fig.9)

• **Dernier cas :**

L'élève choisit de changer le jeton à l'intersection de la dernière ligne et de la dernière colonne. **(fig.10)**

La magicienne retrouve ce jeton car elle remarque que les 3 premières lignes sont paires, donc déjà de même parité. L'élève a donc changé un jeton dans la 4^{ème} ligne. Elle remarque aussi que les 3 premières colonnes sont impaires, donc de même parité. L'élève a donc changé un jeton dans la 4^{ème} colonne.

La magicienne retrouve le jeton changé par l'élève à l'intersection de la 4^{ème} ligne et de la 4^{ème} colonne. **(fig.10)**



(fig.10)

En conclusion, si l'assistant change la couleur d'un seul jeton pour que la parité soit la même sur les 3 premières lignes et sur les 3 premières colonnes, ce qui est toujours possible, la magicienne pourra toujours retrouver le jeton changé par l'élève quelque soit le jeton choisi par l'élève.

2° Peut- on modifier certaines conditions de ce tour de magie et voir s'il fonctionne toujours

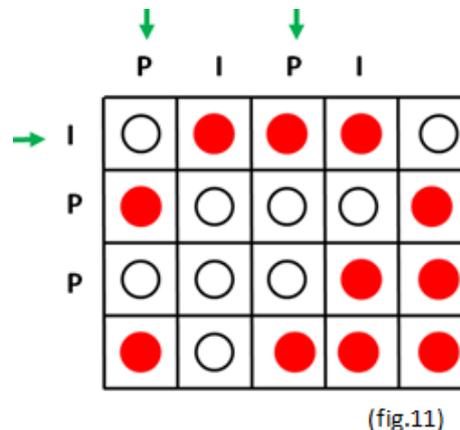
a) Peut-on modifier les dimensions du plateau ?

▪ Tout d'abord, pour un plateau de 4 lignes et 5 colonnes

L'élève a placé les jetons sur chaque case du plateau de 4 lignes et 5 colonnes et l'assistant noté la parité des 3 premières lignes et 4 premières colonnes. **(fig.11)**

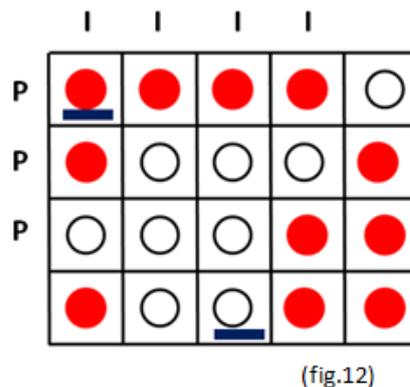
Il veut obtenir la même parité sur les 3 premières lignes et les 4 premières colonnes pour que la magicienne puisse retrouver le jeton que l'élève changera selon le principe vu dans le 1^{er} paragraphe.

L'assistant choisit par exemple de changer la parité des 1^{ère} et 3^{ème} colonnes pour que les 4 premières colonnes soient toutes impaires et de la 1^{ère} ligne pour que les 3 premières lignes soient toutes paires. **(fig.11)**

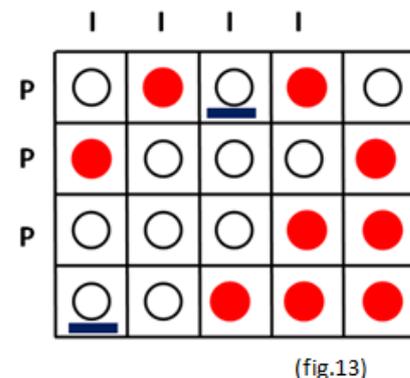


Pour faire cela, l'assistant a deux possibilités.

- 1° Il peut changer la couleur du jeton à l'intersection de la 1^{ère} ligne et de la 1^{ère} colonne pour rendre la 1^{ère} ligne paire et la 1^{ère} colonne impaire. Puis il changera la couleur du jeton de la 3^{ème} colonne et de la dernière ligne pour rendre à son tour la 3^{ème} colonne impaire sans changer la parité des trois premières lignes. **(fig.12)**



- 2° Il peut aussi changer la couleur du jeton à l'intersection de la 1^{ère} ligne et de la 3^{ème} colonne pour rendre la 1^{ère} ligne paire et la 1^{ère} colonne impaire. Puis il changera la couleur du jeton de la 1^{ère} colonne et de la dernière ligne pour rendre à son tour la 1^{ère} colonne impaire sans changer la parité des trois premières lignes. **(fig.13)**



Dans cet exemple, en changeant la couleur de seulement 2 jetons, l'assistant pourra rendre les 3 premières lignes de même parité ainsi que les 4 premières colonnes.

Si maintenant l'élève change la couleur de n'importe quel jeton du plateau, la magicienne pourra le retrouver en procédant comme au 1^{er} paragraphe de l'article.

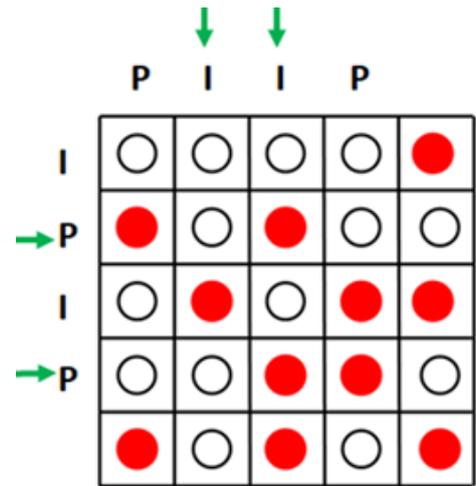
▪ Puis, pour un plateau de 5 lignes et 5 colonnes

L'élève a placé les jetons sur chaque case du plateau 5 × 5 et l'assistant noté la parité des 4 premières lignes et 4 premières colonnes. (fig.14)

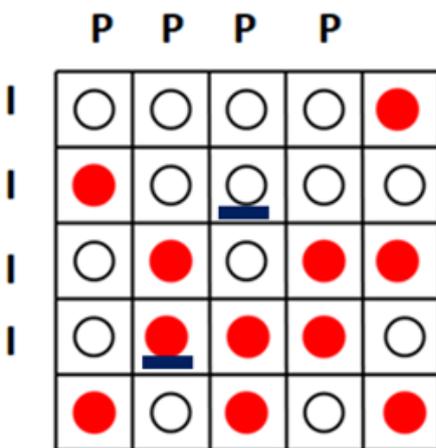
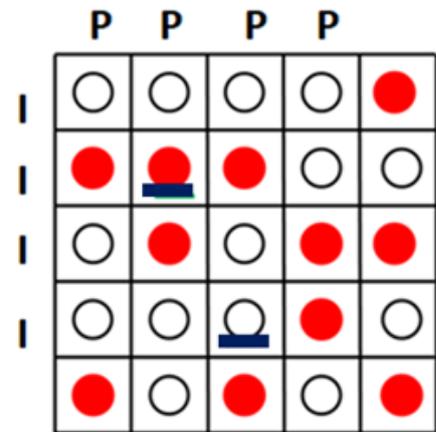
Il veut obtenir la même parité sur les 4 premières lignes et les 4 premières colonnes pour que la magicienne puisse retrouver le jeton que l'élève changera comme on l'a vu dans le 1^{er} paragraphe.

Il y a 2 lignes paires et 2 lignes impaires, l'assistant décide de mettre toutes les lignes impaires et il changera alors un jeton dans la 2^{ème} ligne et un autre dans la 4^{ème} ligne.

Il y a 2 colonnes paires et 2 colonnes impaires, l'assistant décide de mettre toutes les colonnes paires et il changera alors un jeton dans la 2^{ème} colonne et un autre dans la 4^{ème} colonne. (fig.14)



(fig.14)



(fig.15)

En échangeant la couleur de seulement 2 jetons, l'assistant rend les 4 premières lignes impaires et les 4 premières colonnes paires.

Il y a 2 façons de changer la couleur de ces 2 jetons comme l'indique les deux plateaux de la figure 15

Dans cet exemple, en échangeant la couleur de seulement 2 jetons, l'assistant réussit à rétablir la même parité sur les 4 premières lignes et les 4 premières colonnes du plateau 5 × 5.

Si maintenant l'élève change la couleur de n'importe quel jeton du plateau, la magicienne pourra le retrouver en procédant comme au 1^{er} paragraphe de l'article.

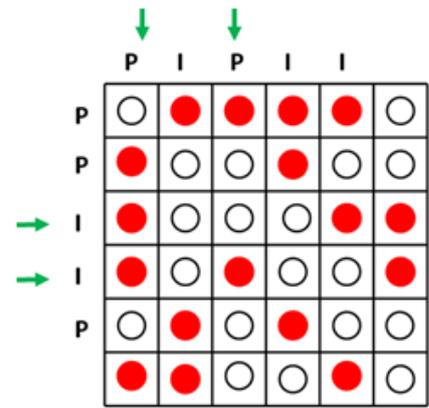
▪ Et pour un plateau de 6 lignes et 6 colonnes

L'élève a placé les jetons sur chaque case du plateau 6 × 6 et l'assistant noté la parité des 5 premières lignes et 5 premières colonnes. **(fig.16)**

Il veut toujours obtenir la même parité sur les 5 premières lignes et les 5 premières colonnes pour que la magicienne puisse retrouver le jeton que l'élève changera comme on l'a vu dans le 1^{er} paragraphe.

Il y a 3 lignes paires et 2 lignes impaires. Pour changer le moins possible de jetons, l'assistant décide de mettre toutes les lignes paires et il changera alors un jeton dans la 3^{ème} ligne et un autre dans la 4^{ème} ligne.

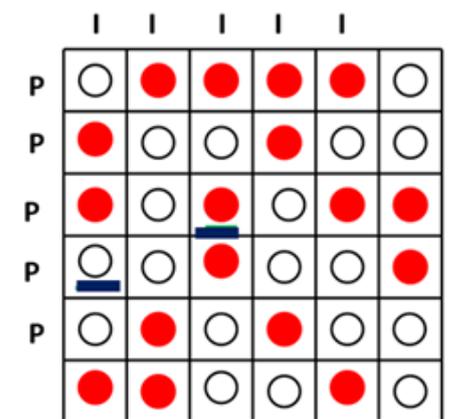
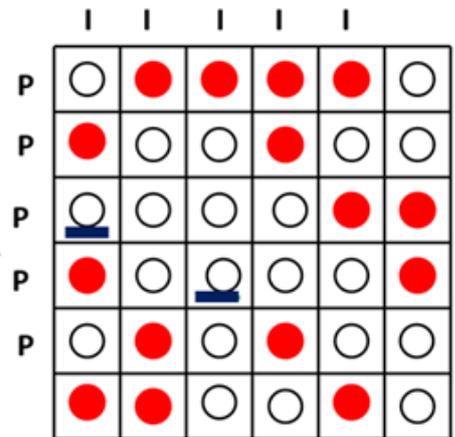
Il y a 2 colonnes paires et 3 colonnes impaires. Pour changer le moins possible de jetons, l'assistant décide de mettre toutes les colonnes impaires et il changera alors un jeton dans la 1^{ère} colonne et un autre dans la 3^{ème} colonne. **(fig.16)**



(fig.16)

En échangeant la couleur de seulement 2 jetons, l'assistant rend les 5 premières lignes paires et les 5 premières colonnes impaires.

Il y a 2 façons de changer la couleur de ces 2 jetons comme l'indique les deux plateaux de la **figure 17**



(fig.17)

Comme l'assistant ne devra pas changer de jetons dans plus de 2 lignes et 2 colonnes pour un plateau 6 × 6, nous pouvons affirmer qu'en échangeant la couleur de seulement 2 jetons, l'assistant réussit à rétablir la même parité sur les 5 premières lignes et les 5 premières colonnes du plateau 6 × 6.

Si maintenant l'élève change la couleur de n'importe quel jeton du plateau, la magicienne pourra le retrouver en procédant comme au 1^{er} paragraphe de l'article.

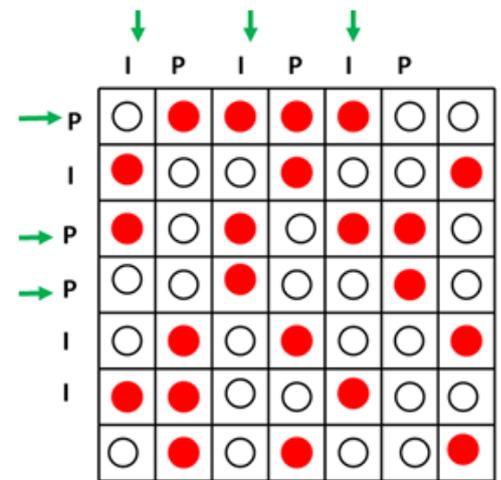
▪ **Enfin pour plateau de 7 lignes et 7 colonnes**

L'élève a placé les jetons sur chaque case du plateau 7 × 7 et l'assistant noté la parité des 6 premières lignes et 6 premières colonnes. **(fig.18)**

Il veut toujours obtenir la même parité sur les 6 premières lignes et les 6 premières colonnes pour que la magicienne puisse retrouver le jeton que l'élève changera comme on l'a vu dans le 1^{er} paragraphe.

Il y a 3 lignes paires et 3 lignes impaires et l'assistant décide de mettre toutes les lignes impaires. Il changera alors un jeton dans la 1^{ère} ligne, un autre dans la 3^{ème} ligne et un dernier dans la 4^{ème} ligne.

Il y a 3 colonnes paires et 3 colonnes impaires et l'assistant décide de mettre toutes les colonnes paires. Il changera alors un jeton dans la 1^{ère} colonne, un autre dans la 3^{ème} colonne et un dernier dans la 5^{ème} colonne. **(fig.18)**



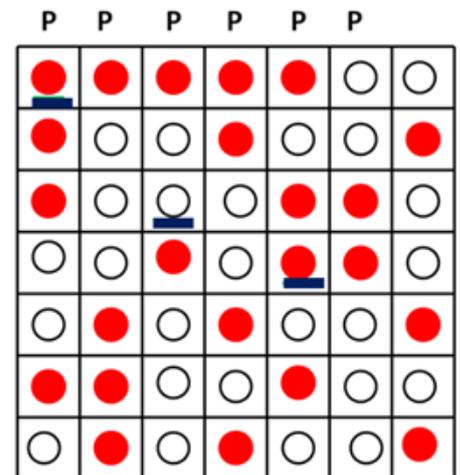
(fig.18)

Dans ce cas, l'assistant devra changer au moins 3 jetons comme par exemple sur la figure 19 pour que les 6 premières lignes soient impaires et les 6 premières colonnes soient paires.

Il y a 6 combinaisons possibles de seulement 3 jetons pour rendre les 6 premières lignes impaires et les 6 premières lignes paires, chacun des 3 jetons étant à l'intersection de la 1^{ère}, la 3^{ème} ou la 4^{ème} ligne et de la 1^{ère}, la 3^{ème} ou la 5^{ème} colonne, sans qu'aucun des 3 jetons ne soit sur la même ligne et la même colonne.

Ce qui donne comme combinaisons de 3 jetons :

- Combinaison 1 : (1^{ère} ligne et 1^{ère} colonne – 3^{ème} ligne et 3^{ème} colonne – 4^{ème} ligne et 5^{ème} colonne) **(fig.19)**
- Combinaison 2 : (1^{ère} ligne et 1^{ère} colonne – 3^{ème} ligne et 5^{ème} colonne – 4^{ème} ligne et 3^{ème} colonne)
- Combinaison 3 : (1^{ère} ligne et 3^{ème} colonne – 3^{ème} ligne et 1^{ère} colonne – 4^{ème} ligne et 5^{ème} colonne)
- Combinaison 4 : (1^{ère} ligne et 3^{ème} colonne – 3^{ème} ligne et 5^{ème} colonne – 4^{ème} ligne et 1^{ère} colonne)
- Combinaison 5 : (1^{ère} ligne et 5^{ème} colonne – 3^{ème} ligne et 1^{ère} colonne – 4^{ème} ligne et 3^{ème} colonne)
- Combinaison 6 : (1^{ère} ligne et 5^{ème} colonne – 3^{ème} ligne et 3^{ème} colonne – 4^{ème} ligne et 1^{ère} colonne)



(fig.19)

Comme l'assistant ne devra pas changer de jetons dans plus de 3 lignes et 3 colonnes pour un plateau 7 × 7, nous pouvons affirmer qu'en changeant au maximum 3 jetons, l'assistant réussira à rétablir la même parité sur les 6 premières lignes et les 6 premières colonnes.

Si maintenant l'élève change la couleur de n'importe quel jeton du plateau, la magicienne pourra le retrouver en procédant comme au 1^{er} paragraphe de l'article.

Nous généralisons alors pour un plateau de m lignes et n colonnes

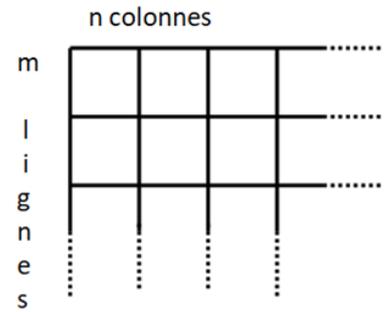
Supposons que $n \geq m$.

L'assistant regardera la parité sur les $n - 1$ premières colonnes.

Notons N la partie entière de $(n - 1) : 2$

L'assistant devra changer la parité sur au plus N colonnes et N lignes.

Il pourra le faire en changeant la couleur d'au plus N jetons.



Si $m \geq n$, l'assistant regardera la parité sur les $m - 1$ premières lignes.

Soit alors N la partie entière de $(m - 1) : 2$.

L'assistant devra changer la parité sur au plus N lignes et N colonnes.

Il pourra le faire en changeant la couleur d'au plus N jetons.

En conclusion, pour un plateau de dimensions quelconques de n colonnes et m lignes, m et n étant supérieurs ou égaux à 4, notons N la partie entière de $(\text{Max}(m, n) - 1) : 2$.

Le tour de magie fonctionne comme au départ mais l'assistant a cette fois le droit de changer au maximum la couleur de N jetons pour rendre les n - 1 premières colonnes de même parité ainsi que les m - 1 premières lignes. Le tour de magie fonctionne alors correctement, la magicienne retrouvant facilement le jeton changé par l'élève.

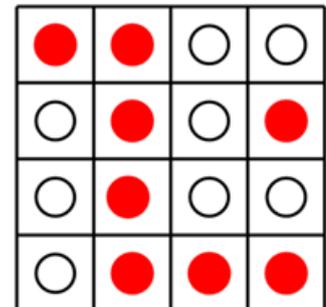
b) L'élève peut-il changer la couleur d'un jeton avant que ne le fasse l'assistant ?

Dans ce paragraphe, nous retrouvons un plateau 4×4 .

Sur un exemple, nous allons montrer qu'en changeant la couleur d'un seul jeton, l'assistant peut facilement indiquer à la magicienne le jeton changé par l'élève avant lui.

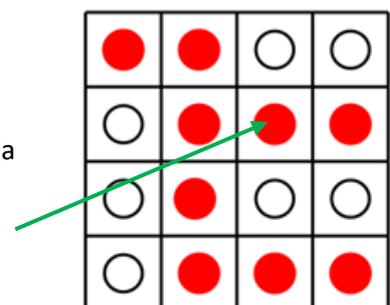
La magicienne est dans une autre pièce.

Un élève place un jeton de couleur blanche ou rouge sur chaque case du plateau à sa guise. **(fig.20)**



(fig.20)

L'élève **en premier** change la couleur d'un jeton, celui à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne. **(fig.21)**



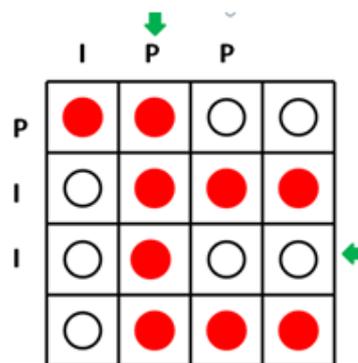
(fig. 21)

L'assistant note la parité des 3 premières lignes et des 3 premières colonnes. **(fig.22)**

En changeant la couleur d'un seul jeton, l'assistant va pouvoir indiquer à la magicienne le jeton dont l'élève a changé la couleur (celui à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne).

L'élève a changé la couleur de son jeton dans la 3^{ème} colonne qui est paire. En faisant en sorte que les 2 premières colonnes soient impaires, l'assistant indiquera la 3^{ème} colonne à la magicienne car elle sera de parité différente des 2 premières. Il changera donc un jeton de la 2^{ème} colonne pour la rendre impaire comme la 1^{ère}.

L'élève a changé la couleur de son jeton dans la 2^{ème} ligne qui est impaire. En faisant en sorte que la 1^{ère} ligne et la 3^{ème} ligne soient paires, l'assistant indiquera la 2^{ème} ligne à la magicienne car elle sera de parité différente des 2 autres lignes. Il changera donc un jeton de la 3^{ème} ligne pour la rendre paire comme la 1^{ère}. **(fig.22)**

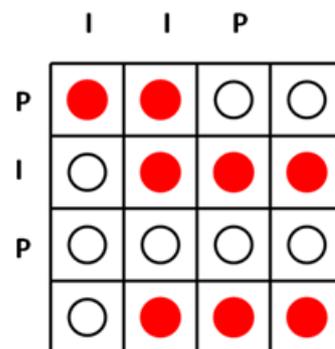


(fig.22)

L'assistant change la couleur du jeton à l'intersection de la 3^{ème} ligne et 2^{ème} colonne. **(fig.23)**

La magicienne entre dans la pièce.

Elle retrouve immédiatement le jeton changé par l'élève à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne. En effet, elle remarque que la 2^{ème} ligne est impaire alors que les deux autres sont impaires et que la 3^{ème} colonne est paire alors que les deux autres sont impaires. **(fig.23)**



(fig.23)

Remarque :

- Si l'élève change en premier la couleur d'un jeton de la 4^{ème} colonne,
 - soit les 3 premières colonnes sont de même parité et l'assistant changera la couleur d'un jeton de la 4^{ème} colonne.
 - soit les 3 premières colonnes ne sont pas de même parité, il changera alors la couleur d'un jeton de la colonne qui n'a pas la même parité que les deux autres. Les 3 premières colonnes seront alors de même parité.
- Dans les 2 cas, la magicienne se retrouvera avec les 3 premières colonnes de même parité et saura alors que l'élève a changé la couleur d'un jeton de la 4^{ème} colonne.

- Si l'élève change en premier la couleur d'un jeton de la 4^{ème} ligne,
 - soit les 3 premières lignes sont de même parité et l'assistant changera la couleur d'un jeton de la 4^{ème} ligne.
 - soit les 3 premières lignes ne sont pas de même parité, il changera alors la couleur d'un jeton de la ligne qui n'a pas la même parité que les deux autres. Les 3 premières lignes seront alors de même parité.
- Dans les 2 cas, la magicienne se retrouvera avec les 3 premières lignes de même parité et saura alors que l'élève a changé la couleur d'un jeton de la 4^{ème} ligne.

En conclusion, si l'élève change la couleur d'un jeton avant l'assistant, ce dernier pourra toujours en ne changeant la couleur que d'un seul jeton, indiquer à la magicienne le jeton que l'élève a changé. Le tour de magie fonctionne toujours dans ce cas.

Remerciements

Nous tenons à remercier tous nos partenaires :

- le conseil départemental 54
- l'association MATH.en.JEANS
- le rectorat
- le collège G CHEPFER
- le F S E du collège Chepfer
- l' I N R I A



Paris (01/04/2022)



Sans leurs soutiens, le voyage au congrès à Supelec Paris Saclay n'aurait pas été possible.

Nous remercions aussi chaleureusement notre chercheuse Marie Duflot-Kremer, pour le choix de ce sujet de recherche et son aide bienveillante tout au long de l'année, son dynamisme et ses nombreux tours de magie !