BOOM !

Année 2021 – 2022

Lysiane Courtial, Juliette De Chiara (élèves de 4e)

Établissement : Collège Alain-Fournier, Orsay.

Enseignante : Florence Ferry.

Chercheur : Olympio Hacquard.

Le sujet : On cherche à stocker n paquets de dynamite dans une cave de longueur N. Attention, on ne peut pas placer deux paquets côte à côte sinon ils explosent ! Combien il y a t-il de façons de stocker la dynamite ?

Nos résultats : Nous savons donner le nombre maximum de paquets à placer dans une cave de longueur N. Nous pouvons trouver le nombre de façons de placer, dans cette cave, un ou deux ou trois ou un maximum de paquets. Pour ce qui est d'un nombre k de paquets, k compris entre 4 et $N-1$, il nous faut connaître tous les résultats antérieurs (avec un nombre de cases plus petit) pour pouvoir donner ce nombre de positions différentes.

I - Compréhension du sujet

Nous allons commencer par considérer quelques exemples.
On assimile la cave de longueur N, à une rangée de N cases dans lesquelles on place les paquets de dynamite sachant qu'on ne peut pas placer deux paquets l'un à côté de l'autre. Dans la suite de l'article on symbolisera les paquets de dynamite par une croix.

Exemple 1 : nous cherchons à placer deux paquets de dynamites dans six cases.

Voici trois façons de les mettre (ce ne sont pas les seules) :

x			x		

		x		x	

x					x

Exemple 2 : pour placer trois paquets de dynamites dans huit cases, nous pouvons par exemple faire :

x		x		x			

x			x				x

	x			x		x	

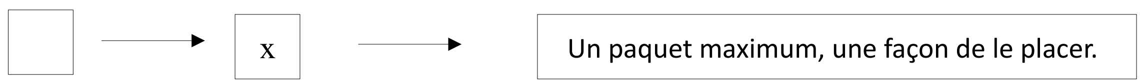
Après plusieurs essais nous commençons à nous poser plusieurs questions :

- Combien de paquets maximum va-t-on pouvoir placer ?
- Combien y a-t-il de façons de les placer ?
- Existe-t-il une relation simple entre le nombre de cases, le nombre de paquets à placer et le nombre de façons de les placer ?

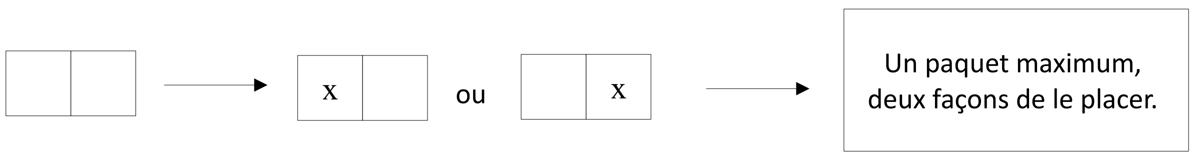
II – Premiers résultats obtenus à la main

Nous cherchons comment placer un paquet puis deux puis trois... dans une case, puis deux, puis trois …

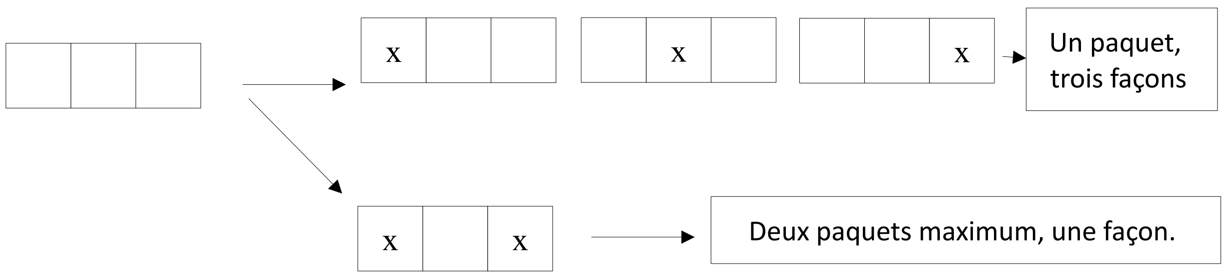
– Une case.



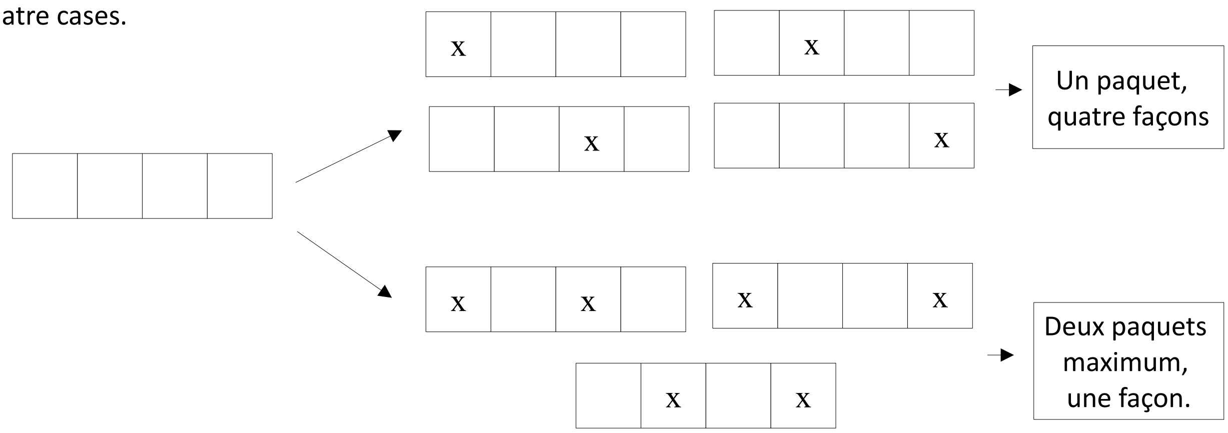
– Deux cases.



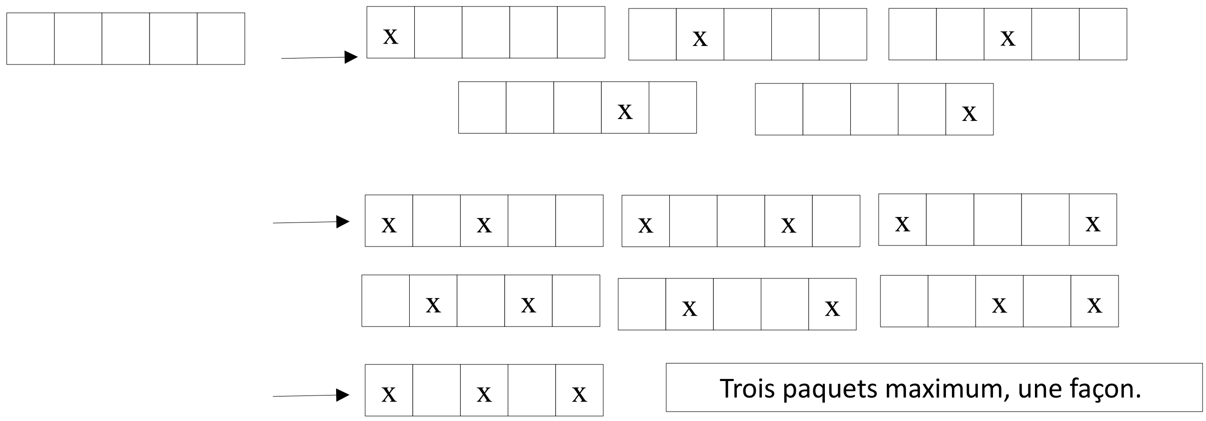
– Trois cases.



– Quatre cases.



– Cinq cases.



Nous avons regroupé nos résultats dans un tableau.

Nombre de cases N	Nombre de paquets	Nombre de façons d'arranger les paquets
1	1	1
2	1	2
3	1 2	3 1
4	1 2	4 3
5	1 2 3	5 6 1
6	1 2 3	6 10 4
7	1 2 3 4	7 15 10 1

À partir de huit cases, cela devenait très long et compliqué mais nous avons commencé à comprendre comment trouver toutes les positions sans en oublier.

Intéressons nous tout d’abord au nombre maximum de paquets qu’il est possible de placer dans la cave.

III – Nombre de paquets maximum

D'après notre tableau de résultats du II, une conjecture apparaît :

- si le nombre de cases N est pair, on pourra placer au maximum $\frac{N}{2}$ paquets.

- si N est impair, on pourra en placer au maximum $\frac{N+1}{2}$.

Démonstration.

- Si N est pair et si on veut placer le maximum de paquets, on en met un dans la première case, on laisse une case vide, on en met un dans la troisième et ainsi de suite en plaçant un paquet toutes les deux cases.

x		x		. . .	x		x	

La dernière case reste vide ; on a bien placé au maximum $\frac{N}{2}$ paquets.

- Si N est impair, on recommence le même procédé mais à la fin, il y a une case en plus où l'on peut placer un dernier paquet (dans la dernière case).

x		x		. . .	x		x		x

Ce qui fait un paquet de plus par rapport au cas précédent.
On a donc bien placé au maximum $\frac{N+1}{2}$ paquets.

Voici quelques exemples :

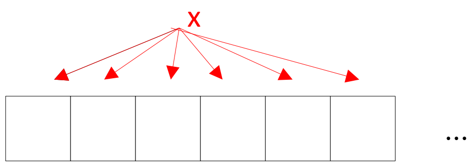
Pour $N = 50$: 50 est pair, on pourra donc mettre au maximum 25 paquets $\left(\frac{50}{2}\right)$.

Pour $N = 71$: 71 est impair, on pourra donc mettre au maximum 36 paquets $\left(\frac{71+1}{2}\right)$.

IV – Nombre de positions

Intéressons nous maintenant au nombre de positionnements possibles des paquets dans la cave.

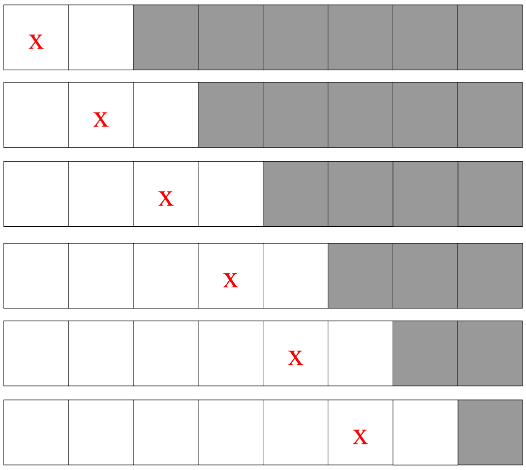
1 - Placer un paquet



Le résultat est immédiat, il y a autant de façons que de cases.
Conclusion : Il y a N façons de placer un paquet dans une cave de longueur N.

2 - Placer deux paquets

Pour bien comprendre, prenons d'abord un exemple d'une cave de huit cases. Le premier paquet posé a six positions possibles ; dans les cases grisées, il y aura le deuxième paquet.



Le deuxième paquet a donc six positions possibles dans le premier cas (d'après 1) ci-dessus), cinq pour le deuxième cas et ainsi de suite jusqu'à n'avoir plus qu'une position pour le dernier cas.

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$$

On a ainsi 21 façons de placer 2 paquets dans 8 cases.

Généralisons à une cave de N cases :

- Si on place le premier paquet dans la première case ; le second sera placé dans les $N-2$ cases restantes : il y aura pour ce cas, $N-2$ positions.
- Si on place le premier paquet dans la deuxième case, le deuxième sera placé dans les $N-3$ cases restantes : il y aura pour ce cas, $N-3$ positions.

On continue ainsi jusqu'à poser le premier paquet dans la $(N-3)$-ième case et le deuxième dans la dernière case : il n'y a alors plus qu'une façon de le faire.

Pour placer deux paquets dans N cases il y a donc : $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + N-2$ façons.

Mais comment peut-on calculer cette somme rapidement ?

Calcul de la somme des *N* premiers nombres entiers strictement positifs – Formule de Gauss.

Exemple : Appelons S la somme des entiers de 1 à 6.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$
$$S = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

On ajoute membre à membre : $2S = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$ Donc : $S=\frac{6\times 7}{2}$.

Nous pouvons généraliser cette méthode de calcul pour N paquets :

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (N-1) + N$$
$$S = N + (N-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

On ajoute membre à membre : $2S = (N+1) + (2+N-1) + (3+N-2) + \ldots + \ldots + (N+1)$.

Cette somme contient N termes : $2S=(N+1)\times N$. Donc $S=\frac{(N+1)\times N}{2}$.

Si nous revenons à notre problème, pour placer deux paquets dans N cases nous avons

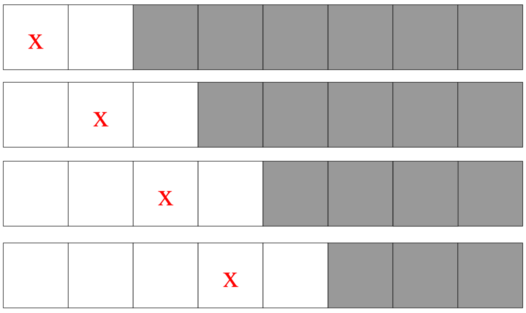
$$1+2+3+4+\cdots+N-2=\frac{(N-2)\times(N-2+1)}{2}=\frac{(N-2)\times(N-1)}{2} \text{ façons.}$$

Par exemple, pour placer 2 paquets dans 37 cases : $\frac{(37-2)\times(37-1)}{2}=\frac{35\times 36}{2}=630$.

Il y a donc 630 façons de placer 2 paquets dans 37 cases.

3 - Placer trois paquets

Prenons d'abord un exemple d'une cave de huit cases. Le premier paquet posé a six positions possibles ; dans les cases grisées, il y aura les deux autres paquets à placer.



Si le premier paquet est placé dans la première case : le nombre de positions dans ce cas correspond au nombre de façons de placer deux paquets dans 6 cases (méthode expliquée ci-dessus) ; c'est 10.
Si le premier paquet est placé dans la deuxième case : le nombre de positions dans ce cas correspond au nombre de façons de placer deux paquets dans 5 cases (méthode expliquée ci-dessus) ; c'est 6. Etc jusqu'à placer les deux paquets dans 3 cases : il n'y a qu'une façon.

On a : $10 + 6 + 3 + 1 = 20$. Il y a 20 façons de placer 3 paquets dans 8 cases.

Généralisons à une cave de N cases :

- Si on place le premier paquet dans la première case, les deux autres paquets seront placés dans les $N-2$ cases restantes ; ce calcul se fait à partir de la méthode expliquée à la question 2 ci-dessus.
- Si on place le premier paquet dans la deuxième case, les deux autres paquets seront placés dans les $N-3$ cases restantes. On continue ainsi jusqu'à poser le premier paquet dans la $(N-4)$-ième case car il faut garder au minimum trois cases pour placer les deux autres paquets, en plus de la case de séparation.

Nous en déduisons donc l'expression suivante qui calcule le nombre de façons de placer trois paquets dans N cases :

$$\frac{(N-2-2)\times(N-2-1)}{2}+\frac{(N-3-2)\times(N-3-1)}{2}+\frac{(N-4-2)\times(N-4-1)}{2}+\dots+\frac{(3-2)\times(3-1)}{2}$$
$$=\frac{(N-4)\times(N-3)}{2}+\frac{(N-5)\times(N-4)}{2}+\frac{(N-6)\times(N-5)}{2}+\dots+\frac{(3-2)\times(3-1)}{2}.$$

Remarques :

1 - Dans cette expression, tous les termes sont des entiers et donc la somme est toujours un entier. En effet : on divise par deux le produit de deux nombres entiers qui se suivent. Or, si on prend deux nombres entiers qui se suivent, il y a en a forcément un qui est pair. Le produit des deux nombres sera donc un multiple de deux donc pair et la division par deux donne un résultat entier.

2 - La méthode que l'on vient d'expliquer pour 3 paquets est valable pour n'importe quel nombre n de paquets à placer dans N cases : il faut juste connaître tous les résultats précédents qui donnent le nombre de façons de placer $n-1$ paquets dans les $N-x$ cases, où x est un entier compris entre 2 et $N-1$ (1).

Nous pouvons maintenant continuer à remplir notre tableau pour huit, neuf et dix cases.

Nombre de cases N	Nombre de paquets	Nombre de façons d'arranger les paquets
1	1	**1**
2	1	**2**
3	1 2	**3** **1**
4	1 2	**4** **3**
5	1	**5**

Nombre de cases N	Nombre de paquets	Nombre de façons d'arranger les paquets
	2 3	**6** **1**
6	1 2 3	**6** **10** **4**
7	1 2 3 4	**7** **15** **10** **1**
8	1 2 3 4 $\left(\frac{8}{2}\right)$	**8** (autant de façons que de cases) **21** $\left(\frac{(8-2)\times(8-1)}{2}=\frac{6\times 7}{2}\right)$ **20** (somme des nombres de façons de placer 2 paquets de dynamite dans 6 cases puis 5 puis 4 … jusqu'à 1 : 10 + 6 + 3 + 1). **5** (somme des nombres de façons de placer 3 paquets dans 6 cases puis 5 puis 4 … jusqu'à 1 : 4 + 1).
9	1 2 3 4 5 $\left(\frac{9+1}{2}=\frac{10}{2}\right)$	**9** (Il y a 9 cases) **28** $\left(\frac{(9-2)\times(9-1)}{2}=\frac{7\times 8}{2}\right)$ **35** (Le nombre de façons de placer 2 paquets dans 7 cases puis 6 puis 5… : 15 + 10 + 6 + 3 + 1) **15** (Le nombre de façons de placer 3 paquets dans 7 cases puis 6 … : 10 + 4 + 1) **1** (Nombre de façons de placer 4 paquets dans 7 cases puis 6 … : 1)
10	1 2 3 4 5 $\left(\frac{10}{2}\right)$	**10** **36** $\left(\frac{9\times 8}{2}\right)$ **56** (21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1) **35** (20 + 10 + 4 + 1) **6** (5 + 1)

Nous pourrions poursuivre ce tableau indéfiniment.

Ouverture : on pourrait maintenant se demander se qu'il se passe quand on est dans une salle en deux dimensions.

Note d’édition

(1) On peut remarquer que dans cette addition on a les mêmes termes que dans celle qui donne le nombre de façons de placer n paquets dans N–1 cases, plus un nouveau terme : le nombre de façons de placer n–1 paquets dans N–2 cases. Donc le nombre de façons de placer k paquets dans N cases est égal au nombre de façons de placer n paquets dans N–1 cases plus le nombre de façons de placer n–1 paquets dans N–2 cases.

Cela permet une économie de calculs pour remplir le tableau ; par exemple pour le nombre de façons de placer 3 paquets dans 10 cases, on trouve la somme 15 + 10 + 6 + 3 + 1 qui donne le nombre de façons de placer 3 paquets dans 9 cases (soit 35, déjà calculé), plus 21, le nombre de façons de placer 2 paquets dans 8 cases : on aurait pu additionner directement ces deux nombres.
Et cela permettrait de faire ces calculs automatiquement à l’aide d’un tableur.