Growth of the crystal stones
Croissance des cristaux
2015-2016

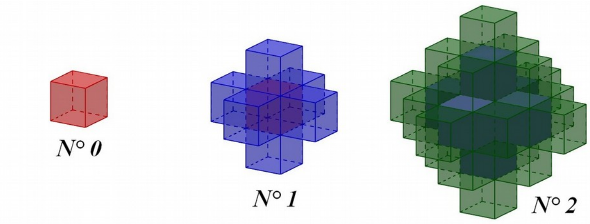
Par Chaud Lisa, Malois Laura, Afelwork Aude, Ehrentrant Julia élèves de seconde, Adisson Lucie, Gregoire Clara, Ollagnier Elise élèves de première et Gatineau Jérémy et Jalenques Nicolas, élèves de terminale au Lycée d'Altitude de Briançon.

Par Matthieu Papahagi, Denis Criste, Raluca Roman, 2nde, Diana Coroiu, Ana-Maria Ouș, 2nde Adonis Bodea, Emanuel Fărăuanu, 3e du Colégiul National Emil Racovita de Cluj (Roumanie)

Enseignantes : Valentina Vasilescu, Adrian-Vasile Andrea et Ariana-Stanca Vacaretu
Chercheuse : Adela Lupescu (Universitatea Bades-Bolyai de Cluj-Napoca)
Enseignants : Guillaume FAUX, Hubert PROAL et Mickaël LISSONDE
Chercheur : Yves PAPEGAY (INRIA-Sophia Antipolis).

Présentation du sujet

On modélise la croissance d'un cristal de la manière suivante :
En partant d'un cube (étape 0), plaçons un cube identique sur chacune de ses faces pour obtenir le « cristal » n°1 (étape 1). Puis rajoutons des cubes sur toutes les faces pour obtenir le « cristal » n°2 (étape 2) et continuons ainsi de suite.
Que pouvez-vous dire de la structure après plusieurs évolutions.



Résultats obtenus

- des formules de calcul du nombre d'unités cubiques contenues dans la structure, le nombre de faces visibles, le nombre de cubes visibles, le nombre de sommets visibles et le diamètre de la structure en fonction du nombre d'itérations. L'élaboration de ces différentes formules a été faite expérimentalement. Nous avons souvent établi les démonstrations du passage de formules récurrentes à des formules en fonctions de n.
- un algorithme écrit en utilisant la console *Python* de *Blender*, un logiciel pour réaliser des animations 3D, qui a permis de réaliser la structure pour de grandes évolutions.

Texte de l'article

Sujet expliqué par les élèves :
Définition du cristal mathématique :
"En partant d'un cube (étape 0- illustration 1) plaçons un cube identique sur chacune de ses faces pour obtenir le « cristal » ci-contre (étape 1- illustration 2). Puis rajoutons des cubes pour obtenir le « cristal » ci-contre (étape 2- illustration 3). Et continuons ainsi de suite."
La construction primaire sous Survivalcraft, un jeu de construction, ne donne aucune indication concernant la manière dont les cubes devraient être ajoutés après la première itération (illustrations 2 à 6), car il est impossible d'appliquer l'algorithme fourni au-delà de la première itération (l'algorithme général est donné au paragraphe III).

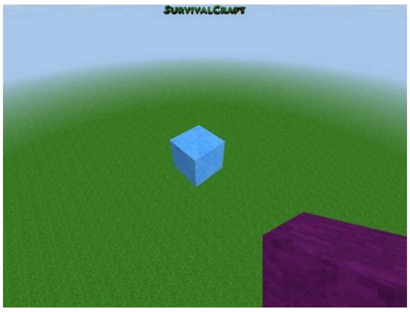


Illustration 1: cube de départ

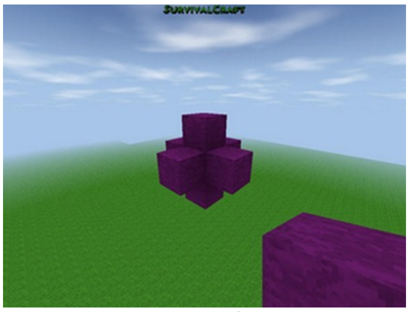


Illustration 2: 1ère itération

Illustration 3: 2ème itération

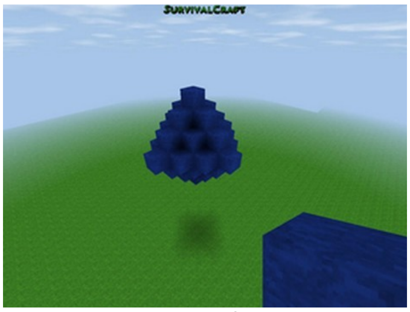


Illustration 4: 3ème itération

Illustration 5: 4ème itération

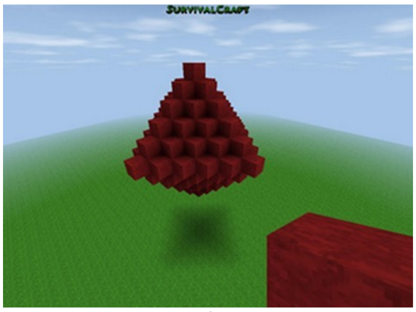


Illustration 6: 5ème itération

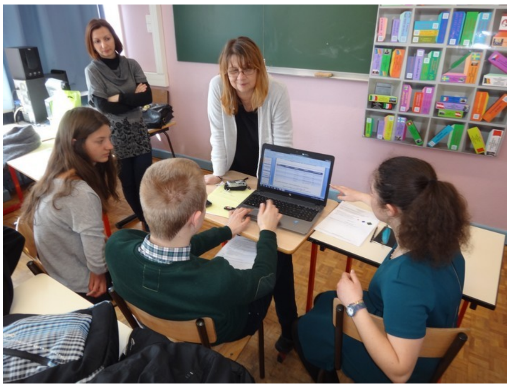


Illustration 7: échanges avec nos collègues roumains avant le congrès de Lyon

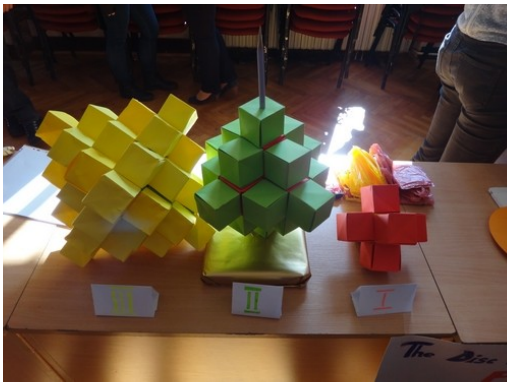


Illustration 8: maquettes présentées lors du forum des maths à Cluj

I-Dénombrement et premiers résultats

Tout d'abord, nous avons dénombré, à chaque étape, le nombre de cubes total (c), le nombre de cubes dans la largeur (diamètre - d), le nombre de cubes visibles (u), le nombre de faces visibles (v) et le nombre de sommets externes (w). Les différents groupes, français et roumains, ont mis en œuvre des méthodes pour compter et conjecturer différentes formules pour c, d, u, v et w en fonction de n l'itération.

Méthode I.
Vu la complexité de la structure, il nous est apparu bon d'« aplatir » le solide, c'est à dire que nous avons dessiné seulement ce que nous aurions vu si l'on se plaçait à la verticale du cube, et dans chaque case, nous avons mis le nombre de cubes en hauteur, par exemple, ce qui donnait ceci (illustration 9) :

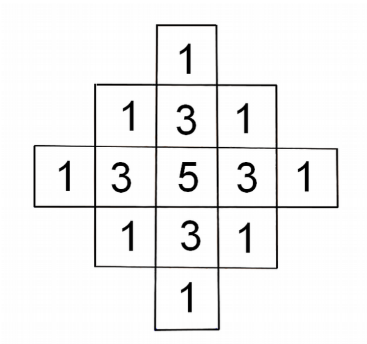


Illustration 9: coupe de l'étape n°2

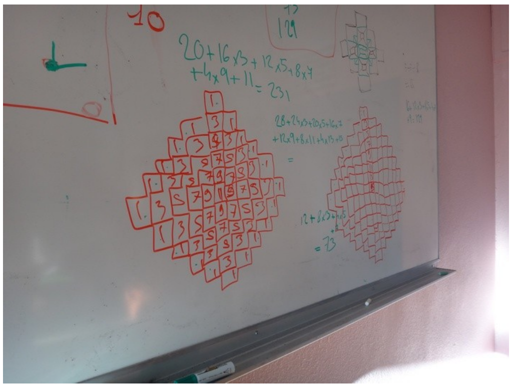


Illustration 10: séance de recherches

Ensuite, nous additionnons les nombres dans chaque cases pour obtenir le nombre de cube pour cette évolution, 25 dans l'exemple de l'illustration 1.
Nous avons réalisé ces dénombrements pour plusieurs étapes de l'évolution et rentré ces valeurs dans un tableau (illustration 11) :

Étapes	0	1	2	3	4	5	6	7
Diamètre (d)	1	3	5	7	9	11	13	15
Nombre de cubes (C)	1	7	25	63	129	231	377	575
Nombre de cubes visibles (U)	1	6	18	38	66	102	146	226
Nombres de faces (V)	6	30	78	150	246	366	510	678
Nombre de sommet externes (W)	8	24	48	80	120	168	224	288

Illustration 11: valeurs expérimentales a différentes étapes

Méthode II.
Pour trouver le nombre d'unités cubiques dans un espace tridimensionnel :

1. nous avons utilisé premièrement un modèle bidimensionnel (illustration 12, après 5 itérations)
2. nous avons compté le nombre de carrés qui ont été ajoutés sur la dernière couche, et le nombre total de carrés, tableau ci-dessous.

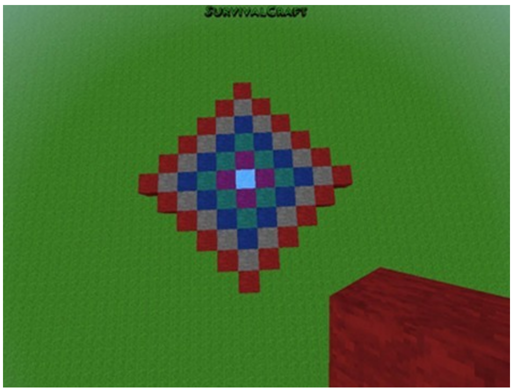


Illustration 12: Coupe après 5 itérations

Nombre d'itération (n)	*Nombre de carrés (ajoutés et total)*
0	1
1	1+4=5
2	5+8=13
3	13+12=25
4	25+16=41
5	41+20=61

En généralisant, nous pouvons conjecturer que le nombre de carrés ajoutés (noté A_2) est $A_2(n)=4n$.[1]
A partir de ce résultat, le nombre total de carrés (noté N_2) sera

Propriété 1 : $N_2(n)=1+4\sum_{i=0}^{n} i=1+2n(n+1)$ [2]

La formule de la propriété 1 peut se démontrer par induction (récurrence) en remarquant que $N_2(k+1)=N_2(k)+A_2(k+1)$.

Nous sommes alors en mesure de compter le nombre de cubes de la structures. En construisant la structure cubique, couche par couche, sous Survivalcraft, nous avons constaté le phénomène suivant :

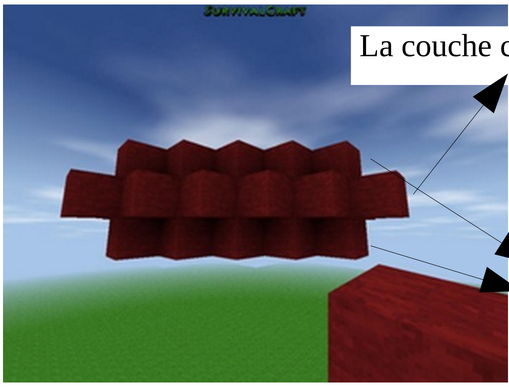


Illustration 13: les trois "tranches" centrales à la 5ème itération

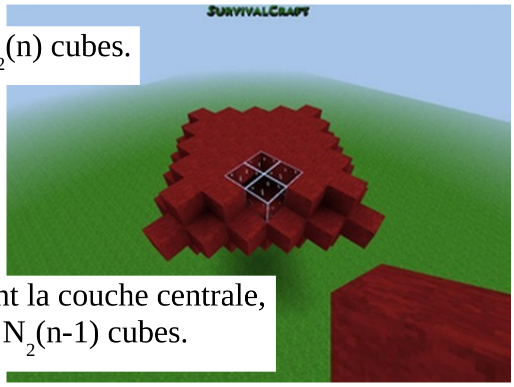


Illustration 14: même chose, vue de dessus

Ceci nous a conduit au résultat suivant :

Propriété 2 : $c(n)=N_2(n)+2\sum_{i=0}^{n-1} N_2(i)=\frac{4}{3}n^3+2n^2+\frac{8}{3}n+1$ [3]

La deuxième égalité de la propriété 2 peut se démontrer par induction (récurrence).

Méthode III.
La méthode III reprend la méthode I mais en essayant de généraliser pour obtenir le nombre de cube total. Le cristal à trois plans de symétries (illustration 15), si on fait une coupe selon un de ces plans nous obtenons l'illustration 16.

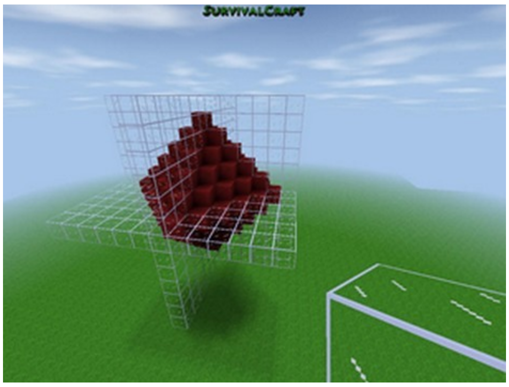


Illustration 15: les 3 plans de symétries du cristal

Le cube central (turquoise) va être présent dans 2n+1 couches. Les 4 cubes qui le borde (mauves) seront présents dans 2(n-1)+1 couches. Les 8 cubes verts seront dans 2(n-1)+1 couches... les 4n cubes jaunes seront dans 2(n-n)+1=1 couche. [4]

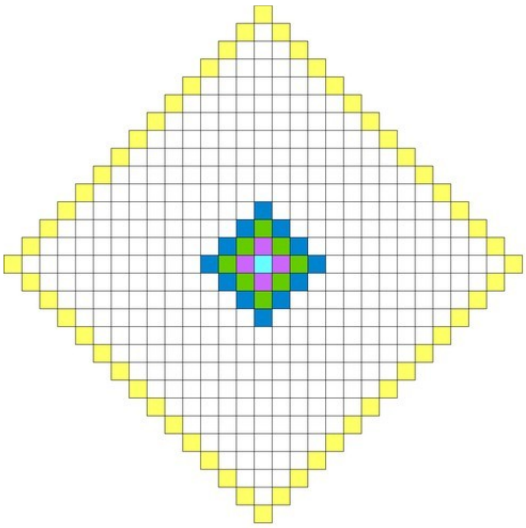


Illustration 16: coupe selon un plan de symétrie à la nème itération

Sous forme de tableau :

Nombre de cubes	Nombre de couche où apparaissent ces cubes
1	2n+1
4	2(n-1)+1
8	2(n-2)+1
16	2(n-3)+1
...	...
4n	2(n-n)+1

Ainsi, le nombre de cube de la structure à l'itération n sera

$$c(n)=(2n+1)\times 1+(2(n-1)+1)\times 4+(2(n-2)+1)\times 8+\ldots+(2(n-n)+1)\times 4n=(2n+1)+4\sum_{k=1}^{n}(2(n-k)+1)\times k$$

On peut alors montrer que cette dernière formule conduit à la même formule que la propriété 2.

III. Recherche empirique de formules

Notre première idée, pour trouver les différentes formules, a été de placer les points correspondants aux valeurs du tableau de l'illustration 11 et de chercher la fonction qui passerait par ses points.

Pour le diamètre (illustration 17), les points étaient alignés, nous avons rapidement trouvé : d(n)=2n+1 ou x est le nombre d'évolutions (illustration 18).

Propriété 3 : le diamètre de la structure d(n)=2n+1

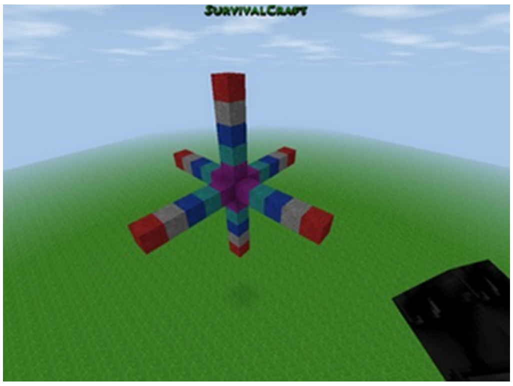


Illustration 17: diamètres de la structure

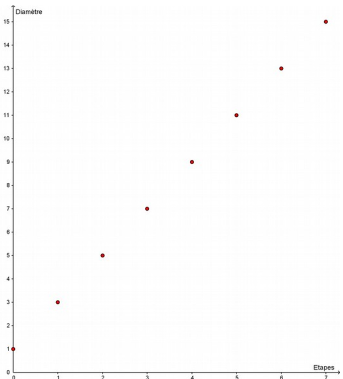


Illustration 18: diamètre en fonction du numéro de l'étape

Illustration 19: séance de recherches

Pour les autres valeurs, notre idée ne nous permettait pas d'avoir facilement une formule.
Deuxième idée. Nous avons écrit le nombre de cubes visibles et cherché une logique entre eux en tâtonnant, jusqu'à trouver une formule dite par récurrence : $C_{n+1}= C_n+4n^2+8n+6$ où n est le numéro de l'évolution et avec $C_0=1$.
Cependant, nous n'avions pas encore étudié les suites, et en sommes restés là.
Toutefois, nous avons cherché de la même manière le lien entre chaque série de nombres et avons trouvé d'autres formules par récurrence :
Pour le nombre de faces : $V_{n+1}=V_n+24(n+1)$ (avec V_0 qui vaut 6)
Pour le nombre de sommets externes : $W_{n+1}=W_n+8(n+1)+8$ (avec W_0 qui vaut 8)

La formule pour le nombre de cubes a été plus laborieuse à établir : $C_{n+1}=C_n+4(n+1)^2+2$ avec C_0 égal à 1.

Ensuite, avec l'aide de notre chercheur, nous sommes arrivés [5]à la formule suivante :

$$C_n=\frac{1}{3}(4n^3+6n^2+8n+3)$$

Puis nos échanges avec nos collègues roumains, travaillant sur le même sujet, nous ont permis de comprendre comment passer d'une formule par récurrence à une formule sans récurrence, et nous avons obtenu ces formules-ci :

Nombre de faces visibles : $V_n=12(n+n^2)+6$

Nombre de sommets externes :$W_n=4n^2+12n+8$

Propriété 4 : Nombre de cubes visibles : $U_n=4n^2+2$ pour $n>0$

Démonstration paragraphe IV

Illustration 20: séance d'échanges avec le chercheur

III- Algorithmes de construction

Nous avons cherché comment représenter cette structure sur un ordinateur.

Les différents groupes travaillant sur ce sujet ont rapidement trouvé la relation : $|x|+|y|+|z|=e$ où e est le numéro de l'itération et (x,y,z) les coordonnées entières du centre du cube.

Avec cette relation et la fonction intégrée dans *Blender-Python*, nous avons construit l'algorithme ci-après, pour 5 itérations. Le résultat est l'illustration 21.

```
>>> n=5
>>> for i in range(n+1):
...     for x in range(-i,i+1,1):
...         for y in range(-i,i+1,1):
...             for z in range(-i,i+1,1):
...                 if(x<0):
...                     xx=-x
...                 else:
...                     xx=x
...                 if(y<0):
...                     yy=-y
...                 else:
...                     yy=y
...                 if(z<0):
...                     zz=-z
...                 else:
...                     zz=z
...                 if(xx+yy+zz==i):
...                     bpy.ops.mesh.primitive_cube_add(radius=0.5,location=(x,y,z))
```

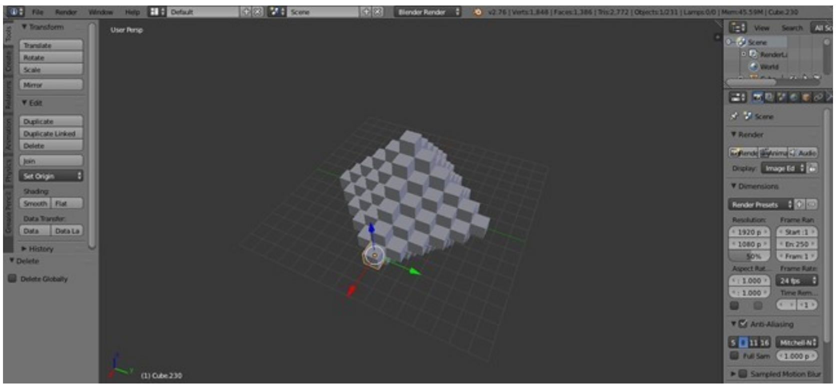


Illustration 21: représentation de l'itération 5 avec Blender

Un plus grand nombre d'itérations nécessite un temps de traitement plus long ; le résultat est représenté ci-dessous (illustration 22):

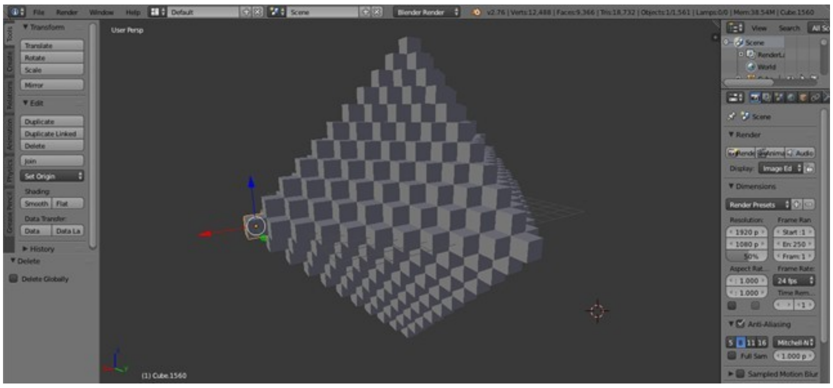


Illustration 22: structure pour 10 itérations, 1561 unités cubiques

La version améliorée de l'algorithme est donnée ci-dessous. Cela permet la construction des cubes un par un, mais l'algorithme doit être introduit sous l'éditeur de texte *Blender*, non dans la console *Python*.

```
import bpy
from itertools import product
mesh = bpy.data.meshes['Cube']
objects_scene = bpy.context.scene.objects
objects_data  = bpy.data.objects
actions_data  = bpy.data.actions
def create_cube(name, location ):
   bpy.ops.mesh.primitive_cube_add(
      radius=0.5,
      view_align=False,
      enter_editmode=False,
      location=location,
      rotation=(0, 0, 0))
   obj = bpy.context.object
   obj.name = name
   me = obj.data
   me.name = name+'Mesh'
   return obj
def create_animation(obj, time):
   obj.animation_data_create()
   obj.animation_data.action = action = actions_data.new("Action")
   fcurves = [action.fcurves.new(data_path) for data_path in ("hide", "hide_render")]
   for fcu in fcurves:
      fcu.keyframe_points.insert(   0, 1, {'FAST'}).interpolation = "CONSTANT"
      fcu.keyframe_points.insert(time, 0, {'FAST'}).interpolation = "CONSTANT"
      fcu.extrapolation = "CONSTANT"
n = 6
time = 1
for i in range(n):
   for indices in product(range(-i, i+1), repeat=3):
      if sum(abs(j) for j in indices) == i:
         cube = create_cube("Cube", indices)
         create_animation(cube, time)
         time += 1
```

Notre chercheur, Yves PAPEGAY, nous a proposé d'utiliser le logiciel *mathematica*. Une seule ligne suffit

pour réaliser la structure :
DessineCube[n_]:=Map[Cuboid,Select[Truples[Range[-,n],3],Abs[#[(1)]]Abs[#[(2)+Abs[#[(3)]]≤n&]]//Graphics3D [6]
Grâce à cela, nous avons pu modéliser une vingtaine d'évolutions, et nous sommes aperçus que l'on ne voyait plus que deux pyramides dont les bases seraient collées l'une à l'autre (illustration n°23).

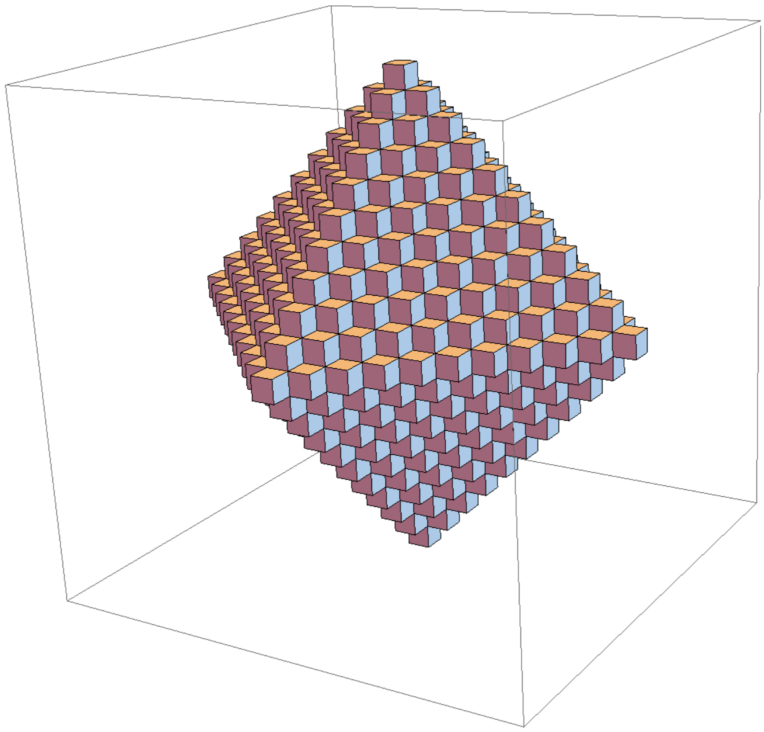


Illustration 23: Cristal à l'itération 11

Nous avons aussi voulu savoir si l'on pouvait imaginer le même type d'évolution à partir de d'autres solides de départ.

Nous essayons avec les tétraèdres, et nous sommes en train de voir, par la construction de tétraèdre en papier, si l'algorithme d'évolution ne va pas rencontrer des problèmes.
Suite aux discussions lors du salon de la culture et des jeux mathématiques à Paris, on nous a expliqué que ce n'était pas possible de paver l'espace avec des tétraèdres.

IV- Démonstration du nombre de cube visibles

Le fait de pouvoir visualiser un certain nombre d'itérations nous a permis de mieux comprendre comment était formée notre structure, et de pouvoir trouver d'une manière différente les formules précédentes.
Voici l'itération n°4 vue de face, illustration 24.
Nous allons déterminer le nombre de cubes visibles (U).

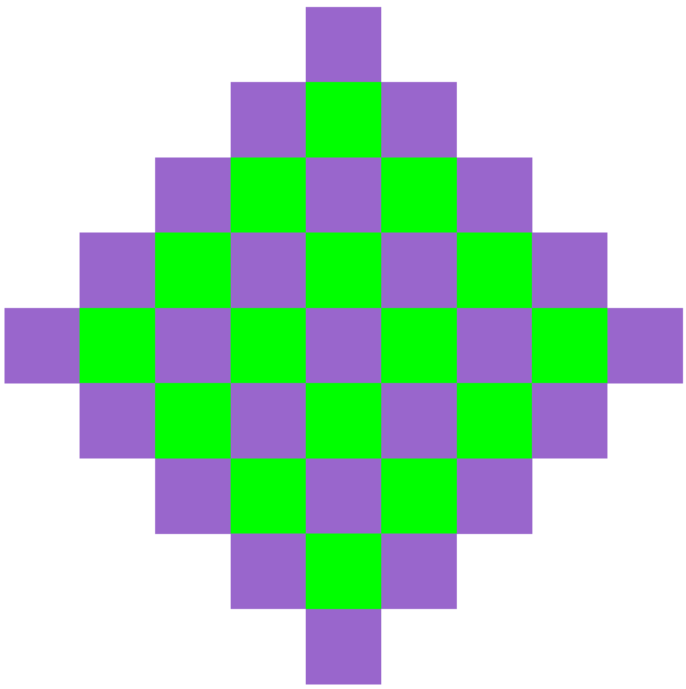


Illustration 24: tranche de l'itération n°4

Nous pouvons voir que la figure a 5 carrés de côté,

soit (n+1) de côté, donc la surface des cubes violets est de $(n+1)^2$, puisque un cube est de côté 1. Les carrés verts sont en quinconce par rapport aux violets, donc leur surface est à ajouter. Ici, nous voyons qu'il y en a 4 de côté soit n, donc la surface des cubes verts est de n^2. La surface de la figure totale est de $T_n=(n+1)^2+n^2$ soit $T_n= 2n^2+2n+1$.
Cependant, il faut prendre en compte également l'autre côté du solide. Puisque la dernière rangée violette est la même sur les deux faces, il faut compter à partir de l'évolution verte, qui vaut donc T_{n-1}.
Nous avons donc $U_n=T_n+T_{n-1}= 2n^2+2n+1+2(n-1)^2+2(n-1)+1$, donc $U_n=4n^2+2$ (avec $n>0$), ce qui rejoint la formule que nous avions trouvé.

Voici une autre démonstration, cela va aussi nous donner le nombre de faces et de sommets.
La structure visible est composé de trois classes de cubes (I, II et III), selon le nombre de faces qui se trouvent en contact avec les cubes précédents (illustration 25).

Itération	Nombre de cubes de classe I (une seule face en contact)	Nombre de cubes de classe II (deux faces en contact)	Nombre de cubes de classe III (trois faces en contact)	Nombre de cubes visibles total (U)
1	6	$0\times12=0$	0	6
2	6	$1\times12=12$	$8\times0=0$	18
3	6	$2\times12=24$	$8\times(0+1)=8$	38
4	6	$3\times12=36$	$8\times(0+1+2)=24$	66
5	6	$4\times12=48$	$8\times(0+1+2+3)=48$	102
...	...	...	...	...
n	6	12(n-1)	$8\sum_{i=0}^{n-2} i=\frac{8(n-1)(n-2)}{2}$	U(n)

$U(n)=6+12(n-1)+\frac{8(n-1)(n-2)}{2}=4n^2+2$ Soit la valeur annoncée à la propriété 4.

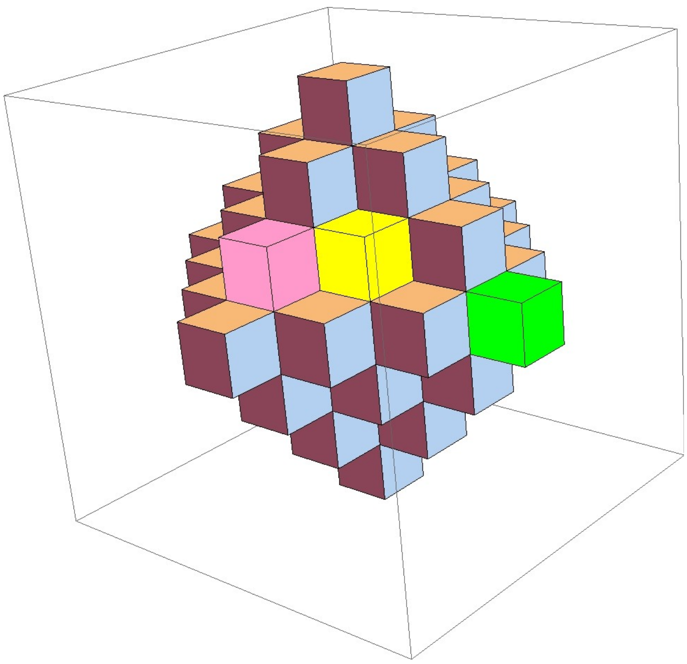


Illustration 25: cube vert -classe I – une seule face en contact. Cube rose -classe II – deux faces en contacts. Cube jaune -classe III – trois faces en contacts

Le tableau ci-dessous indique le nombre total de sommets visibles, des arêtes et faces d'un cube, en fonction de la classe à laquelle il appartient.

Pour les cubes de	classe I	classe II	Classe III
Nombre de sommets	4	2	1
Nombre d'arêtes	8	5	3
Nombre de faces	5	4	3

Étant donné que nous connaissons le nombre de cube de chaque classe, nous pouvons calculer le nombre total des arêtes, sommets et faces visibles de la structures.

Pour les cubes de	classe I	classe II	Classe III	Total (visible) pour la structure
Nombre total de sommets (W)	6×4	$12(n-1)\times2$	$4(n-1)(n-2)\times1$	$4(n+1)(n+2)$
Nombre total d'arêtes	6×8	$12(n-1)\times5$	$4(n-1)(n-2)\times3$	$12(n+1)^2$
Nombre total de faces (V)	6×5	$12(n-1)\times4$	$4(n-1)(n-2)\times3$	$6(2n^2+2n+1)$

On retrouve pour V et W les formules proposées à la fin du paragraphe II.

Présentation du sujet lors du congrès MeJ de Lyon

Notes d'édition :

[1] Il serait intéressant de prouver que le nombre de carré ajouté à chaque étape est égal à 4n
[2] La deuxième égalité provient de l'égalité connue $1+2+...+n = n(n+1)/2$
[3] On ne voit pas très bien comment les auteurs ont trouvé cette formule !
[4] On retrouve ici le terme $A(n) = 4n$ qui a été conjecturé plus haut.
[5] Comment ?
[6] On aimerait bien comprendre comment cette formule est écrite !