« Drôles d'arbres »

Année 2017-2018

Sandra Michaud et Laura Fernandes élèves de 2nde .

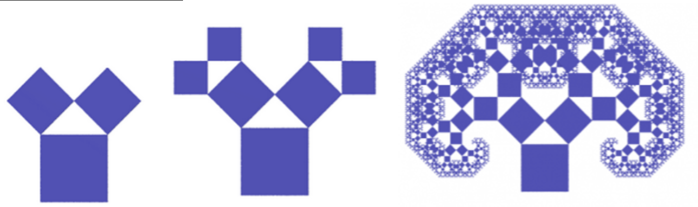
Encadrées par Mme Gotte et Mme Martinelli Bousquet

Lycée Jean Puy à Roanne (42300)

Chercheur : M. Chardard (Jean Monnet, St Etienne)

1. Présentation du sujet

Voici le sujet proposé par notre chercheur :



On construit un arbre en partant d'un carré. On trace ensuite un triangle isocèle rectangle sur le haut du carré puis on ajoute deux carrés à l'arbre en partant de ce triangle.

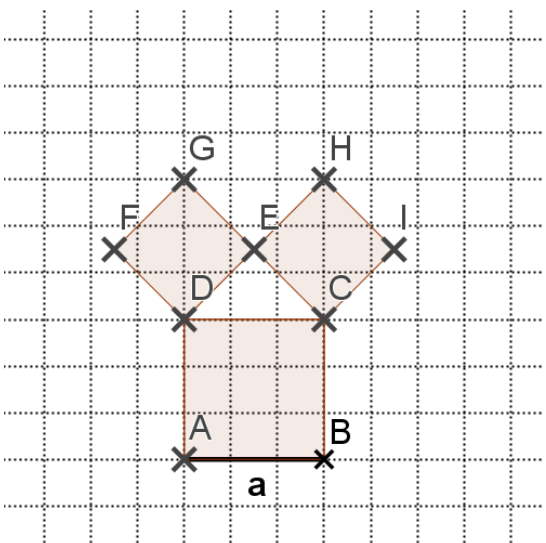
- Quelle aire est ajoutée à chaque étape ?
- Quel périmètre est ajouté à chaque étape ?
- Y a-t-il des carrés de cet arbre qui se chevauchent ?

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

On a démontré que l'aire ajoutée lorsque l'arbre gagne un étage est égale à l'aire du carré de base : a^2 et nous avons également démontré que le périmètre ajouté lorsque l'arbre gagne un étage n°k est égale à $2^{k-1} \times 4 \times \frac{a}{(\sqrt{2})^{k-1}}$. (1)

3. Texte de l'article

Etape n°1 Construction de l'arbre « à la main »



Pour construire « à la main » un arbre en suivant le programme de construction donné par le chercheur, on procède comme suivant :1- On construit un carré ABCD dont la base [AB] mesure la longueur que l'on veut : a cm

2- On construit un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse [DC].

Pour cela on utilise les arcs de cercles de centre C et de centre D et de rayon $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Leur point d'intersection E est le 3ième sommet du triangle.

3- On construit ensuite deux carrés dont les côtés ont pour longueur $\frac{a}{\sqrt{2}}$ sur les côtés du triangle DEC .

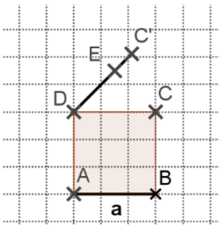
4- On recommence ensuite le protocole de construction. (2)

Etape n°2 Construction de l'arbre « à l'aide d'un logiciel »

On a ensuite souhaité construire cet arbre à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique : Géogébra. On a alors procédé comme suivant :

1) On construit les deux « premiers étages » (le premier carré suivi des deux suivants) de l'arbre en suivant les consignes ci-dessous :

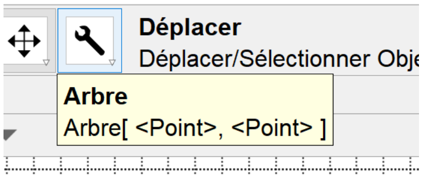
- On construit un *segment de longueur donnée* à l'aide d'un *curseur a*.
- On construit un *polygone régulier à quatre côté* à partir du segment [AB] ;

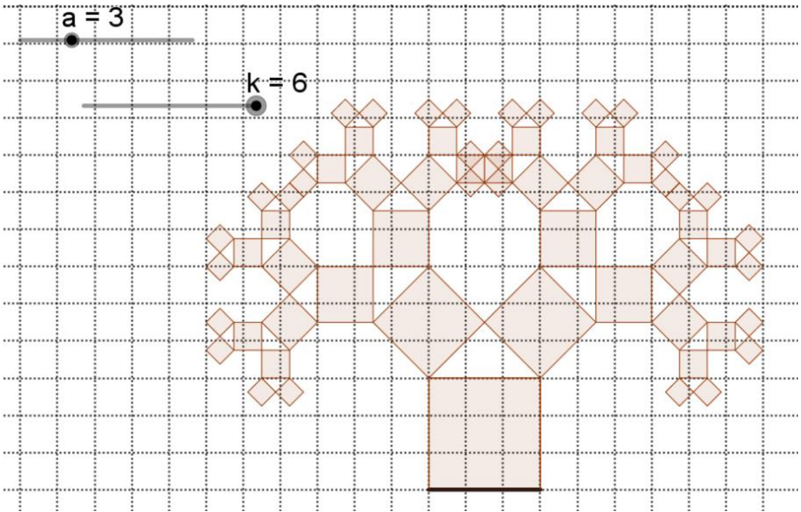


- Pour construire le triangle rectangle isocèle DCE et afin d'automatiser la construction des carrés par la suite, nous avons utilisé l'aide d'un professeur.

On construit d'abord C' l'image de C par la rotation de centre D et d'angle 45°, puis E l'image de C' par l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Pour ne pas répéter la construction précédente un très grand nombre de fois, *on crée un « Outil Arbre »* à l'aide du logiciel.
Les objets initiaux sont les points D et C et les objets finaux, les polygones DEFG, CEHI et les points E,F,G,H et I.
On nomme l'outil puis on appuie sur « fin ».

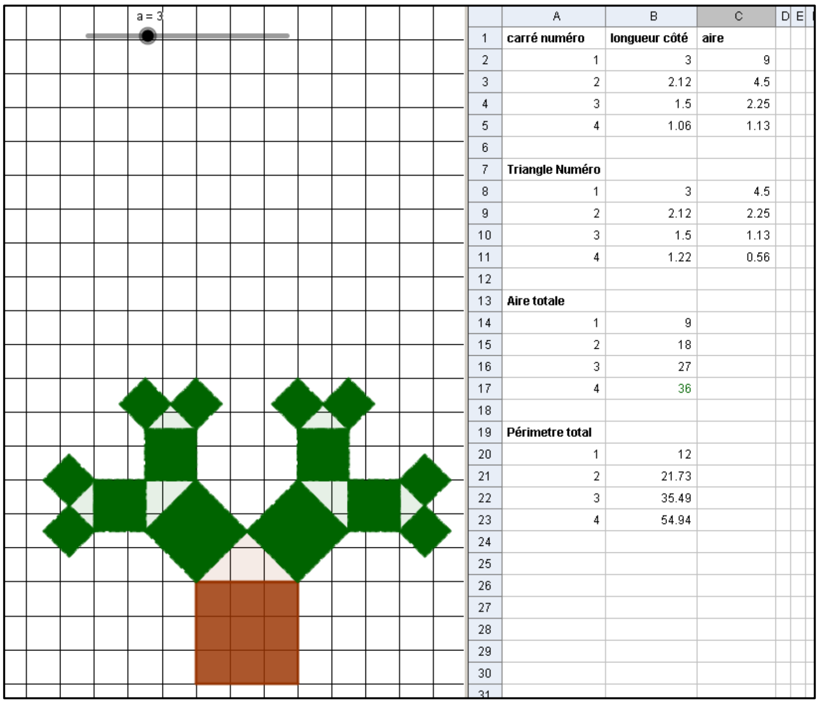




Grâce à cet outil nous avons construit un fichier « Arbre dynamique étages.ggb » qui permet de construire un arbre à k étages (k étant un entier entre 0 et 6) de base a (a étant un décimal entre 0 et 10) (3)

Etape 3 : Conjectures des propriétés géométriques

Partie 1 :



	A	B	C
1	carré numéro	longueur côté	aire
2	1	3	9
3	2	2.12	4.5
4	3	1.5	2.25
5	4	1.06	1.13
6			
7	Triangle Numéro		
8	1	3	4.5
9	2	2.12	2.25
10	3	1.5	1.13
11	4	1.22	0.56
12			
13	Aire totale		
14	1	9	
15	2	18	
16	3	27	
17	4	36	
18			
19	Périmetre total		
20	1	12	
21	2	21.73	
22	3	35.49	
23	4	54.94	

Nous avons réalisé un fichier Géogébra avec :

1) Une figure dynamique qui donne le début de la construction de l'arbre et pour laquelle on peut faire varier la longueur a du côté du premier carré à l'aide d'un curseur.

2) Une partie « tableur » comme ci-contre
Les cellules dans les colonnes B et C ont été remplies **<u>à l'aide de formules :</u>**

On tape :
En B2 : = a

En B3 = B2/sqrt(2)

En C2 : a^2

En C3 : =B3^2

<u>L'aire totale</u> désigne la somme <u>des aires des carrés</u> construits.

En B14 : = C2 ; En B15 :=B14+2*C3

En B16 :=B15+4*C4

A l'aide de ce fichier nous avons conjecturé que l'aire ajoutée lorsque l'arbre gagne un étage est égale à l'aire du carré de base : a^2.

Partie 2 :

Nous avons complété notre fichier Géogébra avec :

La longueur du côté du triangle qui est donnée est celle de l'hypoténuse.

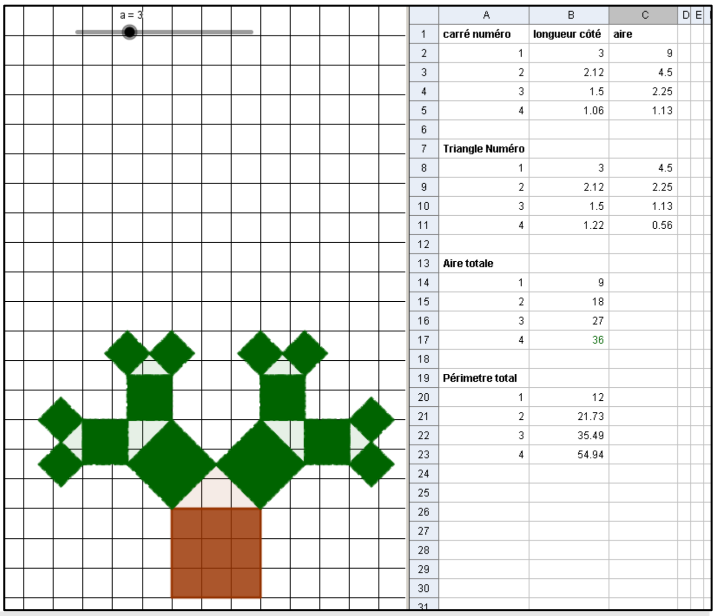
Les cellules sont remplies **<u>à l'aide de nouvelles formules,</u>** on tape :
En B8 : =a

En C8 : =a^2/2 *Non utilisé par la suite*

En B9 : =B8/sqrt(2)

En C9 : =B9^2 /2 *Non utilisé par la suite*

<u>Le périmètre total</u> de l'arbre est obtenu en ajoutant les longueurs de tous les côtés de tous les carrés construits.



	A	B	C
1	carré numéro	longueur côté	aire
2	1	3	9
3	2	2.12	4.5
4	3	1.5	2.25
5	4	1.06	1.13
6			
7	Triangle Numéro		
8	1	3	4.5
9	2	2.12	2.25
10	3	1.5	1.13
11	4	1.22	0.56
12			
13	Aire totale		
14	1	9	
15	2	18	
16	3	27	
17	4	36	
18			
19	Périmetre total		
20	1	12	
21	2	21.73	
22	3	35.49	
23	4	54.94	

En B20 : = 4*a

En B21 : = B20+2*4*B3

En B22 : = B21+4*4*B4

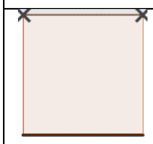
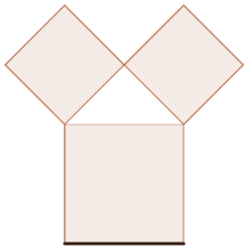
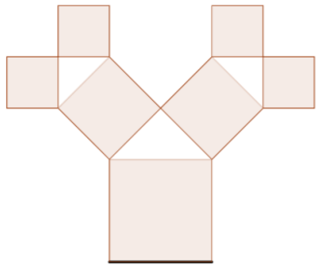
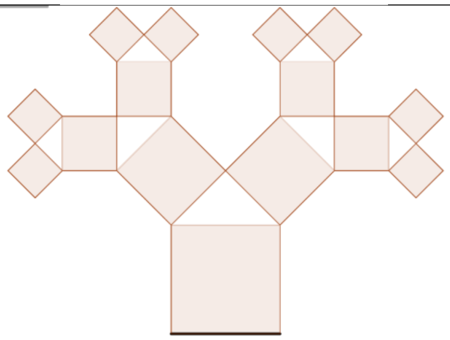
En B23 : = B22+8*4*B5

Nous ne sommes pas parvenues à conjecturer une formule qui donnerait le périmètre ajouté lorsque l'arbre gagne un étage…

Etape 4 : Démonstrations

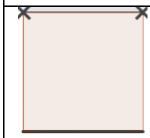
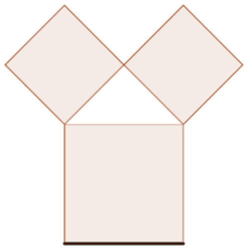
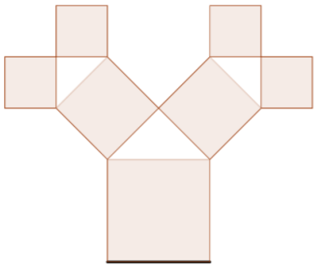
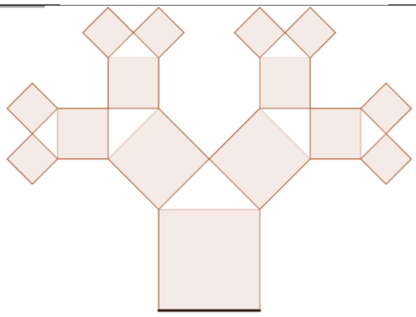
Nous avons cherché à démontrer algébriquement notre conjecture concernant l'aire totale d'un arbre :
Il nous semblait que l'aire ajoutée lorsque l'arbre gagne un étage est égale à l'aire du carré de base : a².

Tableau des aires :

	Etape n°	Aire totale
 côté de longueur a	1	a^2
	2	Aire carré n°1 $A_1 = a^2$ Aire d'un carré n°2 $A_2 = (\frac{a}{\sqrt{2}})^2 = \frac{a^2}{2}$ Aire de deux carrés n°2 $2xA_2 = 2x\,\frac{a^2}{2} = a^2$ Aire totale $A_1+2xA_2 = a^2 + a^2 = 2a^2$
	3	Aire d'un carré n°3 $A_3 = (\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ Aire de quatre carrés n°3 $4xA_3 = 4x\,\frac{a^2}{4} = a^2$ Aire totale $A_1+2xA_2+4xA_3 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$
	4	Aire d'un carré n°4 $A_4 = (\frac{a}{(\sqrt{2})^3})^2 = \frac{a^2}{4\times 2} = \frac{a^2}{8}$ Aire de 2^3 carrés n°4 $8xA_4 = 8x\,\frac{a^2}{8} = a^2$ Aire totale $4a^2$
……	k	Aire d'un carré n°k $A_k = (\frac{a}{(\sqrt{2})^{k-1}})^2 = \frac{a^2}{(\sqrt{2})^{2(k-1)}} = \frac{a^2}{2^{k-1}}$ Aire de 2^{k-1} carrés n°k $2^{k-1}\,xA_k = 2^{k-1}x\,\frac{a^2}{2^{k-1}} = a^2$ Ainsi l'aire ajoutée quel que soit l'étage considéré sera a².

On a démontré que l'aire ajoutée lorsque l'arbre gagne un étage est égale à l'aire du carré de base : a^2.

Tableau des périmètres :

	Etape n°	périmètre total
 côté de longueur a	1	4a
	2	Côté d'un carré n°2 $C_2=\frac{a}{\sqrt{2}}$ Périmètre de 2 carrés n°2 2 x4xC_2= 2 x4x$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{8a}{\sqrt{2}}$ Ainsi le périmètre total sera : 4a + $\frac{8a}{\sqrt{2}}$
	3	Côté d'un carré n°3 $C_3=\frac{a}{2}$ Périmètre de 2^2 carrés n°3 2^2 x4xC_3= 4 x4x$\frac{a}{2} = 8a$ Ainsi le périmètre total sera : 4a + $\frac{8a}{\sqrt{2}}$ +8a = 16a+$\frac{8a}{\sqrt{2}}$
	4	Côté d'un carré n°4 $C_4=\frac{a}{(\sqrt{2})^3}$ Périmètre de 2^3 carrés n°4 2^3 x4xC_4= 8x4x$\frac{a}{(\sqrt{2})^3} = \frac{16a}{\sqrt{2}}$ Ainsi le périmètre total sera : 16a+$\frac{8a}{\sqrt{2}}$ +$\frac{16a}{\sqrt{2}}$ $=$ 16a+$\frac{24a}{\sqrt{2}}$
----------	k	Côté d'un carré n°k $C_4=\frac{a}{(\sqrt{2})^{k-1}}$ Périmètre de 2^{k-1} carrés n°k : 2^{k-1} x4xC_k= 2^{k-1}x4x$\frac{a}{(\sqrt{2})^{k-1}}$ Ainsi l'aire ajouté par l'étage k sera 2^{k-1}x4x$\frac{a}{(\sqrt{2})^{k-1}}$

On a démontré que le périmètre ajouté lorsque l'arbre gagne un étage n°k est égale à 2^{k-1}x4x$\frac{a}{(\sqrt{2})^{k-1}}$ (4)

4. Conclusion

Nous n'avons pas eu le temps d'étudier la dernière question : Y-a-t-il des carrés de cet arbre qui se chevauchent, néanmoins nous sommes satisfaites d'avoir pu mener des recherches dans le cadre de cet atelier cette année. Nous remercions nos professeurs et M. Chardard de nous avoir accompagnées et encouragées.

Notes d'édition

(1) Dans l'annonce des résultats obtenus, la formule du périmètre ajouté à un étage k peut se simplifier en $4a\sqrt{2}^{k-1}$. Même si cela n'est pas énoncé explicitement, il est bien entendu que la longueur d'un côté du carré initial est égal à a.

(2) Dans la partie « Construction de l'arbre à la main » (on pourrait aussi dire « à la règle et au compas »), on peut démontrer que la longueur d'un côté des 2 carrés à dessiner est de $a/\sqrt{2}$ en utilisant le théorème de Pythagore : en effet le triangle DCE étant isocèle et rectangle en E, en notant x la longueur de DE et de EC, et en se rappelant que la longueur de DC est égale à a, on a $x^2 + x^2 = a^2$, ce qui s'écrit aussi $2x^2 = a^2$, ou encore que $x = a/\sqrt{2}$. Pour pouvoir tracer un cercle de rayon $a/\sqrt{2}$ et de centre successivement D et C, on peut tracer les diagonales du carré ABCD, qui se coupent en un point O (le centre du carré). Il est facile de montrer (à l'aide du théorème de Pythagore) que les longueurs DO et CO sont toutes deux égales à $a/\sqrt{2}$. Donc en mettant la pointe du compas en D (puis en C) et le crayon en O, on obtient ce que l'on désire.

(3) On peut observer dans cette figure qu'il y a un chevauchement des carrés dès que $k = 6$, ce qui répond à l'une des questions du chercheur.

(4) Dans cette étape 4, il manque quelques justifications :
il n'est pas montré qu'il y a $k = 6$ nouveaux carrés à l'étape k. De plus, une vraie démonstration s'appuierait sur un raisonnement par récurrence, certes inconnu au niveau d'élèves de seconde (on montre que cela est vrai pour $k = 1$, puis on montre que si la formule est vraie à l'étape k, alors elle est vraie à l'étape $k + 1$).

Pour aller plus loin dans les résultats, on a donc montré que l'aire totale de l'arbre après $k$étapes est égale à$k \times a^2$, alors que le périmètre est égal à $4a \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{2}^{k-1}$. Ceci s'appelle une série géométrique de raison $\sqrt{2}$et de premier terme $4a$. On peut alors montrer que cette série (donc également le périmètre total) est égal à $4a\,\frac{1-\sqrt{2}^k}{1-\sqrt{2}}$, alors que le périmètre d'un carré d'aire égale à $k \times a^2$vaut $4a\sqrt{k}$.

Par exemple, pour $k = 9$et $a = 1$, le carré d'aire égale à 9 a un périmètre égal à 3, alors que l'arbre de même aire a un périmètre d'environ 208,85 ce qui est beaucoup plus long.