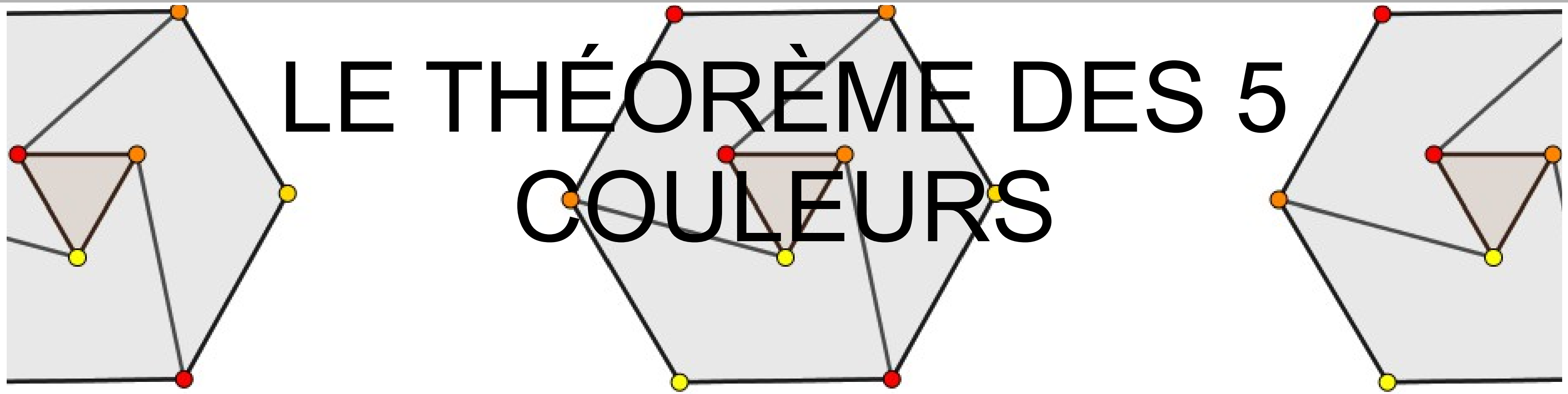


LE THÉORÈME DES 5 COULEURS

Diduan Le Blay (élève de 4ème), Nouara Mézine, Eugénie Vicq et Elias Ricaud (élèves de 3ème)

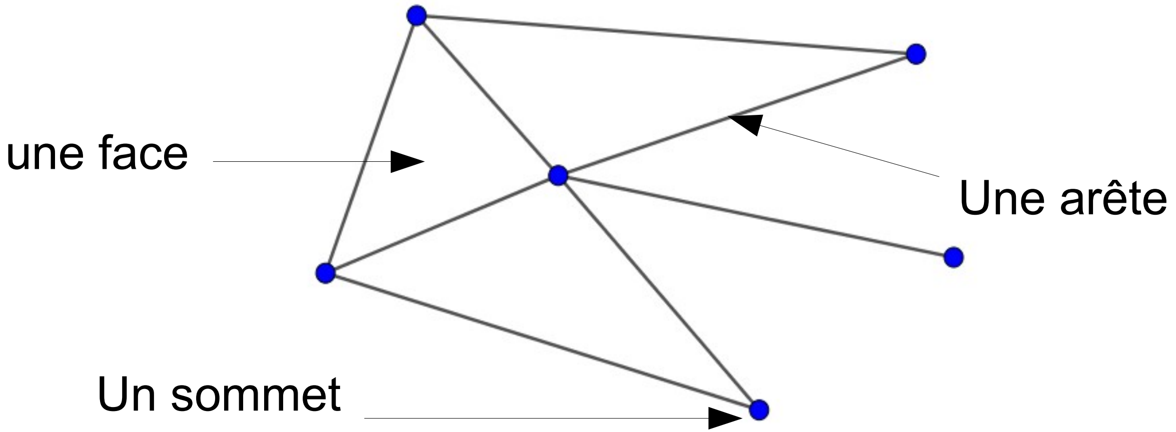
Collège Alain-Fournier, Orsay (91)

Encadrés par : Florence Derry et Claudie Asselin-Missenard

Chercheur : Raphaël Tinarrage (Université Paris Sud)

SUJET

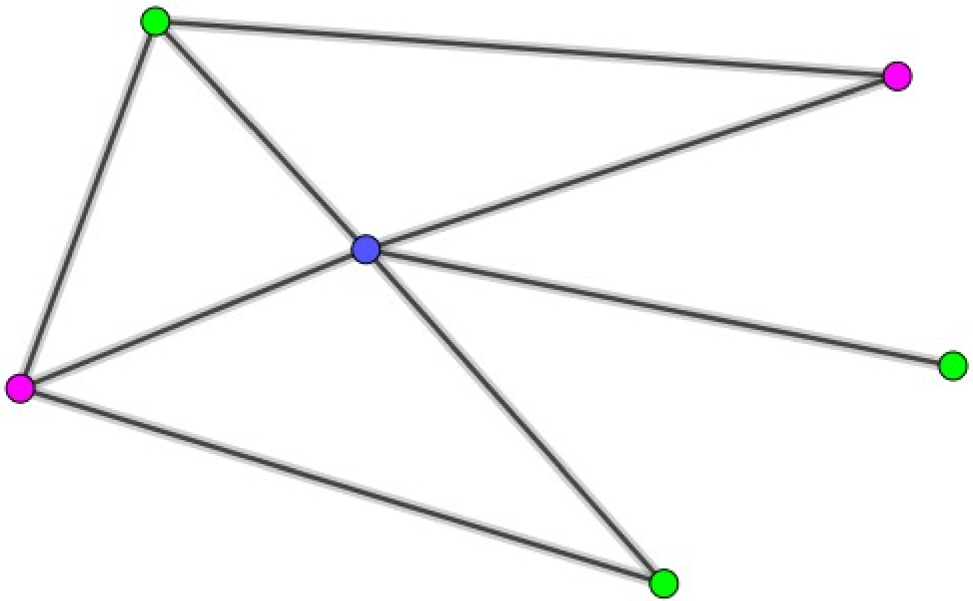
Un graphe planaire est obtenu de la façon suivante : on choisit des points du plan appelés les sommets. On choisit de relier des points distincts par des segments, appelés arêtes, telles qu'elles ne s'intersectent pas.

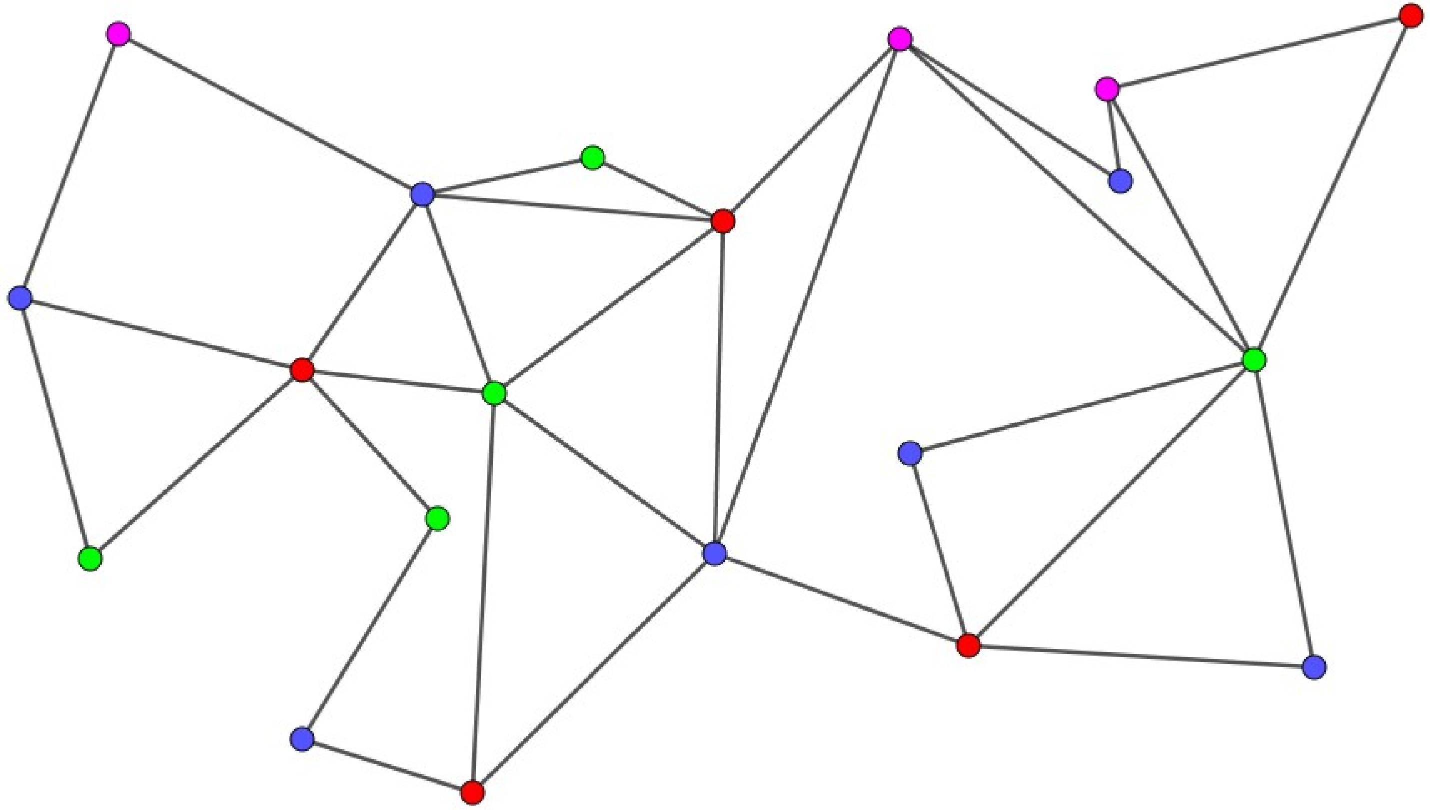


Colorier un graphe c’est :
- attribuer à chaque sommet du graphe une couleur
- deux sommets reliés sont de couleurs différentes.

Étant donné un graphe planaire, est-il possible de le colorier avec 5 couleurs ?

EXEMPLES





Notations

Dans la suite, on notera :

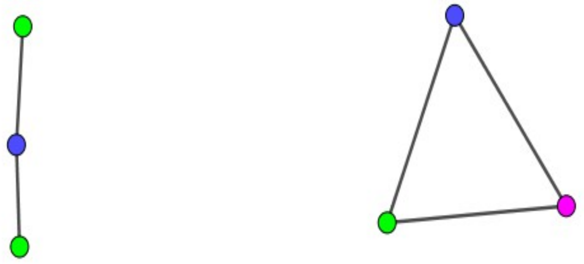
- S le nombre de sommets
- F le nombre de faces
- A le nombre d'arêtes

DÉBUT DES RECHERCHES

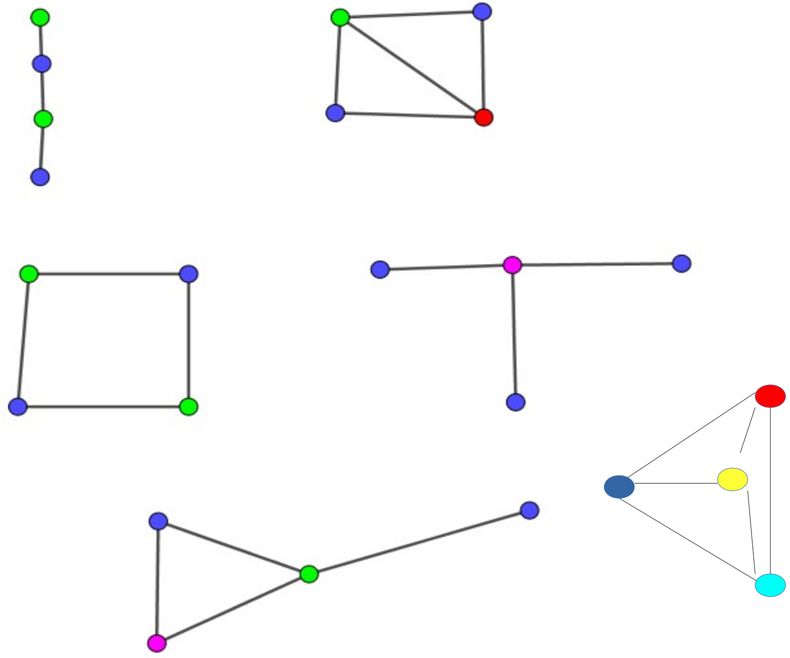
Nous avons commencé par chercher tous les graphes à 2, 3, 4 sommets etc...

<u>Graphe S = 2</u>

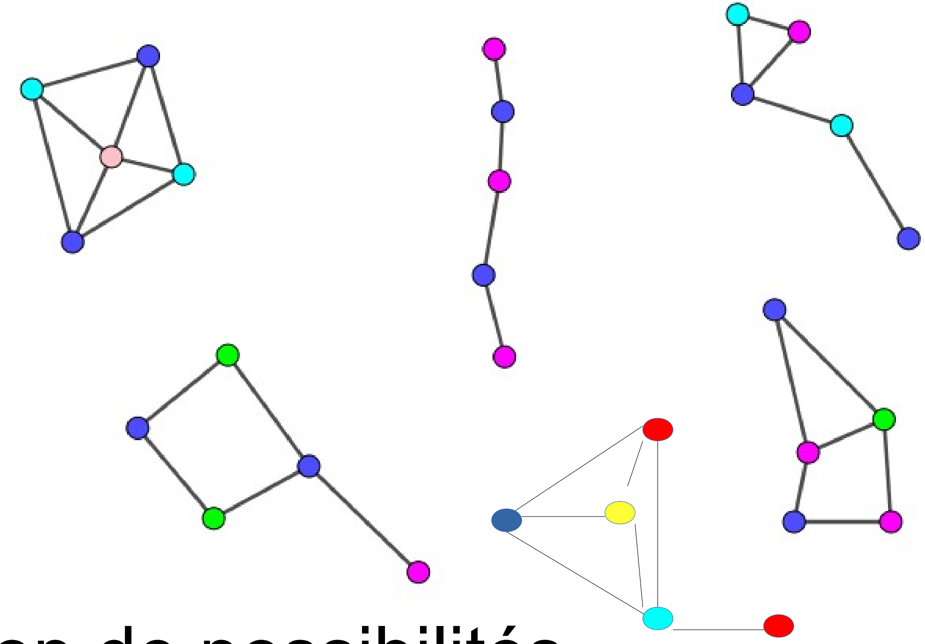
<u>Graphes S = 3</u>



Graphes S=4



Graphes S=5



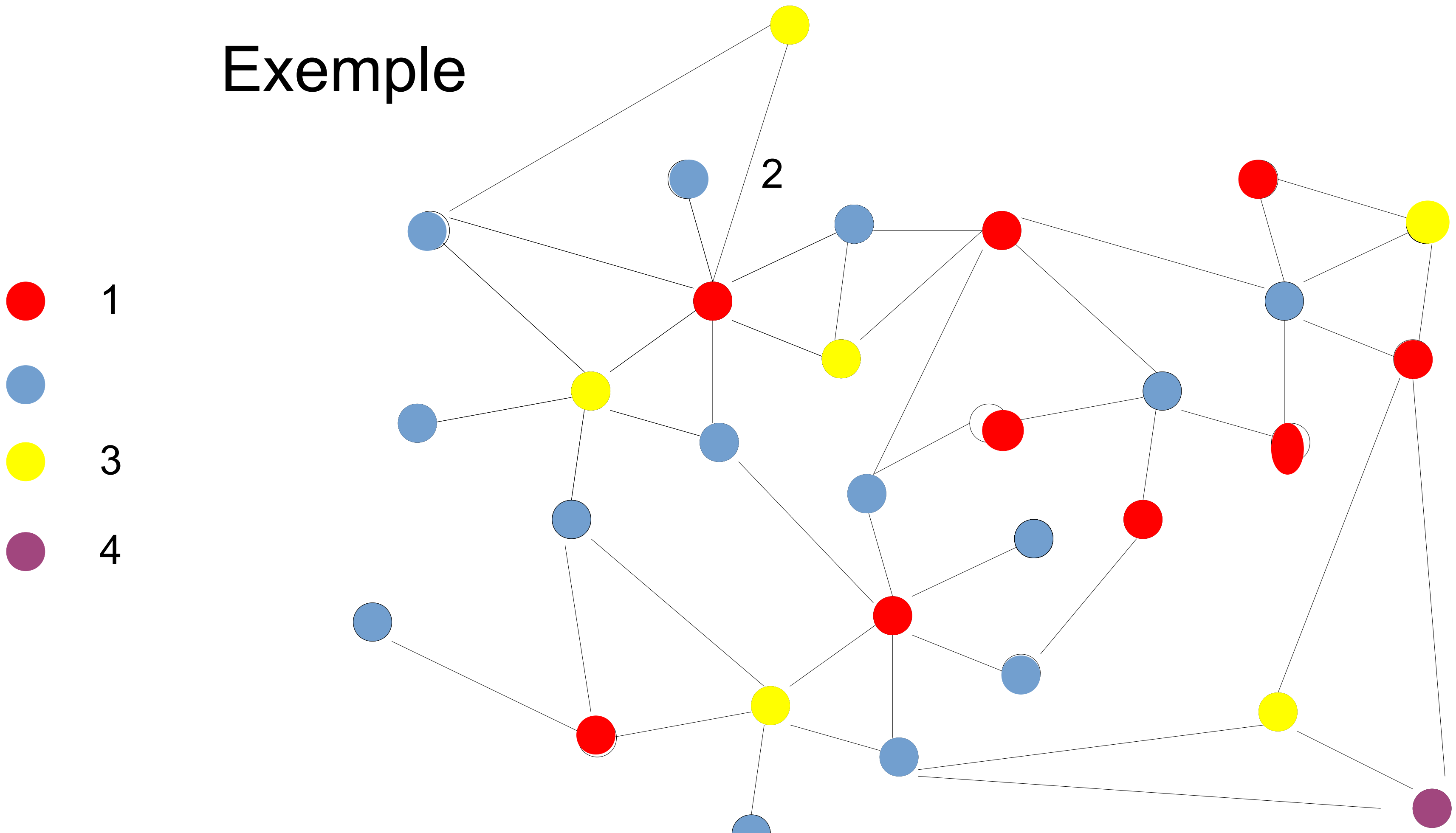
Arrêt à 5 sommets → trop de possibilités.

Première technique de coloriage (1)

On prend un graphe à S sommets.

- On prend le sommet qui a le plus d'arêtes et on le colorie
 en premier.
- Ensuite, on colorie de proche en proche.

Exemple



CONJECTURE

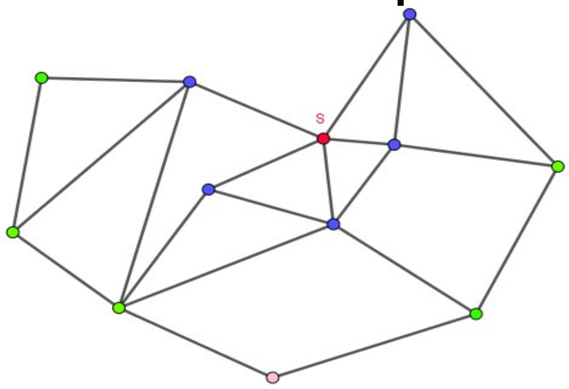
Après plusieurs exemples : 4 couleurs semblent suffir.

Notre chercheur nous a dit que ce résultat est vrai mais trop dur à démontrer pour nous.
Il nous a demandé d’essayer de démontrer que tout graphe est coloriable en 6 puis 5 couleurs.

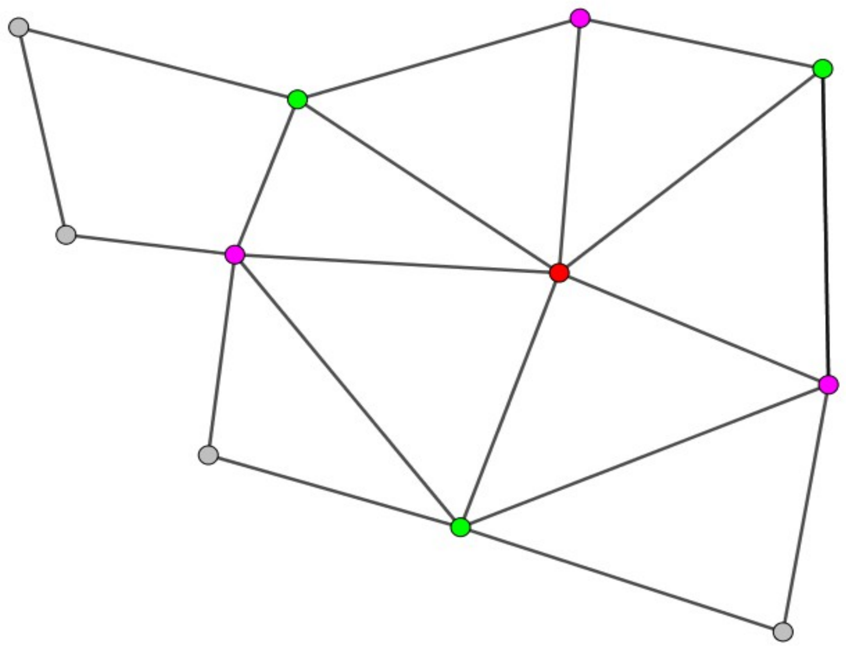
On va tout d'abord expliquer pourquoi 6 couleurs suffisent.

L'idée du coloriage par couronnes

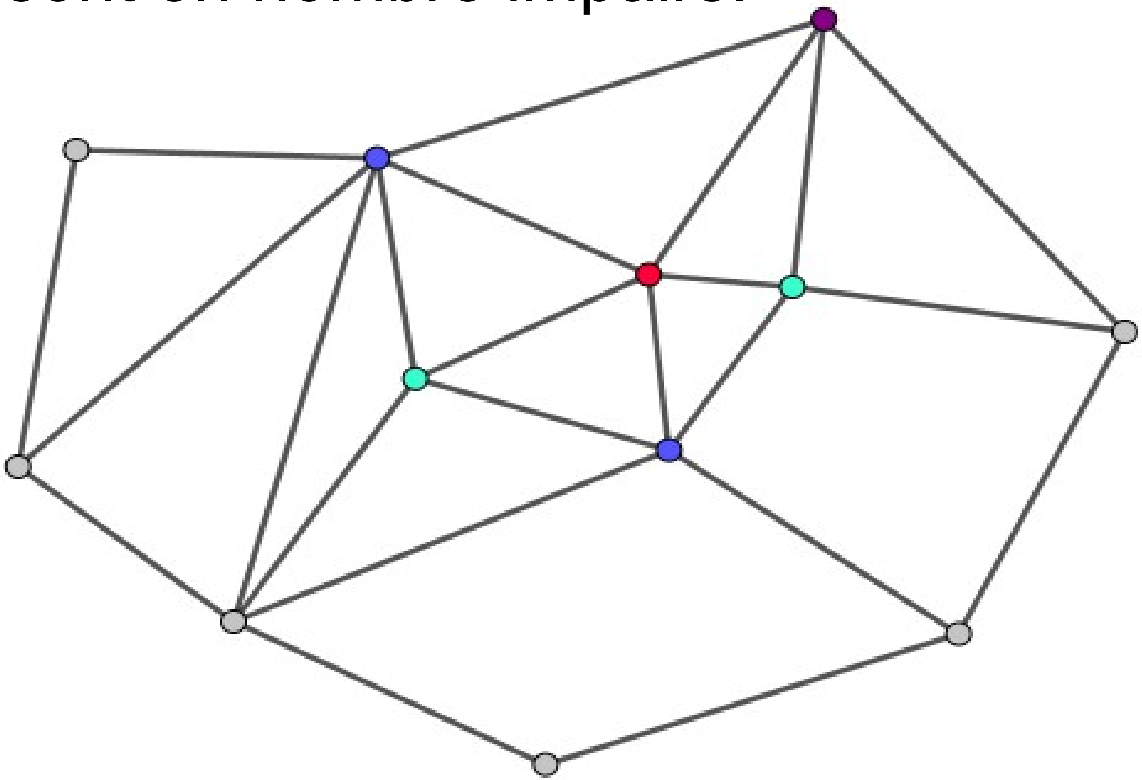
On choisi un point S sur un graphe. La première couronne correspond à tous les points situés à distance 1 arête du point S (c'est à dire que le plus court chemin pour aller à S ne comporte qu'une arête). La deuxième couronne correspond à tous les points situés à distance 2 arêtes du point S.



Pour colorier la première couronne, on peut toujours alterner deux couleurs si les sommets sont en nombre pair.



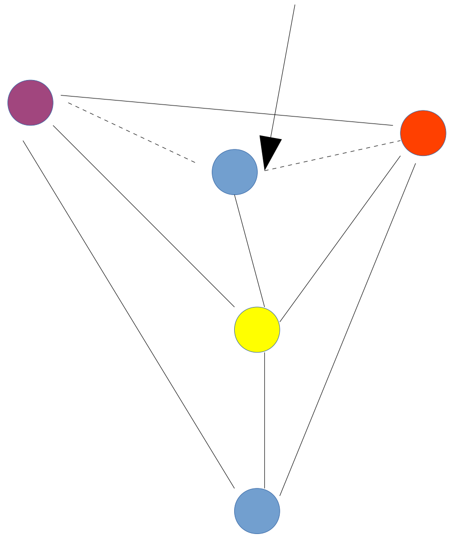
Ou 3 s’ils sont en nombre impairs.



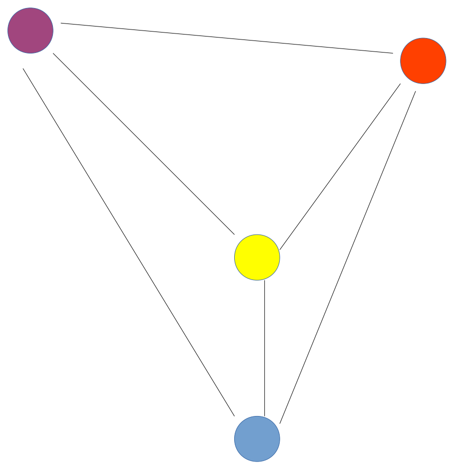
Pour comprendre pourquoi il suffit de 3 couleurs maximum pour la colorier la première couronne, il faut comprendre qu'aucun sommet de la première couronne ne peut être relié à plus de 2 sommets de cette couronne.

C'est lié au fait que les arêtes ne peuvent se croiser.

Prenons ce sommet-là par exemple :

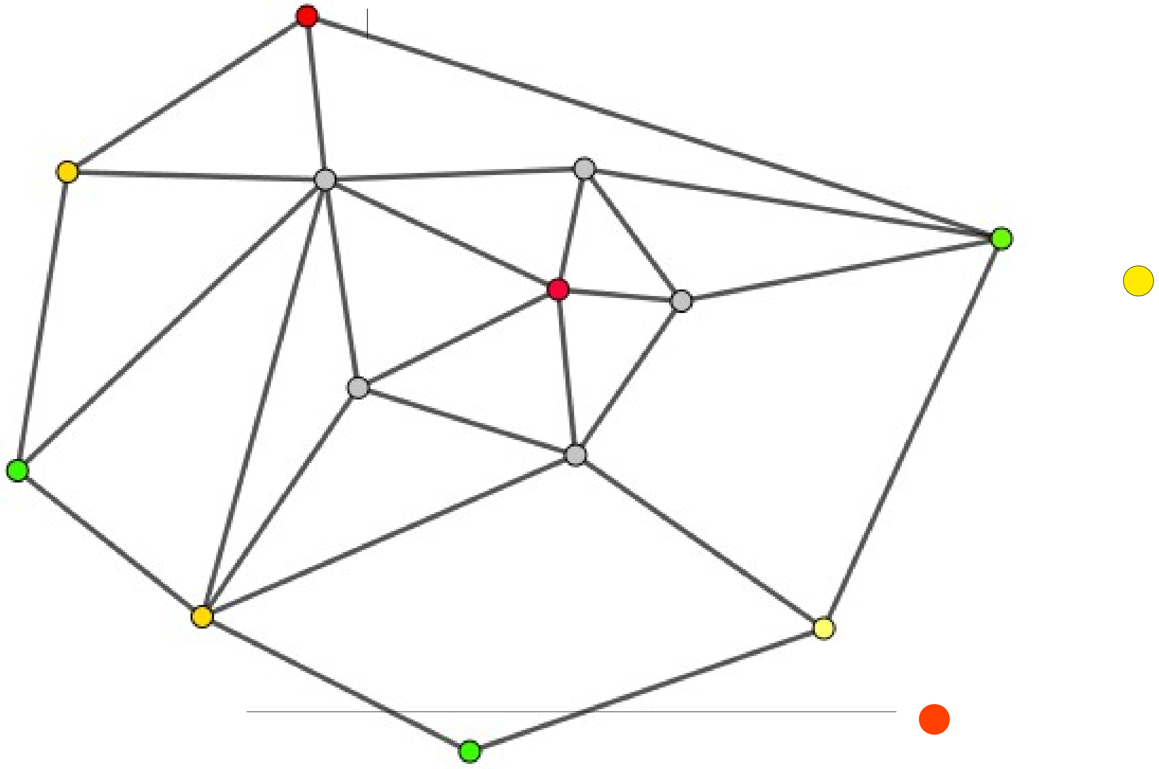


Il peut être relié à deux des sommets de la 1ère couronne(2)   mais pas à un troisième puisque les arêtes ne se coupent pas. On peut donc lui mettre la couleur que ne possède pas ces 2 voisins.



C'est ainsi qu'il suffit de 4 couleurs maximum pour colorier le sommet choisi au départ et sa première couronne.

Pour colorier la deuxième couronne, on peut faire le même raisonnement, il faudra au plus trois couleurs.

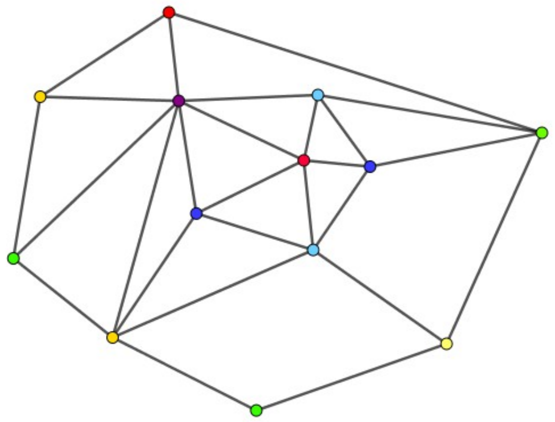


Donc on a :

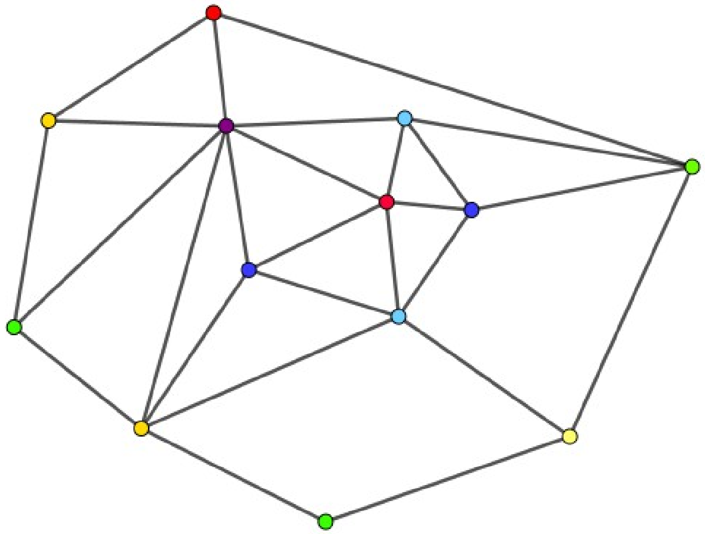
- 1 couleur pour le point initial
- 3 couleurs maximum pour la 1 couronne
- 3 couleurs maximum pour la deuxième couronne dont celle du centre donc 2 couleurs supplémentaires.

Total : 1 + 3 + 2 = 6 couleurs

Pour les couronnes suivantes, on va utiliser alternativement les couleurs de la couronne 1 et de la couronne 2.



On a donc senti ainsi avec le coloriage par couronnes pourquoi tous les graphes peuvent être coloriés avec 6 couleurs.



Tentative de démonstration

Nous avons besoin de plusieurs résultats préalables.

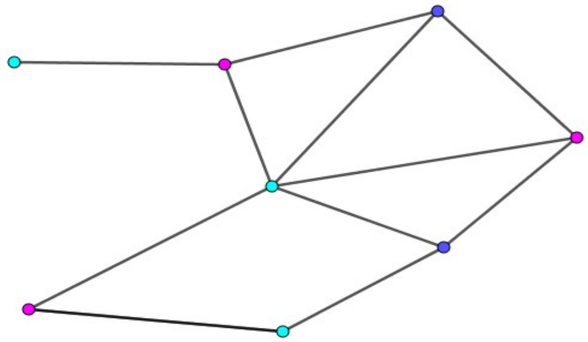
1^{er} résultat : La formule d'Euler

(démontrée l'an dernier par des camarades de MEJ)

Dans un graphe, il y a une relation entre le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets :

$$F - A + S = 1$$

Exemple :
4 faces, 11 arêtes, 8 sommets
$4 - 11 + 8 = 1$



2ème résultat : Lemme

Dans un graphe planaire, il existe un sommet qui a au plus 5 voisins.

<u>Démonstration du lemme par l'absurde</u>
On suppose que tous les sommets ont au moins 6 voisins.

- Donc $A \geq 6 \times S$
- Mais comme une arête joint 2 sommets, on divise le résultat par 2.

$$A \geq \frac{6 \times S}{2}$$

$$A \geq 3 \times S \quad (*)$$

- Chaque face est définie par au moins 3 arêtes.

Donc

$$F \leq \frac{A}{3}$$

X 3 X 3

$$3 \times F \leq A$$

Chaque arête sépare au plus 2 faces.

$$A \geq \frac{F \times 3}{2}$$

X 2 X 2

$$2 \times A \geq F \times 3$$

: 3 : 3

$$\frac{2 \times A}{3} \geq F \text{ (**)}$$

$$S+F\leq\frac{2\times A}{3}+\frac{A}{3}$$

- On a : $A\geq 3\times S$ (*) et $\frac{2\times A}{3}\geq F$ (**)
- Formule d'Euler : F – A + S = 1
- F – A + S + A = 1 + A
- F + S = 1 + A (***)
- (*)(**)

$$S+F\leq\frac{3\times A}{3}$$

$$S+F\leq A$$

(***)

$$1+A\leq A$$

$$1+A-A\leq A-A$$

$$1\leq 0$$

C'est absurde !!!

Notre supposition est donc fausse et le lemme est démontré.

Définition : Un sous graphe est une partie d'un graphe.

Démontrons maintenant qu’un graphe est 6-coloriable.

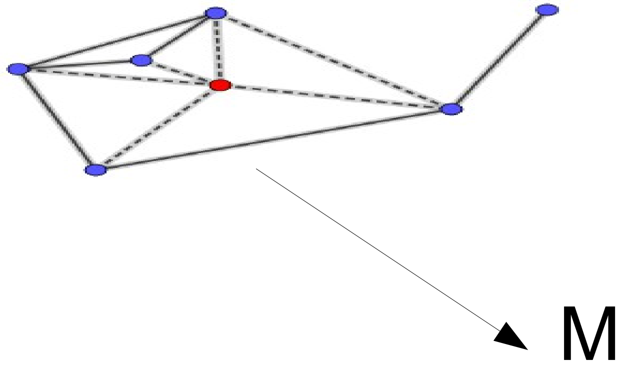
Démonstration par l'absurde

On suppose qu’il existe un graphe G : le plus petit des graphes non coloriables en 6 couleurs.

Donc tout sous-graphe de G est coloriable par 6 couleurs.

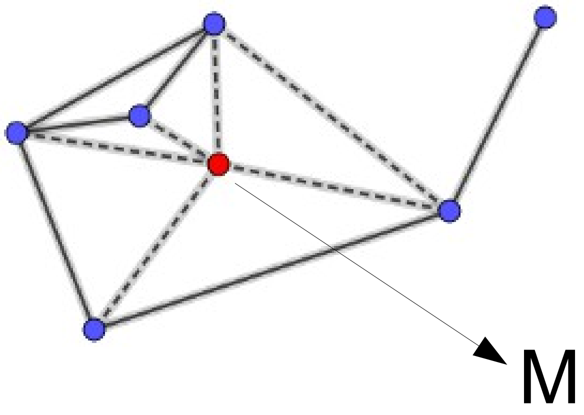
On repère un point M qui a 5 voisins maximum dont parle le lemme.

On enlève ce point M et les arêtes qui y sont attachées. On obtient alors G' un sous-graphe de G. Comme G' est plus petit que G et qu'on a supposé que G est le plus petit graphe non 6 coloriable alors G', lui, est 6 coloriable.

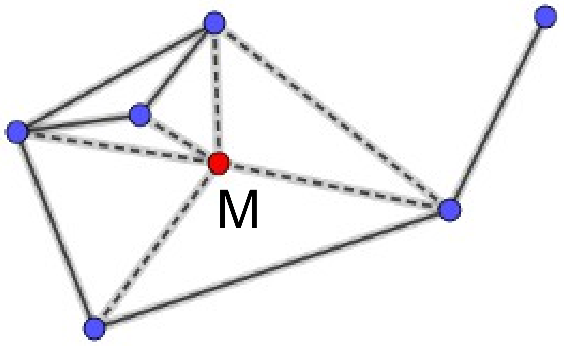


On colorie donc G’ avec les 6 couleurs (en bleu ici) et on rajoute le point M avec ses 5 voisins maximum.

On colorie alors M avec la couleur qui n'est pas présente sur ses 5 voisins.



On obtient alors G, qui est ainsi colorié en 6 couleurs ce qui contredit notre hypothèse de départ :
« G est le plus petit graphe non 6 coloriable »



Conclusion

Tous les graphes sont 6 coloriables !

Démontrons maintenant que tous les graphes sont 5 coloriables

Nous avons besoin d’un deuxième lemme :

Dans un graphe planaire, il existe un sommet qui a au plus 5 voisins (lemme 1) et 4 couleurs suffisent à colorier ce sommet et ses 5 voisins (lemme 2)

(*Démonstration du lemme 2 à voir en annexe*).

Supposons qu'il existe un graphe A non 5 coloriable, et prenons G le plus petit des graphes non 5 coloriable.

On repère le point M ayant au plus 5 voisins, il existe d'après le lemme. (3)

On enlève ce point M de G avec les arêtes qui y sont reliées; on obtient G' qui lui est 5 coloriable puisqu'il est plus petit que G.

Dans ces 5 points il n'y a que 4 couleurs nécessaires (Lemme 2) .

Donc on ajoute le point M à G' avec la 5e couleur non utilisée parmi ses 5 voisins et G devient 5 coloriable !

→

Contradictoire.

Donc tous les graphes sont 5 coloriables.

Fin

Notes d'édition

(1) On aurait pu mettre en valeur sur le graphe e sommet de départ utilisé pour le coloriage.

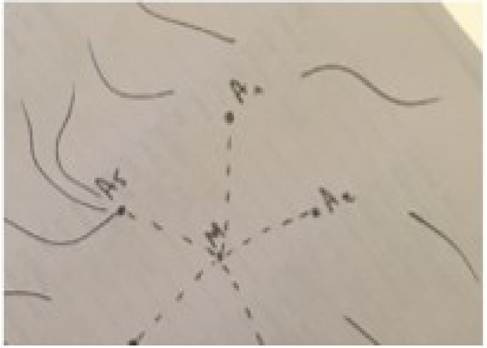
(2) On aurait pu préciser la première couronne de quel sommet**.**

(3) On aurait dû dire plutôt : « On repère un point M ayant au plus 5 voisins,un tel point existe d'après le premier lemme. ».

Annexe

Lemme 2 : les 5 points reliés au sommet M peuvent être coloriés en 4 couleurs.

Démonstration.
On reprend les notations des diapos précédentes.
On commence par 5-colorier G’ ce qui est possible car G’ est un sous graphe de G qui est le plus petit graphe non coloriable par 5 couleurs.



On nomme les points reliés à M, A1, A2, A3, A4 et A5 dans cet ordre.
On regarde A1 et A3.
- S’ils ont la même couleur alors on a gagné (puisqu’il ne reste que 3 points autour de M, on peut utiliser 3 couleurs différentes de celles de A1 et A3 pour les colorier).

- S’ils ne sont pas de la même couleur, on regarde G’’ le sous graphe de G’ qui ne contient que des points de la couleur de A1 ou A3 .
- Si A1 et A3 ne sont pas connectés alors on inverse les couleurs de A3 et des points connectés à lui. On a gagné.
- Si A1 et A3 sont connectés on a un chemin de couleurs A ; A ; B ; A ; B ; A ; B ; A ; B...
On regarde alors A2 et A4. On suppose qu’ils sont de couleurs différentes entre eux et avec les autres points. On prend G’’’ un sous graphe de G’ qui comporte seulement les points de la couleur de A2 et A4.

Si les deux points ne sont pas connectés, on inverse les couleurs de A4 et de ceux avec qui il est relié comme on a fait avec G’’. On a gagné.

Si les deux points sont reliés alors il y a contradiction car A1 et A3 sont aussi reliés entre eux. Or les deux chemins ne peuvent pas se croiser sinon on ajoute un sommet au croisement et A1 et A3 ne sont alors plus reliés. Les points A1 et A3 ne peuvent pas être reliés en même temps que A2 et A4. On peut donc inverser les couleurs d’un des points et de ceux qui sont reliés à lui. On a gagné.