Nœuds

par
Pierrick ABRIAL, François GIRARDIN
(lycée de l'Hautil, 95 - Jouy le Moutier)
et
François COUDEYRE, Cédric LORILLEC, Marion NG WING TIN, Corinne PHALIVONG
(lycée Camille Saint Saens, 93 - Deuil La Barre)
et
(lycée Jacques Feyder, 93 - Epinay)

Jumelage Math.en..Jeans 1999-2000.
Enseignants : *Renaud LE NULZEC (lycée de l'Hautil), Jean-Claude ROY (lycée Camille Saint Saens) et Vincent AVELA (lycée Jacques Feyder)*
Chercheur : *Lionel SCHWARTZ (Inst. Galilée, 93 - Villetaneuse).*

Sujet initial

Entrelacs (L. Schwartz, 1998)

Lorsque deux ou plusieurs boucles de ficelle (on ne considère que des boucles fermées sur elles-mêmes) sont entrelacées dans l'espace, elles forme un *entrelacs*. Par définition, on considère que l'entrelacs ne change pas lorsqu'on les déforme les boucles ou qu'on en change la position dans l'espace (mais il est exclu de les couper). Pour représenter un entrelacs, on peut dessiner son ombre sur un plan en prenant soin d'indiquer, pour chaque croisement qui apparaît, quelle portion de ficelle passe *au dessus* et quelle portion passe *au dessous*. Le dessin obtenu est appelé *diagramme* de l'entrelacs. Il y a évidemment plusieurs diagrammes possibles pour un même entrelacs.
Comment passer d'un diagramme à un autre ?

[Les nœuds simples étudiés ici sont des boucles de corde fermées sur elles-mêmes ([1]). S'il y a plusieurs boucles, mêlées ou non,on parle d'entrelacs.]

les noeuds simples

Principes fondamentaux

notion de sens de parcours.
Afin de caractériser un noeud *N*, il faut avant tout définir un *point de départ* sur ce nœud et un *sens de parcours*, que l'on suivra jusqu'à ce que l'on revienne au départ (étant donné que le nœud est en "circuit fermé") et que l'on représentera par une flèche.

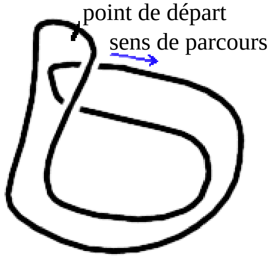


Figure 1

[Une image plane d'un nœud (une photographie) fait apparaître des *croisements* ([1]).]

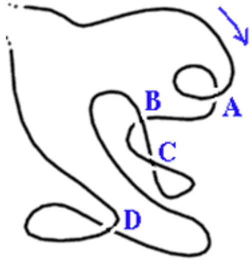


Figure 2

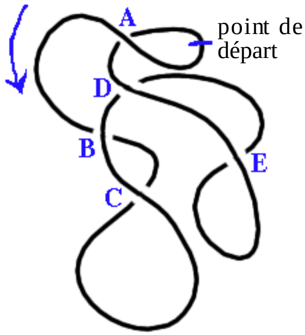


Figure 3

[Les lettres A, B,C, … ont ici été placées suivant l'ordre où les croisements apparaissent dans le parcours. Voir plus loin.]

association croisement/entier ou **état d'un croisement** : lors du parcours du noeud *N*,on sera amené à passer, au niveau d'un croisement (que l'on nommera par une lettre), **sur** ou **sous** la deuxième corde constituant ce croisement. On associe au fait de passer sur ou sous la corde (toujours en suivant le sens de parcours fixé préalablement) un entier, 0 ou 1. Ainsi:

- 0 **équivaut à** : le parcours passe ***sous*** la corde.
- 1 **équivaut à** : le parcours passe ***sur*** la corde.

Exemple ["**caractérisation**" d'un nœud].

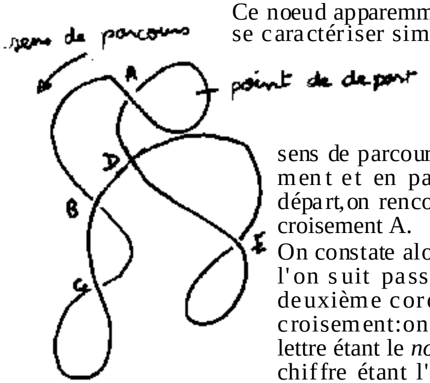


Figure 4

Ce noeud apparemment compliqué peut se caractériser simplement grâce aux conventions décrites plus haut.

En effet,en suivant la corde selon le sens de parcours imposé arbitrairement et en partant du point de départ,on rencontre tout d'abord le croisement A.

On constate alors que la corde que l'on suit passe au-dessus de la deuxième corde qui compose le croisement:on écrit donc *A*/1 (la lettre étant le *nom* du croisement, le chiffre étant l'*éta*t du croisement lorsque l'on y passe suivant le sens de parcours défini préalablement).

Ensuite,on arrive au croisement *B*. On constate alors que la corde passe au-dessous de la seconde corde composant le croisement : on note donc *B*/0. On procède ainsi de suite pour tous les croisements jusqu'à ce que l'on revienne au point de départ ; on a donc ainsi caractérisé tout le noeud *N*.

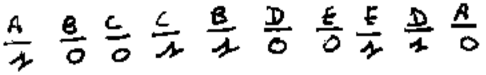


Figure 5

Au final, le noeud *N* est caractérisé par [2]:

$$N = A/1, B/0, C/0, C/1, B/1, D/0, E/0, E/1, D/1, A/0$$

Remarque 1 — Lors de la caractérisation du noeud,on sera amené à repasser par les mêmes croisements puisque **chacun d'eux est constitué de deux** [**morceaux de**] **cordes**. Mais l'état du croisement lors du second passage sera toujours différent du premier et ce quelque soit le noeud considéré.

Cette caractérisation d'un noeud permet avant tout de définir précisément des mouvements intuitifs de simplifications.

Simplifications élémentaires

Intuitivement,chacun conçoit aisément qu'il existe deux mouvements élémentaires de simplification d'un noeud.

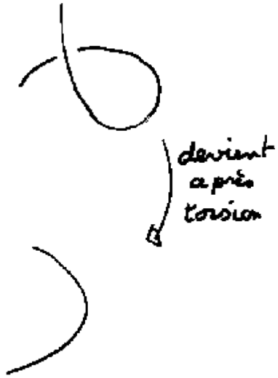


Figure 6

En effet,il existe ce que l'on pourrait appeler la *torsion* (on tord effectivement le noeud afin de simplifier un croisement, cf. fig. 6) et la *translation* (on déplace la corde afin de simplifier non pas un mais deux croisements, cf. fig. 7).

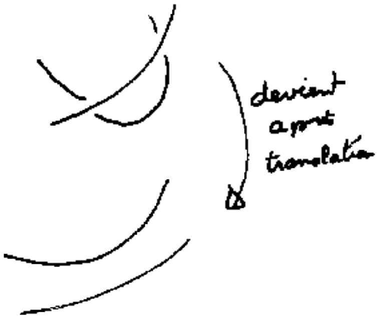


Figure 7

Ces deux mouvements ne peuvent s'effectuer que dans des cas bien précis se présentant lors de la caractérisation du noeud considéré.

De plus contrairement aux autres notions abordées précédemment,celles-ci ne se définissent pas à partir de la représentation graphique du noeud mais **à partir de sa caractérisation formelle**.

notion de translation: si dans la caractérisation du noeud,on a un enchaînement du type:

... *A*/1,*B*/1 … *A*/0,*B*/0 ... ou … *A*/1,*B*/1 … *B*/0,*A*/0 … [ou ... *A*/0,*B*/0… *A*/1,*B*/1... ou …*A*/0,*B*/0…*B*/1,*A*/1…] alors on peut simplifier les croisements A et B par *translation*.

notion de torsion:[…] si dans la caractérisation du noeud on a un enchaînement du type:

… (*A*/1, *A*/0) … [ou … (*A*/0, *A*/1) …]

alors le noeud A se simplifie par *torsion*.

Remarque — Lorsqu'un croisement est simplifié, celui-ci ne doit plus apparaître dans […] la caractérisation du noeud considéré.

Application. Nous avons représenté sur la figure 8, un nœud que l'on voudrait simplifier.

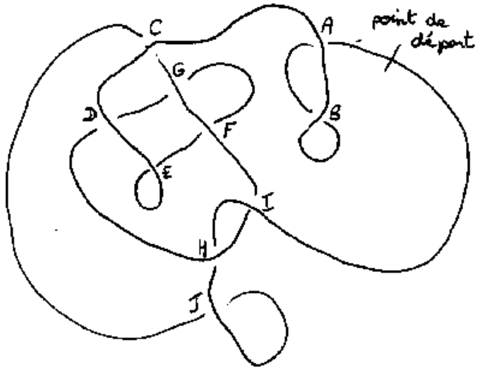


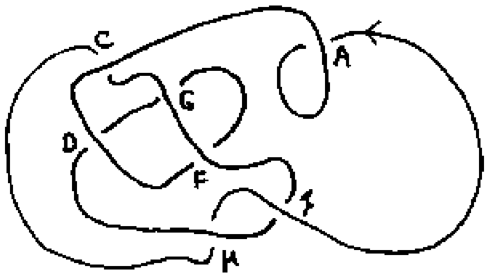
Figure 8

Pour cela nous allons commencer par caractériser ce nœud,afin de faire apparaître d'éventuelles simplifications. […] La caractérisation du nœud "brut" est:

A	B	B	A	C	D	E	E	F	G	D	H	I	F	G	C	J	J	H	I
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1

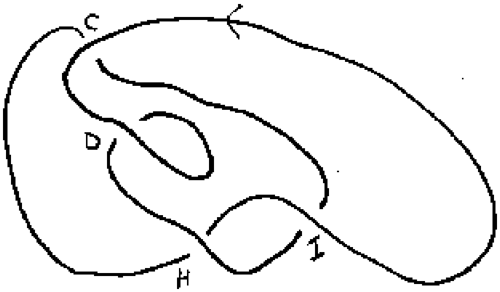
Figure 9

Nous allons donc simplifier cette expression au maximum:



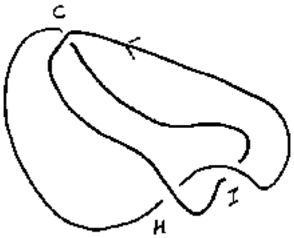
A	A	C	C	F	G	D	H	I	F	G	C	H	I
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1

Figure 10



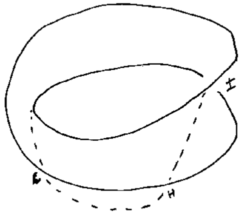
C	C	D	H	I	C	H	I
1	1	0	1	0	0	0	1

Figure 11



C	H	I	C	H	I
1	1	0	0	0	1

Figure 12



I	I
0	I

Figure 13

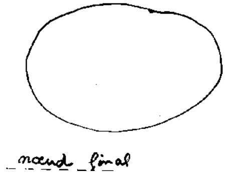


Figure 14

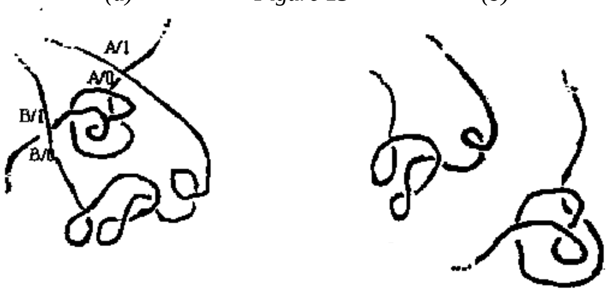
[Nous avons donc montré que ce nœud est réductible (3)]

Extension aux "parties"

Les définitions […] précédentes ne permettent pas de simplifier certains nœuds qui apparaissent effectivement simplifiables sur la représentation graphique [cf. note 1] contrairement à ce qu'affirme la caractérisation de ces nœuds. D'où la nécessité d'introduire la notion de *partie* qui permettra de simplifier ces nœuds.

Notion de partie. En fait,une *partie* est effectivement une "partie" d'un nœud qui regroupe toutes les conditions de la remarque 1 , à savoir : passage par deux croisements de même nom mais aux états différents.

(a) *Figure 15* *(b)*



(a) *Figure 16* *(b)*

[*Exemple* : partie basse de la figure 16 (a).] Comme vous pouvez le remarquer le "point de départ" (qui n'est pas le véritable point de départ tel que nous l'avons défini plus haut) diffère du "point d'arrivée";ainsi *dans le cas présent* le croisement *A* est le départ et le croisement *B* est l'arrivée:entre ces deux croisements il y a une partie. En effet,si o**n s'intéresse seulement aux croisements compris entre** *A* **et** *B* et qu'on caractérise cette portion à l'aide des conventions mises en place,on obtient [4] :

$$a/1,\ a/0,\ b/0,\ c/1,\ c/0,\ b/1,\ d/1,\ d/0$$

On voit donc que chaque croisement apparaît deux fois ~~mais~~ sous deux états différents ; or il ne s'agit pas d'un nœud mais seulement d'une section du nœud étudié : il s'agit donc d'***une partie***. [5]

L'utilité de la [notion de] partie ne semble,à première vue, pas très évidente. Pourtant,elle est nécessaire pour généraliser à tous les nœuds simples les notions de simplification que nous allons maintenant voir.

Notion de torsion. […] *Si, lors de la caractérisation du nœud que l'on considère,on a une expression du type* …$A/0$, (partie) , $A/1$… , *alors le croisement A peut se simplifier par torsion*.

Remarque 2 — La torsion à une incidence sur les états des croisements de la partie qui a été "tordue" ; en effet, ***chaque état de chaque croisement devient son opposé*** : ainsi le 0 devient 1 et le 1 devient 0.

Exemple : la figure 15 montre comment le croisement *A* est simplifié par torsion [passage de (a) à (b)] et comment les états des croisements de la partie passent à l'opposé.

Remarque 3 — On peut voir ici l'utilité de la [notion de] partie : en effet,si entre les "deux" croisements (qui sont en fait les mêmes mais sous deux états différents), il n'y avait pas une partie mais un ensemble de croisements quelconque, la simplification aurait été impossible.

Notion de translation. […] *Si, lors de la caractérisation du nœud on a* [*une expression du type*] :

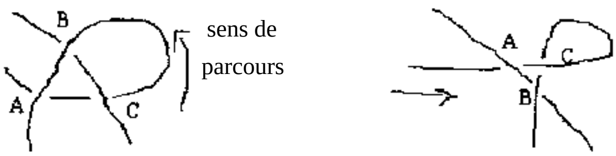
…$A/1$, (partie 1) , $B/1$, … , $A/0$, (partie 2) , $B/0$,… ,

alors le nœud se simplifie par translation.

Remarque 4 — Contrairement à la torsion,dans la translation on fait intervenir *deux parties indépendantes* l'une de l'autre. […] ***Les états des croisements des parties ne sont pas modifiés***. […]

Exemple : la figure 16 montre comment les croisements *A* et *B* sont simplifiés par le mouvement de translation [passage de (a) à (b)],qui est en fait un glissement des deux parties l'une par rapport à l'autre.

Notion de forme conjuguée et de déplacement. c'est le même principe que la forme conjuguée en analyse [6]. On fait apparaître le croisement complémentaire (c'est à dire un croisement de même nom mais à l'état différent) d'un croisement,pour pouvoir ensuite simplifier ce croisement ou un autre,par translation ou par torsion. Cela correspond en fait à un déplacement de la corde sans modification des caractéristiques fondamentales,à savoir la consécutivité des croisements, leur état associé et le sens de parcours.



A/0,C/0,B/1 A/0, C/1, C/0, B/1

croisement complémentaire ↑

(a) *Figure 17* *(b)*

Exemple : en comparant les figures 17(a) et 17(b),on voit bien que l'on a déplacé le brin liant les croisements *A* et *C* vers le haut,faisant apparaître une occasion de simplifier le croisement *C* par torsion [7].

Remarque 6 : Un déplacement "mal pensé et mal géré" risque de faire apparaître un autre croisement quelque part dans le nœud.

entrelacs et nombre de tours

[…] Nous allons donner une méthode permettant cette fois-ci de savoir si un entrelacs (association de plusieurs noeuds entrelacés) est défaisable ou pas. Cette méthode est fondamentalement assez simple.

En effet,il s'agit en fait de savoir combien de tours fait une corde par rapport à l'autre,en considérant l'exemple suivant :

On constate que la corde 1 s'enroule 3 fois autour de la corde 2 (et vice versa).

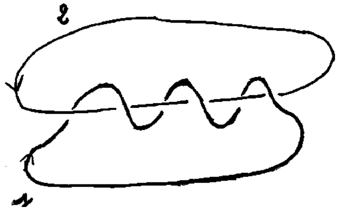


Figure 18

Pour coder la manière dont s'enroulent les cordes les unes par rapport aux autres,on définit (et on fixe) un sens de parcours sur chacune des cordes, comme pour les noeuds simples.

• on comptera +1 quand, ~~par exemple~~, la corde 1 tournera dans le sens direct [8] par rapport à la corde 2.

• ~~De plus,~~ on comptera -1 quand la corde 1 s'enroule dans le sens indirect [8].

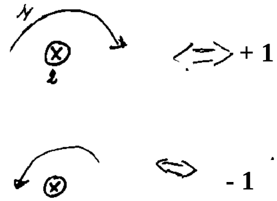


Figure 19

[En faisant le total de ces nombres, noté $\sum$, on obtient **le double du nombre de tours** de la corde 1 par rapport à la corde 2. (9)]

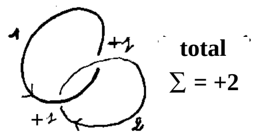


Figure 20

[Théorème ? (10)]

Si le total $\sum$ est différent de 0, alors on ne peut défaire l'entrelacs. **O**

Cette méthode permet seulement de savoir si l'entrelacs considéré est indéfaisable […].

[Si l'entrelacs se défait, le total $\sum$ est nul, mais la réciproque est fausse.

En effet, pour chacun des entrelacs (a) et (b) de la figure 21, $\sum$ vaut 0.

Mais (a) se défait aisément, tandis que (b) ne se défait pas (11).]

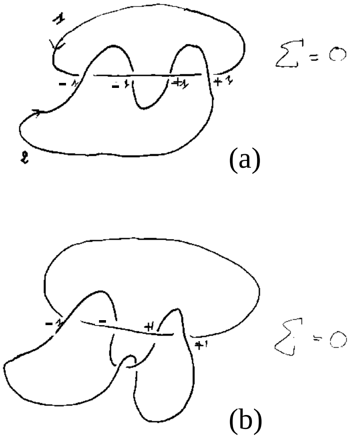


Figure 21

conclusion

[…] La première [remarque] que l'on peut faire, et peut être de loin la plus importante, est que l'écriture et toutes les conventions et définitions que les auteurs de ces quelques lignes ont mises en place ne sont pas "bijectives", c'est à dire que tous les noeuds peuvent se caractériser avec ces conventions, mais un noeud écrit avec les conventions n'est pas toujours constructible,ou dessinable [12].

De plus, les possibilités qu'offrent ces conventions n'ont pas toutes été exploitées, notamment au niveau d'une classification des noeuds selon le nombre de croisements, l'irréductibilité par exemple. [13]

Enfin,ces conventions ne sont bien sur pas les seules, peut être pas les plus simples, pas les meilleures ni les plus efficaces, mais elles ont l'avantage d'être efficaces dans un certain nombre de cas.

Notes des éditeurs

1 — On ne distingue pas deux noeuds qui pourraient être superposés par des mouvements dans l'espace. Pour le dessin d'un nœud, on s'arrange, en bougeant un peu la corde au besoin, pour éviter les croisements "multiples" (superposition de plus de deux bouts de corde) et on indique pour chaque croisement ce qui est au dessus et ce qui est au dessous, est appelé, dans cet article, *représentation graphique* du nœud (les mathématiciens parlent de *diagramme* du nœud).

2 — Nous avons simplifiée la notation des auteurs (qui était N= (A/1);(B/0);(C/0);(C/1);(B/1);…;(A/0)) pour la "caractérisation" (les mathématiciens parlent de *code de Gauss*) d'un nœud. Dans un tel code chaque lettre apparaît deux fois exactement, une fois avec 0, une fois avec 1.

3 — Un noeud est *irréductible* s'il ne peut se transformer (par manipulation dans l'espace) en le "*nœud trivial*" (une boucle fermée sans aucun croisement). Parlant d'une variante du nœud de la figure 8, où les états du croisement C sont inversés, et où la simplification aboutit à C/0,H/1,I/0, C/1,H/0,I/1 les auteurs ajoutaient, sans justification : «Nous avons donc montré que ce nœud est irréductible; d'ailleurs,on peut remarquer que ce nœud simplifié nommé *nœud de trèfle* est le premier nœud irréductible que l'on puisse construire par la simple considération du nombre de croisements.» Pour deux preuves différentes de l'irréductibilité du nœud de trèfle voir ce volume pp. ??-?? et Ian Stewart, Le polynôme de Jones, *Pour la Science n°146*, décembre 1989, pp. 94-100.

4 —Les auteurs utilisaient les lettres A, B, C, D. Nous avons préféré des minuscules pour éviter la confusion avec les croisements déjà nommés.

5 — Une *partie* d'un nœud peut être ainsi précisément définie comme une portion de son code où les lettres qui y figurent apparaissent chacune deux fois.

6 — La multiplication d'une expression de la forme $a+b\sqrt{c}$ par l'*expression conjuguée* $a-b\sqrt{c}$ est utilisé lors de calcul de limites pour certaines fonctions.

7— Au cours de la transformation, d'autres éléments de la caractérisation changent de place : A/1 va occuper la place de B/0, qui, lui, va occuper l'emplacement où se trouvait C/1.

8 —Nous avons rétabli la convention usuelle ("règle du tire-bouchon") que les auteurs avaient inversée.

9 — Pour un nœud donné, la valeur de $\sum$ peut se calculer à partir d'une caractérisation particulière.

10 — Pour établir ce résultat, il faudrait démontrer que la valeur de $\sum$ ne change pas lorsqu'on change de représentation graphique, autrement dit que $\sum$ est un "*invariant*" (cf. pp. ??-??). Ici les auteurs ont seulement vérifié cette "*invariance*" pour les mouvements qu'ils ont introduits.

11 — Prouver que (b) ne se défait pas n'est pas une mince affaire ...

12 — Le problème est de savoir à quelles conditions une écriture du type A/1, B/0, … est effectivement le code d'un certain nœud.

13 — Pour en savoir plus : A. Sossinski, *Nœuds ; genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, Paris, 1999. *Les nœuds*, Dossier Pour la Science. Belin, 1999 ??