

TAS DE SABLE OU ENSEMBLE DE POINTS À ÉGALE DISTANCE

Par AMBLARD David, COUSIN Gaspard, KLUSZCZYNSKI Volodia et GAU Jérémy élèves de terminale S au Lycée d'Altitude de Briançon (Hautes-Alpes, 05).

Enseignants : PROAL Hubert (mathématiques), LISSONDE Mickaël (mathématiques et physique) et GRANOUILLET Pierre (mécanique).

Chercheurs : PETIT Camille (Université de Fribourg), PAPEGAY Yves (INRIA-Sophia Antipolis) et DUCROT François (Université d'Angers).

Sujet :

Si nous réalisons un tas de sable sur un support, la structure obtenue dépend seulement de ce dernier. Nous essayons de déterminer par avance comment va être le tas de sable lorsque nous connaissons la forme du support et inversement, de trouver la forme d'un support connaissant les lignes de crête.

Valorisations des travaux

Présentations au Forum des mathématiques d'Aix-en-Provence (8 et 9 janvier 2015)

Présentations au Forum des mathématiques vivantes à Marseille (20 mars 2015)

Participation au concours C-Génial à Paris – **Deuxième prix.**

Sommaire :

I. Problème - page 2

Pente constante du talus

II. Supports polygonaux convexes – page 2

1. Ensemble de points à égale distance de deux droites sécantes.
2. Supports en forme de triangle ou de quadrilatère.
3. Bissectrice orpheline et lignes de niveau
4. Résultats sur le nombre de sommets et d'arêtes

III. Supports polygonaux non convexes – page 10

1. Assemblage de deux rectangles
2. Ensemble de points à égale distance d'un point et d'une droite et d'un cercle et d'une droite

IV. Bords circulaires – page 12

1. Ensemble de points à égale distance de deux cercles sécants
 - a) La lunule
 - b) Lentille biconvexe
2. Ensemble de points à égale distance de deux cercles disjoints
 - a) Deux cercles disjoints
 - b) Un cercle inclus dans un autre

V. Les cubiques – page 13

VI. Problème inverse – page 15

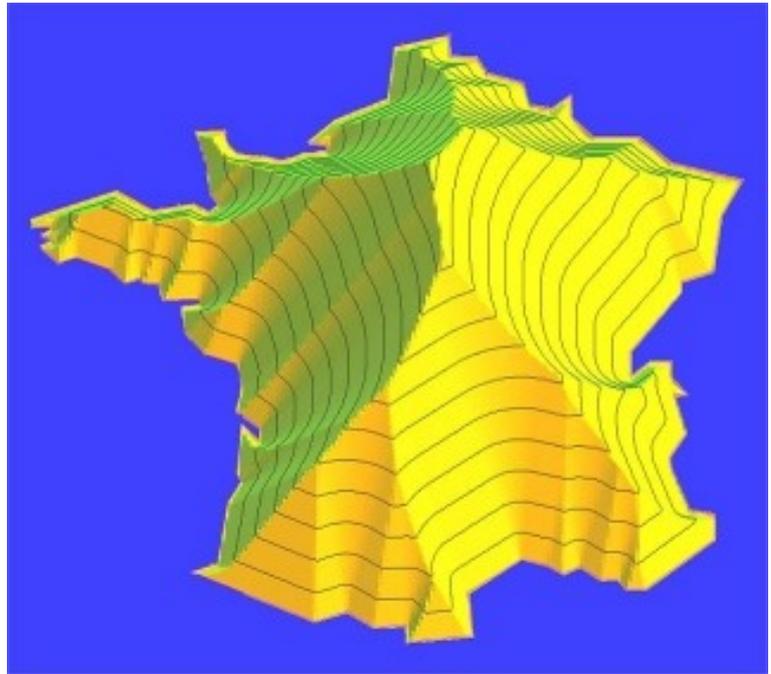
VII. Tas de sable et architecture – page 16

I. Problème

Lorsque nous réalisons un tas de sable sur un support, nous obtenons une figure qui dépend seulement du support de départ. Nous nous sommes interrogés pour savoir comment « prédire » la forme du tas lorsque nous connaissons la forme du support, en particulier la position et la forme des lignes de crête.

Pour cela, nous avons dû nous pencher sur l'aspect physique du problème. Si nous regardons la pente du talus formée par le tas de sable, nous constatons qu'elle est identique en tout point du bord du support. Il n'y a pas de raison pour que les grains de sable (homogènes) se proportionnent différemment.

A partir de ce postulat physique, -la pente du talus du tas de sable est identique en tout point du bord du support- nous pouvons donc essayer de comprendre ce qui se passe lorsque deux talus vont se « rentrer dedans ».



II. Supports polygonaux convexes

1. Ensemble de points à égale distance de deux droites sécantes

Dans un coin du support il va se former une ligne de crête¹ rectiligne, mais où exactement ? **1**

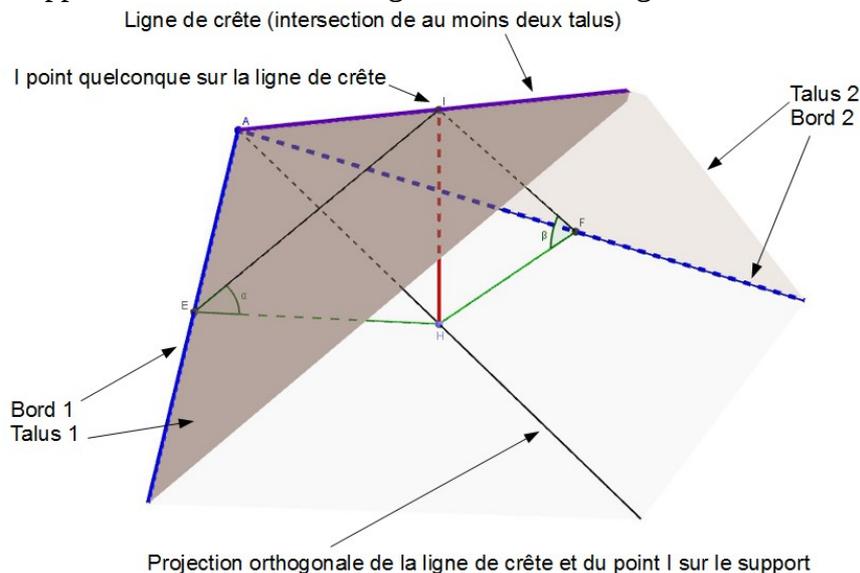


Figure 1 : propriété de la ligne de crête.

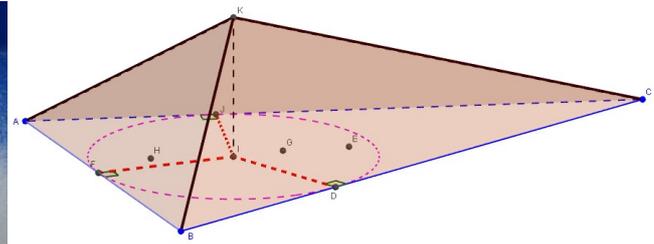
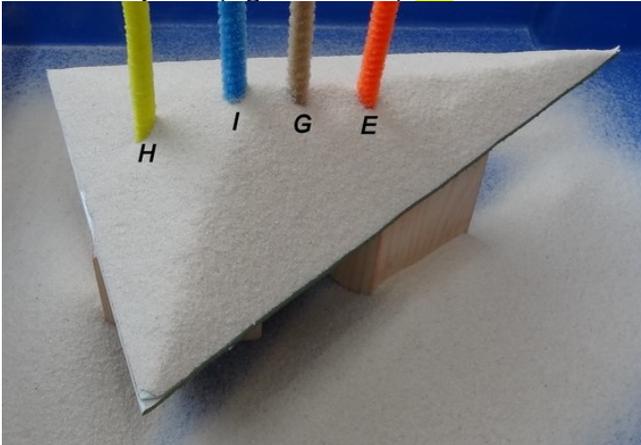
Si nous regardons la figure 1, dans les deux triangles rectangles EIH et IHF, nous avons $\tan(\alpha) = \frac{IH}{EH}$ et $\tan(\beta) = \frac{IH}{HF}$, les angles des deux talus $\alpha = \widehat{HEI}$ et $\beta = \widehat{IFH}$ sont identiques (d'après le postulat), nous en déduisons que $EH = FH$. Ainsi la projection de la ligne de crête est une droite à égale distance des deux bords, c'est-à-dire la bissectrice des deux bords.

Remarque : la hauteur du point I est proportionnelle à la longueur HF.

1 Ligne de crête : ensemble des points communs à aux moins deux talus sécants.

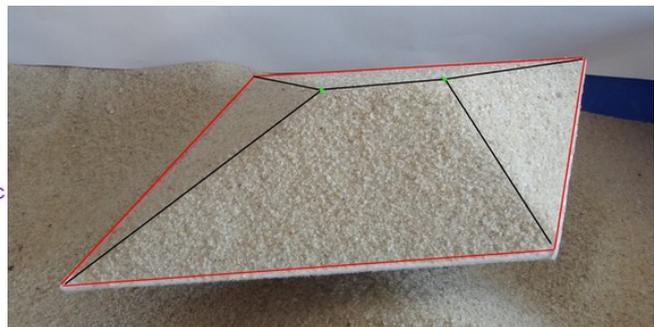
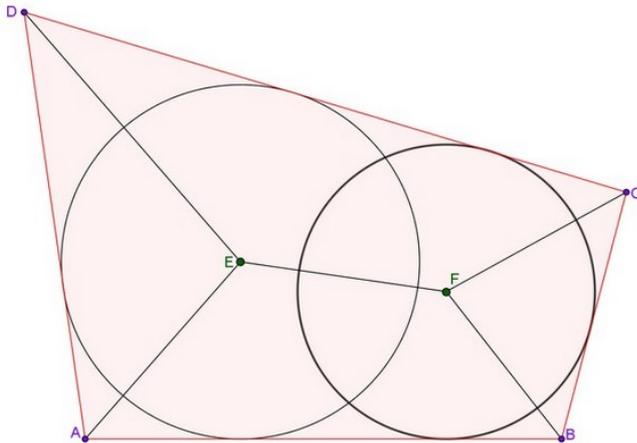
2. Supports en forme de triangle ou de quadrilatère

Si nous traçons les trois bissectrices du triangle, elles sont concourantes au centre du cercle inscrit. Nous sommes alors en mesure de déterminer les lignes de crête : trois segments qui se rencontrent en un seul point (figures 2a-2b). [2]



Figures 2a-2b : expérience et modélisation sur un triangle, les trois segments qui forment la ligne de crête sont concourants en I dont la projection correspond au centre du cercle inscrit.

Pour le quadrilatère, nous pouvons procéder pratiquement de la même manière. Nous traçons les 4 bissectrices, elles sont sécantes deux à deux et nous relierons les points d'intersection (figure 3a).



Figures 3a-3b : projection des lignes de crête dans le cas d'un quadrilatère et expérience.

Suite à la remarque du paragraphe précédent, les rayons des cercles inscrits sont proportionnels aux hauteurs des sommets.

Pour le quadrilatère, la ligne de crête est composée de cinq segments et de deux sommets.

3. Bissectrice orpheline et lignes de niveau

Une fois le triangle et le quadrilatère traités, nous nous sommes penchés sur le cas du pentagone, toujours en utilisant la méthode des bissectrices.

Toutefois, lorsque nous les traçons sur un pentagone, quatre bissectrices se coupent deux à deux et une cinquième n'en coupe aucune autre : elle est dite orpheline (figure 4).

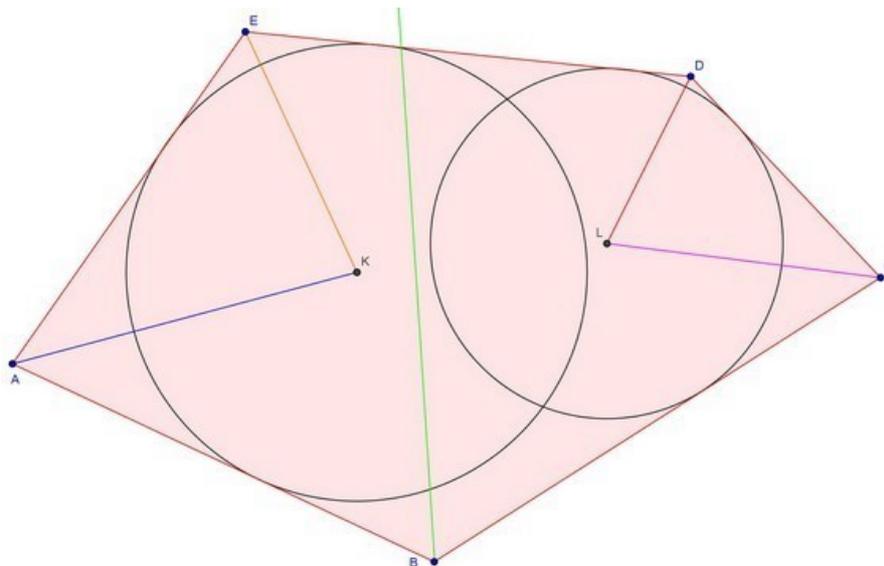


Figure 4 : le tracé des bissectrices d'un pentagone et l'apparition de la bissectrice orpheline.

De plus, la méthode empirique ne permet pas d'observer un résultat précis pour en tirer des conclusions. Il a donc fallu mettre au point une méthode différente, celle des lignes de niveau. Si nous faisons rouler un cercle de rayon 1 à l'intérieur du pentagone, la trace du centre va fournir tous les points à la hauteur 1, qui forment une ligne appelée la ligne de niveau 1 –en réalité la hauteur est proportionnelle au rayon du cercle, ce n'est pas vraiment la hauteur 1 – (figure 5).

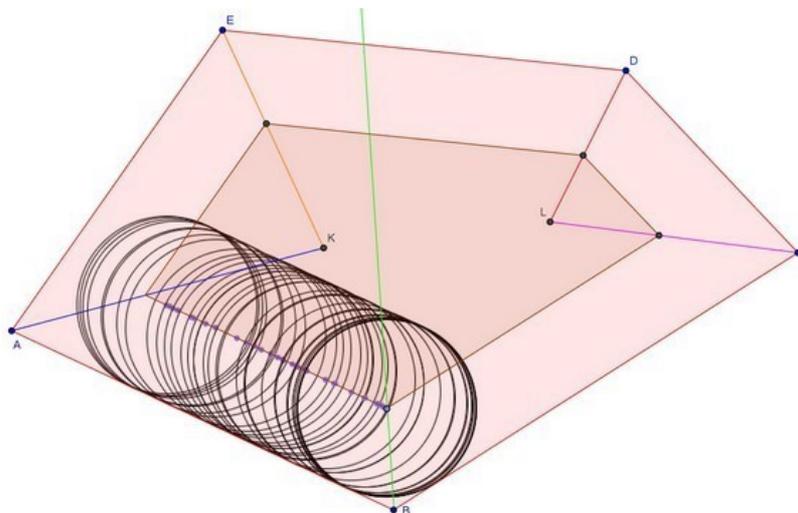


Figure 5 : méthode pour obtenir l'ensemble des points à égale distance des bords du support.

En poursuivant cette méthode, nous obtenons l'ensemble des lignes de niveau et ainsi, nous traçons en quelque sorte une réduction de la figure. C'est-à-dire qu'à un moment donné, la plus courte arête de ce pentagone devient un point (nous obtenons un quadrilatère) et dans un deuxième temps, il se crée un triangle. Nous arrivons alors sur un cas de figure que nous savons résoudre (figure 6).

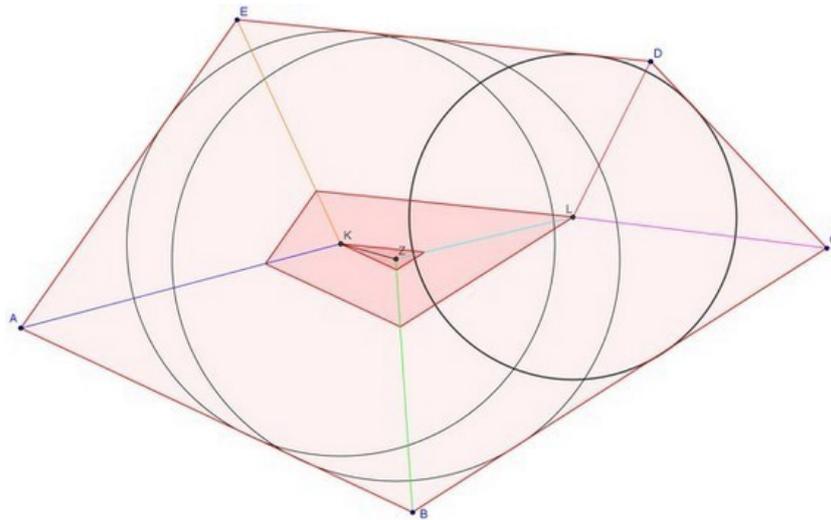


Figure 6 : la réduction du pentagone en quadrilatère puis en triangle permet d'obtenir la forme du tas de sable formé.

Le tas de sable associé au pentagone aura donc trois sommets et sept arêtes.

En couplant les méthodes des bissectrices et des lignes de niveau nous sommes en mesure de déterminer la ligne de crête de n'importe quel support polygonal convexe.

4. Résultats sur le nombre de sommets et d'arêtes

Durant la première année de recherche, nous avons émis des conjectures sur le nombre k de sommets et le nombre a d'arêtes de la ligne de crête en fonction du nombre n de côtés du support de départ.

Conjecture 1) $k \leq n-2$

Conjecture 2) $n \leq a \leq 2n-3$

La tentative d'une démonstration par récurrence n'ayant pas abouti, il nous a fallu trouver une autre méthode. C'est un ancien élève du lycée qui nous a conseillé d'utiliser la relation d'Euler.

Démonstration du cas général : [3]

Nous nous plaçons dans le cas général mais pour illustrer notre démarche nous prenons la figure 3a ci-dessus.

Nous constatons que la projection des lignes de crête forme, a priori, un graphe (figure 7). Le problème du nombre fini de sommets peut être soulevé par une explication à la main. Ce graphe est connexe. Ensuite, nous remarquons qu'il y a deux types de sommets dans ce graphe : les primaires (il y en a $n \geq 3$) de degré $\delta^\circ = 1$ et les secondaires (il y en a $k \geq 1$) de degré $\delta^\circ \geq 3$. Enfin, ce graphe n'a pas de cycle. Ainsi, il est connexe, sans cycle, c'est donc un arbre avec $s = n + k$ sommets et a arêtes.

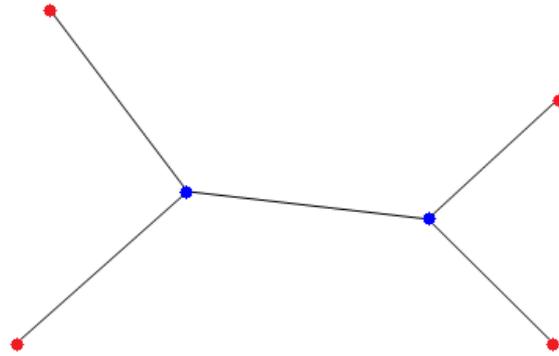


Figure 7: arbre correspondant à la figure 3a avec $n=4$ sommets primaires (en rouge), $k=2$ sommets secondaires (en bleu) et $a=5$.

Un tel graphe se note $G(S;A)$ avec S un ensemble de sommets fini et A un ensemble d'arêtes. Une relation due à Euler stipule que tout arbre vérifie : $s-a=1$. [4]
 Pour démontrer la relation d'Euler, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme :

Tout arbre possède au moins un sommet pendent, c'est-à-dire primaire (de degré $\delta^{\circ}=1$).

Démonstration du lemme :

Soit G un arbre. Nous considérons l'ensemble constitué par les longueurs des chaînes² possibles de G (c'est un ensemble d'entiers naturels non nuls). Cet ensemble est non vide et fini. Il admet donc un maximum (un ensemble non vide et fini d'entiers admet un maximum). Il existe donc un entier $p \geq 1$ (le maximum) et x_1, \dots, x_p des sommets de l'arbre tels que la chaîne $[x_1, \dots, x_p]$ est maximale (il peut y en avoir d'autres mais il y en a au moins une et nous raisonnons sur celle-ci). Supposons par l'absurde que x_p n'est pas un sommet pendent alors x_p admet donc un sommet voisin (c'est-à-dire relié par une arête) x_{p+1} différent de x_{p-1} . Comme G n'admet pas de cycle, x_{p+1} est également différent de x_1, \dots, x_{p-2} . Mais alors $[x_1, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}]$ est une chaîne de G de longueur $p+1 > p$ ce qui est absurde car p est le maximum. Donc x_p est un sommet pendent et ceci démontre notre lemme.

Retour sur la démonstration de la relation d'Euler :

Soit G un arbre. D'après le lemme, G admet un sommet x pendent. Soit G' le graphe G privé du sommet x et de l'unique arête le reliant aux autres sommets. G' est un arbre.

Nous constatons de plus que lors du passage de G à G' , la quantité $s-a$ est restée invariante. En effet: $s'=s-1$, $a'=a-1$ donc $s'-a'=s-a$.

Nous réitérons ensuite cette démarche en raisonnant sur G' jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un sommet et aucune arête. Comme « $s-a$ » est égal à 1 à la fin de l'élagage, cela veut dire qu'il a toujours été égal à 1 et que donc $s-a=1$ (figure 8).

2 Une chaîne est une suite de sommets (non répétitifs) du graphe qui sont reliés entre eux par des arêtes de celui-ci. La longueur d'une chaîne est le nombre de sommets de la suite qui le constitue.

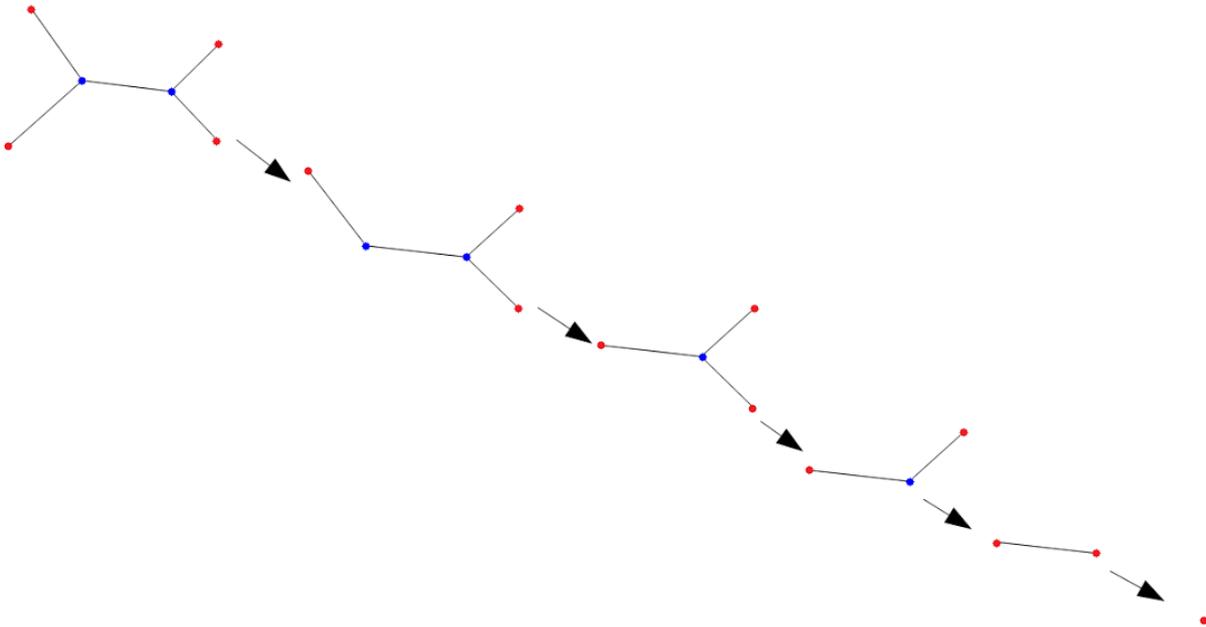


Figure 8: « élagage » de l'arbre de la figure 7 pour comprendre la relation d'Euler.

Remarque très importante : nous savons d'avance que les arbres étudiés (ceux qui sont physiques, c'est-à-dire ceux qui correspondent à des tas de sable) possèdent au moins un sommet pendant (n exactement) donc nous pouvons penser que le lemme est inutile et qu'il ne sert que dans une démarche générale. En réalité, pas du tout, car le lemme est peut-être inutile pour les n premiers élagages (nous utilisons les n sommets pendants originaux les uns après les autres) mais gardez à l'esprit qu'une fois ces n (arête-sommet) ôtés (et même dès la première paire), l'arbre n'a plus rien, a priori, d'un arbre physique et que par conséquent, il peut ne plus avoir de sommet pendant ... Donc le lemme est indispensable.

Si nous appliquons la relation d'Euler aux arbres liés à nos tas de sable, nous obtenons

$$a = s - 1 = (n + k) - 1$$

Pour démontrer le point 1 de notre conjecture ($k \leq n - 2$), nous allons compter le nombre d'arêtes d'une autre manière.

De chaque sommet primaire ($\delta^\circ = 1$) il part une seule arête et de chaque sommet secondaire ($\delta^\circ \geq 3$) il en part au moins trois.

Sachant qu'un arbre lié à un tas de sable nous avons n sommets primaires et k sommets secondaires, nous obtenons la relation : $1 \times n + 3 \times k \leq 2a$. Le facteur 2 provient du fait que dans notre décompte une arête est comptée deux fois puisqu'elle relie deux sommets.

Nous déduisons des deux relations : $a = n + k - 1$ (relation d'Euler) et $2a \geq n + 3k$ la formule suivante :

$$2(n + k - 1) \geq n + 3k \Leftrightarrow 2n + 2k - 2 \geq n + 3k \Leftrightarrow n - 2 \geq k \text{ (conjecture 1)}$$

Si nous couplons ce résultat avec la relation d'Euler à nouveau $a = n + k - 1$ nous obtenons :

$$a \leq 2n - 3 \text{ (une partie de la conjecture 2)}$$

et il est clair que le nombre d'arêtes a est supérieur ou égal au nombre de sommets primaires n .

$$n \leq a \text{ (autre partie de la conjecture 2)}$$

Remarque : le cas $a = n$ se produit si et seulement si $k = 1$ c'est-à-dire si et seulement si les bissectrices sont concourantes ou encore si et seulement si le polygone admet un seul cercle inscrit.

Question (ouverte) : le cas où $a = 2n - 3$ (c'est-à-dire $k = n - 2$) conduit-il à une propriété relative sur les polygones ?

Le tas de sable formé sur un polygone convexe possédera au maximum $n - 2$ sommets et $2n - 3$ arêtes. Ces dernières se formeront à égale distance des bords du support et la hauteur des sommets sera

proportionnelle à la distance qui sépare leurs projections le bord du support.

III. Supports polygonaux non convexes

1. Assemblage de deux rectangles

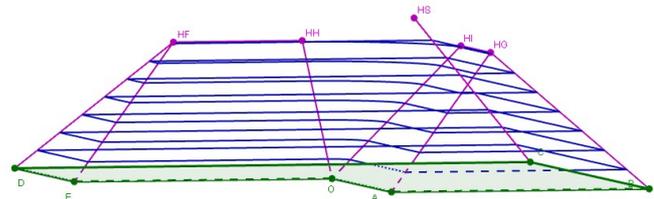
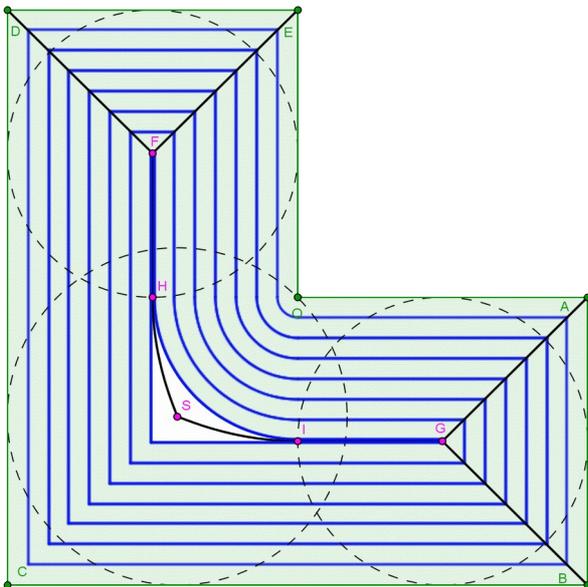
Nous sommes dorénavant en mesure de déterminer à l'avance la forme du tas de sable qui se produira sur des polygones convexes.

Lorsque nous assemblons deux rectangles, les anciennes structures vont-elles être complétées ou allons-nous obtenir un tas de sable totalement différent des deux précédents ? Les résultats précédemment obtenus sont-ils toujours valables ou faut-il recourir à d'autres méthodes pour déterminer la forme du tas obtenu ?

Le but est alors de déterminer la forme du tas de sable lorsque nous assemblons deux rectangles pour obtenir une figure en forme de « L », comme celle de la figure 9a.

Si nous traçons différentes lignes de niveau, nous faisons apparaître la ligne de crête sur les bissectrices des angles droits. Par contre sur l'angle obtus, les lignes de niveau forment des arcs de cercle.

Lorsque nous poursuivons le tracé, nous faisons apparaître la forme du tas de sable sur les extrémités du L mais il subsiste une zone d'ombre qui demande une réflexion plus poussée sur le mécanisme du tas de sable.



Figures 9a-9b: lignes de niveau dans le cas d'un support en forme de L.

Ce qui nous intéresse est de savoir comment se positionnent les points anguleux des lignes de niveau dans le « virage ».

Ces points sont les centres des cercles qui sont en contact avec le coté [DC] et le point O.

La problématique dans cette configuration (figure 9a), revient encore une fois à trouver l'ensemble des points à égale distance de deux objets mathématiques.

2. Ensemble de points à égale distance d'un point et d'une droite et d'un cercle et une droite

L'ensemble des points du plan à égale distance d'une droite D et d'un point F (extérieur à la droite) est la parabole.

L'ensemble des points du plan à égale distance d'une droite D et d'un cercle C (de centre F et de rayon r) est :

- si la droite ne coupe pas le cercle : une parabole de foyer F et de directrice D' la droite parallèle à D telle que $d(D, D') = r$ et D' la plus éloignée possible de F (figure 10).

- si la droite est sécante avec le cercle : deux paraboles de foyer F et de directrices respectives D' et D'' telles que $d(D,D')=d(D,D'')=r$ (figure 11).

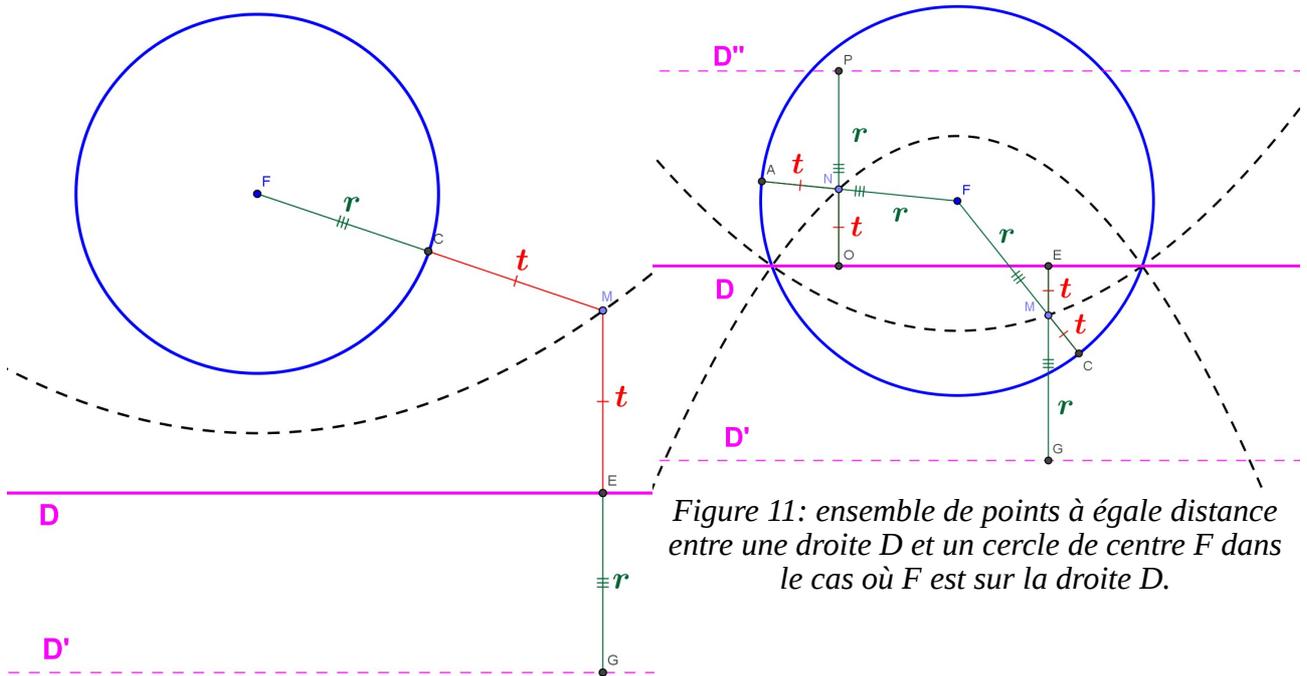
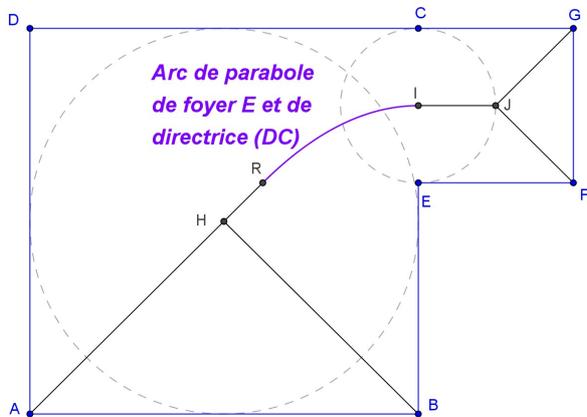


Figure 11: ensemble de points à égale distance entre une droite D et un cercle de centre F dans le cas où F est sur la droite D.

Figure 10: ensemble de points à égale distance d'une droite D et d'un cercle de centre F dans le cas où la droite et le cercle sont disjoints et dans le cas où la droite et le cercle sont sécants.

Application au cas du support général en forme de L, c'est-à-dire assemblage de deux rectangles de tailles différentes (figures 12a-12b).



Figures 12a-12b: ligne de crête dans le cas de l'assemblage de deux rectangles de tailles différentes et expérience correspondante.

IV. Bords circulaires

Après avoir étudié les supports dont les bords étaient des segments nous nous sommes intéressés à ceux dont les bords étaient des arcs de cercles.

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que dans le cas où un bord est un arc de cercle et l'autre une droite nous avons comme ligne de crête un arc de parabole.

1. Ensemble de points à égale distance de deux cercles sécants

L'intersection de deux cercles va définir trois zones : jaune, verte, orange dans la figure 13. Les zones jaunes et oranges (figure 13) correspondent au même problème, celui de la lunule. La zone verte en forme de lentille biconvexe sera étudiée au paragraphe b.

a) La lunule

Après plusieurs essais et de nombreux calculs nous sommes en mesure de démontrer que la ligne de crête va former un arc d'ellipse.

Proposition :

Soient deux cercles de centre A et de rayon r_A et de centre B et de rayon r_B , sécants en C et D. L'ensemble des points à égale distance des deux cercles dans les zones orange et jaune est l'ellipse de foyer A et B passant par C et D.

Démonstration de la proposition :

Quand M est dans la zone jaune (figure 14), $d(A; M)=r_A+t$ et $d(B;M)=r_B-t$, si nous additionnons ces deux formules nous obtenons $d(A;M)+d(B;M)=r_A+t+r_B-t=r_A+r_B=constante$.

De même si M est dans la zone orange (figure 13), $d(A;M)=r_A-t$ et $d(B;M)=r_B+t$ qui conduit à $d(A;M)+d(B;M)=r_A+r_B$.

Conclusion : si M est à égale distance des deux cercles, dans la zone orange ou jaune, alors M est sur l'ellipse de foyers A et B qui passe par C et D (car $AC+BC=AD+BD=r_A+r_B$).

Réciproquement (figure 15), si N est un point de l'ellipse de foyers A et B et qui passe par C et D alors $AN+BN=AC+BC=r_A+r_B$ mais nous avons aussi $AN=r_A+SN$ et $BN=r_B-NT$ qui permet de montrer que $SN-NT=0$ soit $SN=NT$. [5]

De plus $SN=d(N,C_A)$ car (NS) est perpendiculaire à la tangente à C_A en S, et de même $NT=d(N,C_B)$

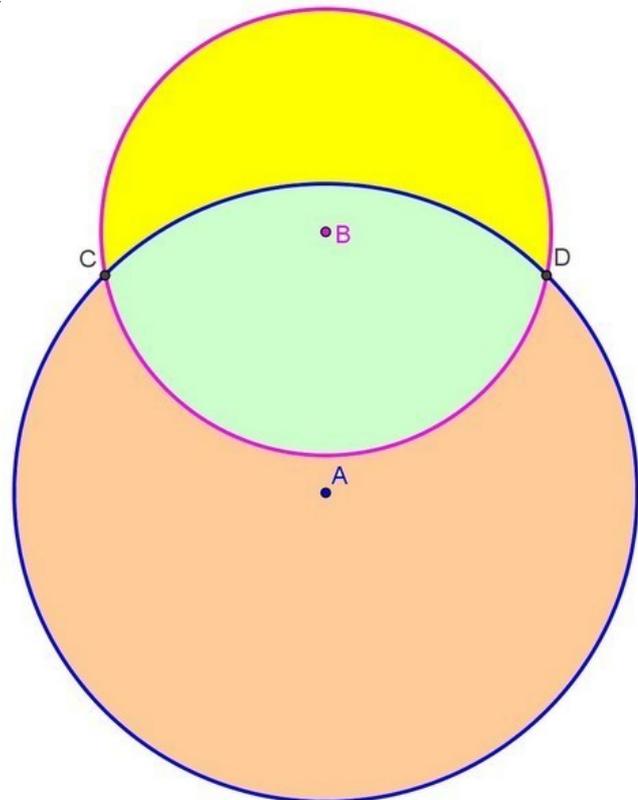


Figure 13 : les trois zones correspondantes à l'intersection de deux cercles.

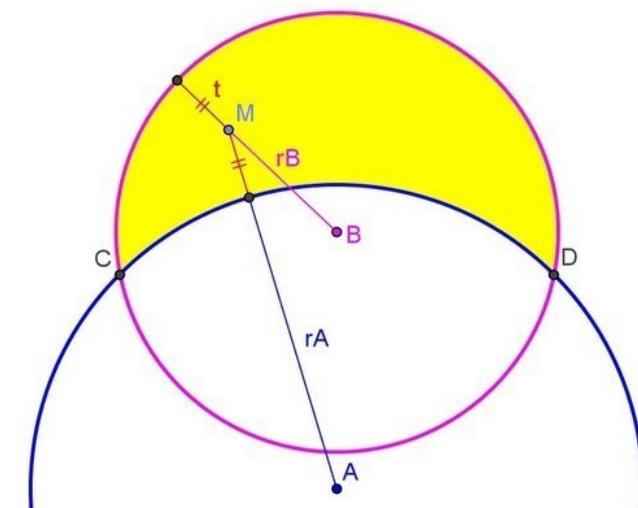


Figure 14 : quand M, à égale distance des deux cercles, est dans la zone jaune.

3 C_A est le cercle de centre A et de rayon r_A et C_B le cercle de centre B et de rayon r_B

Nous avons le même type de raisonnement si N est dans la zone orange (figure 13).
 Nous pouvons voir l'expérience et le résultat dans la figure 17.

b) Lentille biconvexe

Proposition :

Soient deux cercles de centre A et de rayon r_A et de centre B et de rayon r_B , sécants en C et D. L'ensemble des points à égale distance des deux cercles dans la zone verte (figure 13) est un arc d'hyperbole de foyers A et B et qui passe par C et D.

Démonstration de la proposition :

Quand M est dans la zone verte (figure 16), nous avons $d(A;M)=r_A-t$ et $d(B;M)=r_B-t$.

Ceci nous conduit, en faisant la différence, à $AM-BM=r_A-r_B$.

De la même manière que précédemment nous pouvons montrer que si M est sur l'arc d'hyperbole de la partie verte alors M est à égale distance des deux cercles.

Attention, $r_A-r_B>0$, la branche d'hyperbole est tournée vers le cercle de plus petit rayon (figure 17)

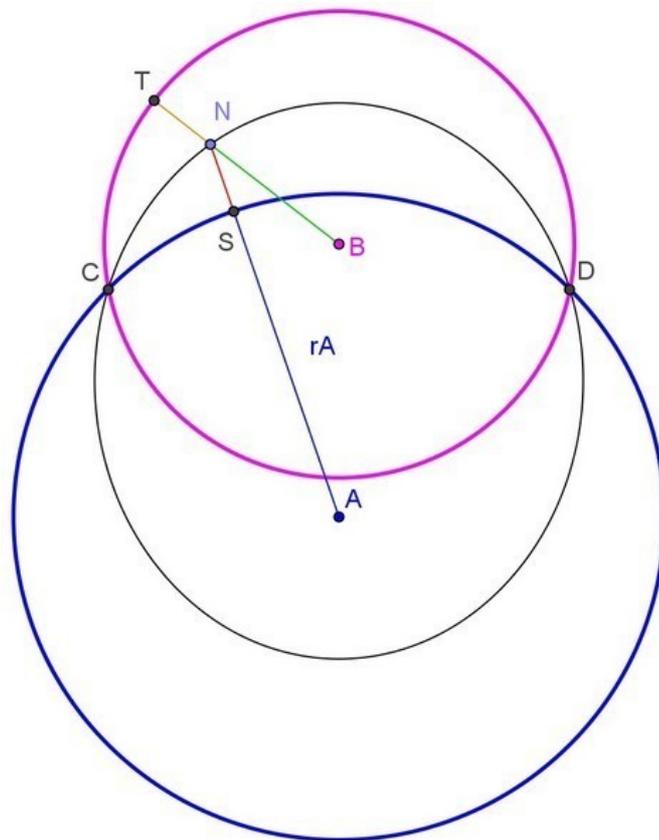


Figure 15 : N un point de l'ellipse de foyers A et B tel que $AN+BN=r_A+r_B$.

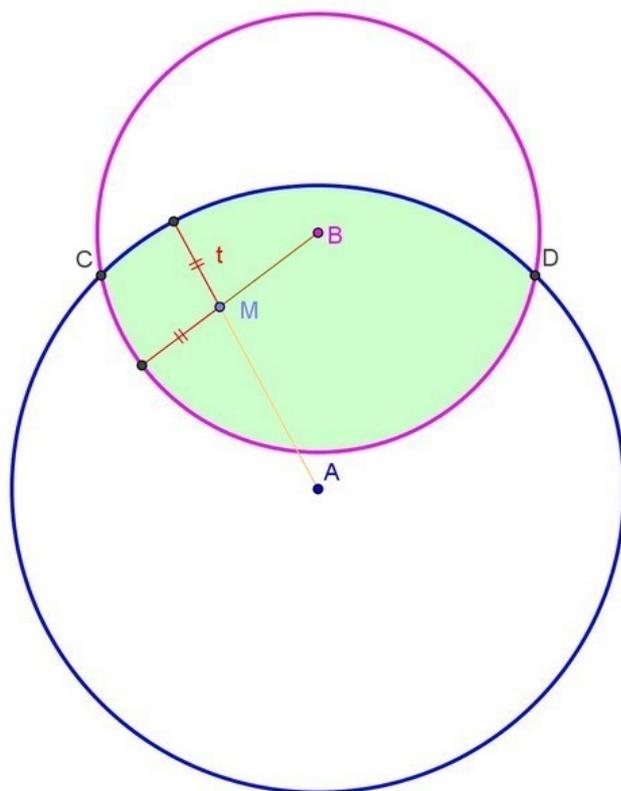


Figure 16 : quand M, à égale distance des deux cercles, est dans la zone verte.

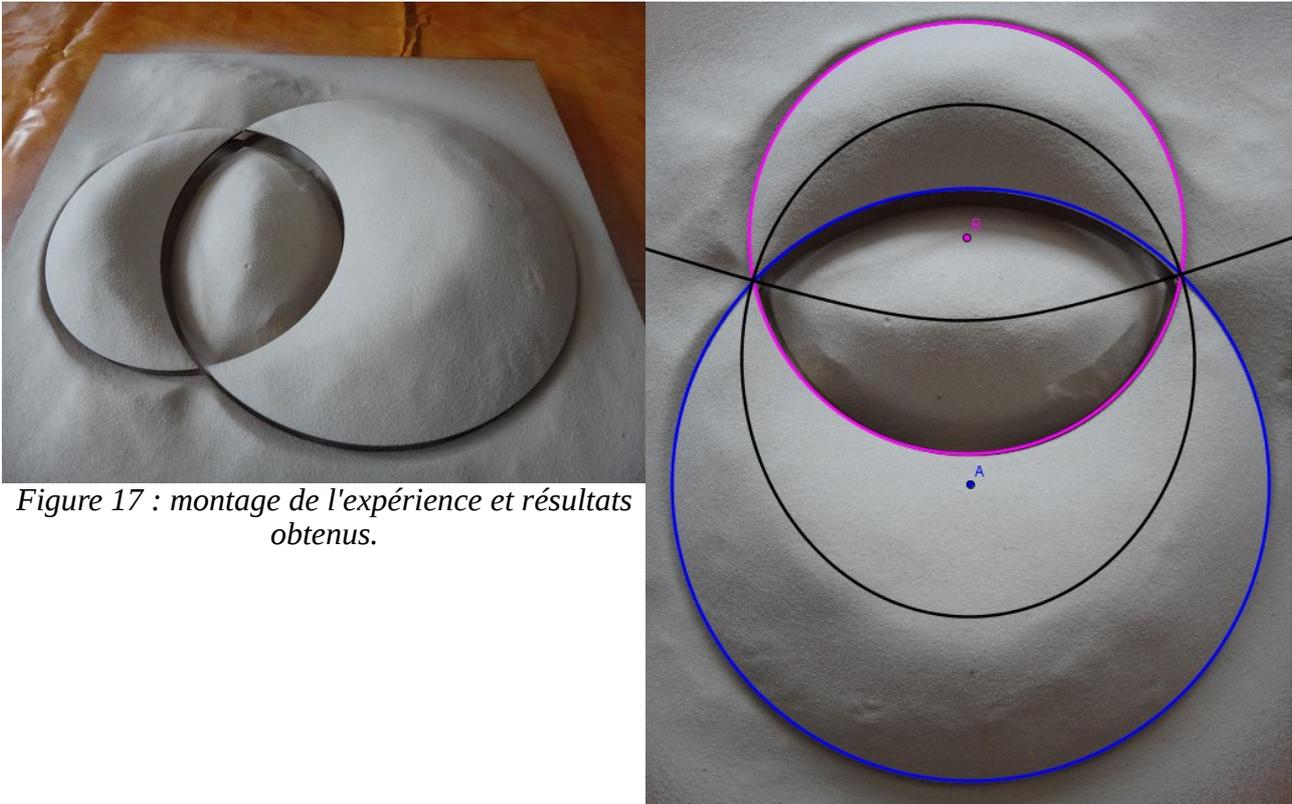


Figure 17 : montage de l'expérience et résultats obtenus.

2. Ensemble de points à égale distance de deux cercles disjoints

a) Deux cercles disjoints

Nous imaginons que le support est une plaque infinie avec deux trous circulaires qui vont former les deux cercles disjoints (figure 18).

Avec la même démarche et le même raisonnement que dans le paragraphe précédent nous aboutissons aux deux propriétés suivantes.

Proposition :

L'ensemble des points à égale distance de deux cercles non sécants est la branche d'hyperbole de foyers A et B la plus proche du cercle de plus petit rayon et qui passe par le point de [AB] équidistant des deux cercles (figure 19).

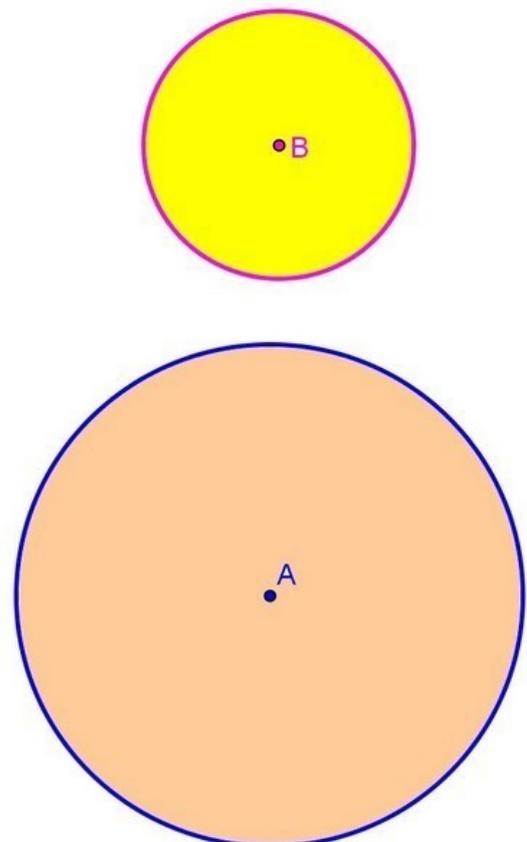


Figure 18 : support formé de deux cercles disjoints.

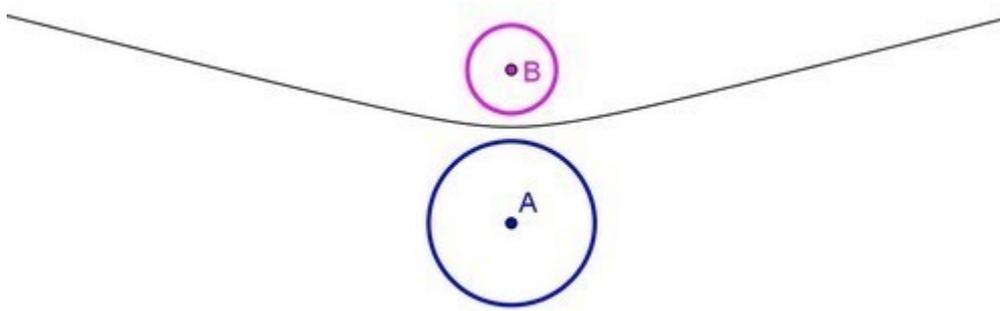


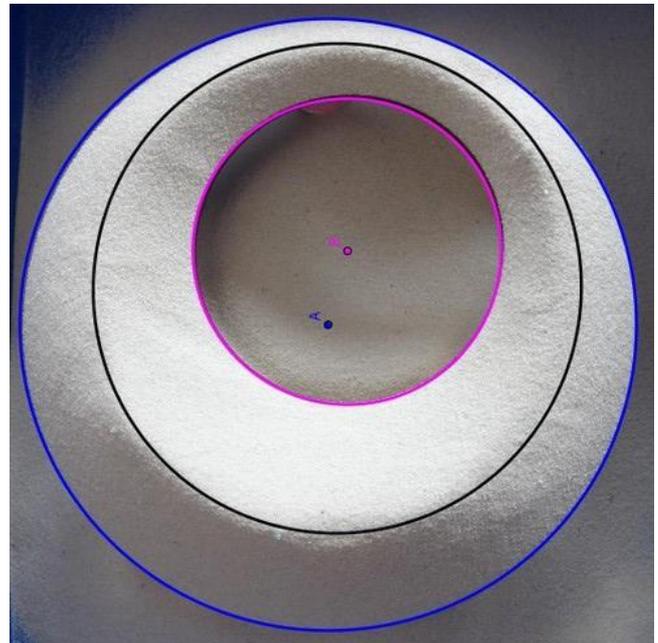
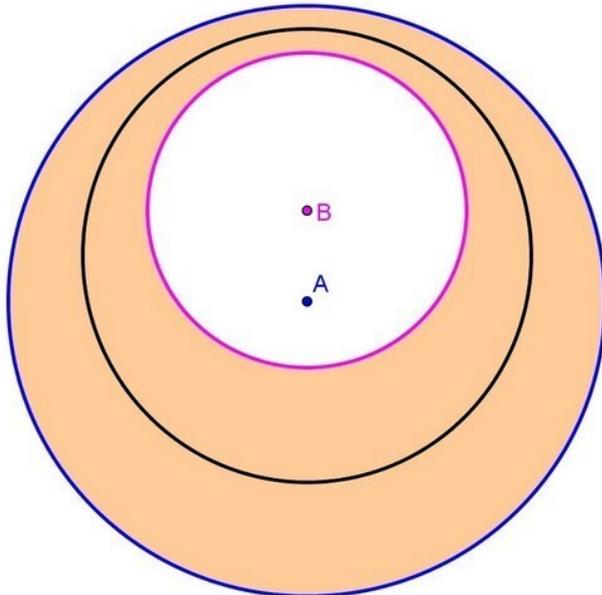
Figure 19 : la branche d'hyperbole correspondant à l'ensemble des points à égale distance de deux cercles disjoints.

b) Un cercle inclus dans un autre

Il existe aussi une autre configuration pour deux cercles non sécants (figure 20a).

Proposition :

Soit deux cercles de centre A et de rayon r_A et de centre B et de rayon r_B , le cercle de centre B est inclus dans celui de centre A. L'ensemble de point à égale distance de ces deux cercles est l'ellipse de foyers A et B telle que $d(A;M)+d(B;M)=r_A+r_B$ (figures 20a-20b)



Figures 20a-20b: ellipse correspondant à l'ensemble des points à égale distance de deux cercles disjoints dont l'un est inclus dans l'autre et photographie du tas de sable (vue de dessus).

[6]

V. Les cubiques

Les travaux de recherches menés durant la première et la deuxième années ont donné comme résultats des lignes de crête qui étaient des assemblages de segments de degré 1 ou des courbes algébriques de degré 2 (paraboles, ellipses, hyperboles). A partir de ce constat, nous avons voulu savoir s'il était possible d'obtenir des lignes de crête dans la famille des cubiques, soit de degré 3.

Notre première intuition nous a amenés à chercher l'ensemble des points à égales distances de deux cubiques, en l'occurrence $(x+1)^3$ et $(x-1)^3$ (figure 21).

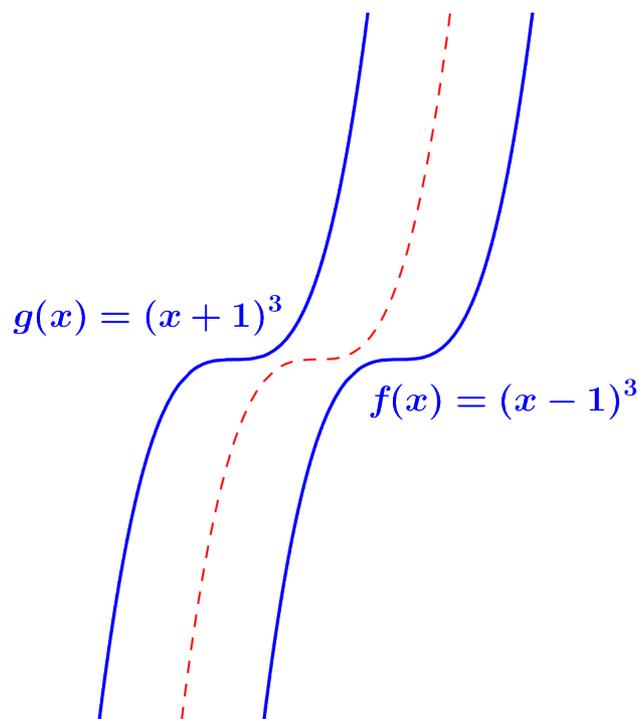
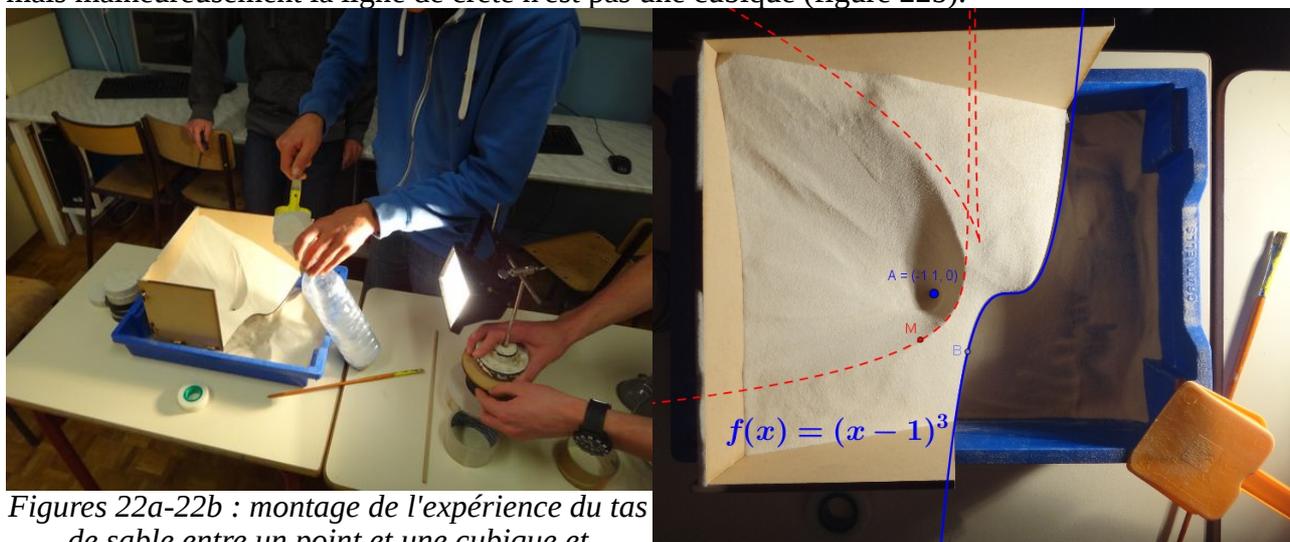


Figure 21 : si le support est délimité par f et g , la ligne de crête n'est pas x^3 .

N'arrivant pas à trouver d'angle d'attaque, nous avons simplifié le problème en cherchant l'ensemble des points à égale distance entre un point A et une cubique $f(x) = (x-1)^3$. Nous avons trouvé un résultat expérimental (sur logiciel) et calculatoire et les deux correspondent mais malheureusement la ligne de crête n'est pas une cubique (figure 22b).



Figures 22a-22b : montage de l'expérience du tas de sable entre un point et une cubique et superposition du résultat à la photographie.

Toutefois ces recherches nous ont fait apparaître un point particulier dans la construction et la recherche de la compréhension de ce phénomène nous a conduit à nous intéresser au rayon de courbure⁴ défini par $R = \left| \frac{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}{f''(x)} \right|$.

4 Le **cercle osculateur** ou **cercle de courbure** en un point d'une courbe est, parmi les cercles passant par ce point, celui qui « épouse cette courbe le mieux possible ».

En effet, jusqu'à présent, pour déterminer la forme des lignes de niveau, nous faisons rouler les cercles sur la courbe (ou sur le bord du support) et ils ne passaient jamais à travers celle-ci. Mais pour $f(x)=(x-1)^3$, ceux que nous faisons rouler sur la courbe rentrent en collision avec cette dernière (figure 23).

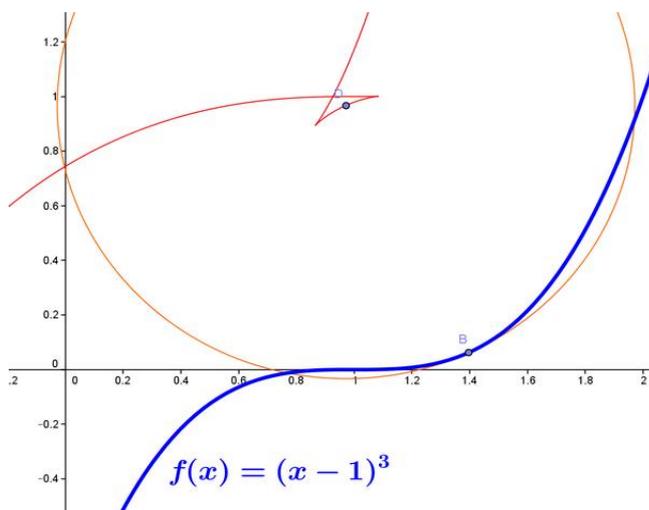


Figure 23 : le cercle en contact avec la courbe en B passe à travers celle-ci.

Les recherches menées pour essayer de déterminer la position de cette espèce de nœud sur les lignes de niveau n'ont pas abouti mais ont été utiles par la suite.

VI. Problème inverse

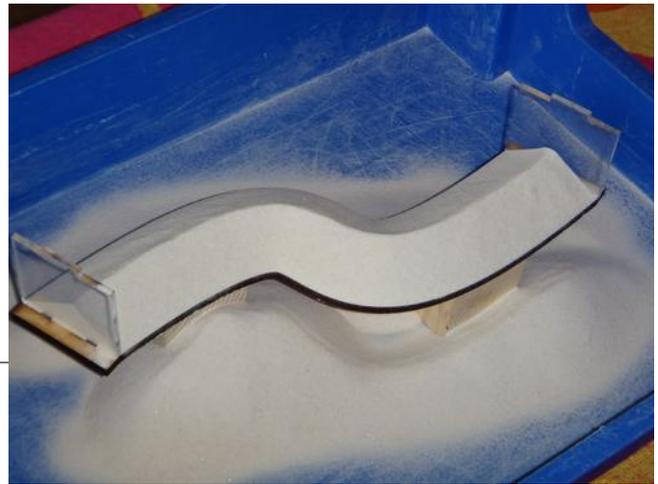
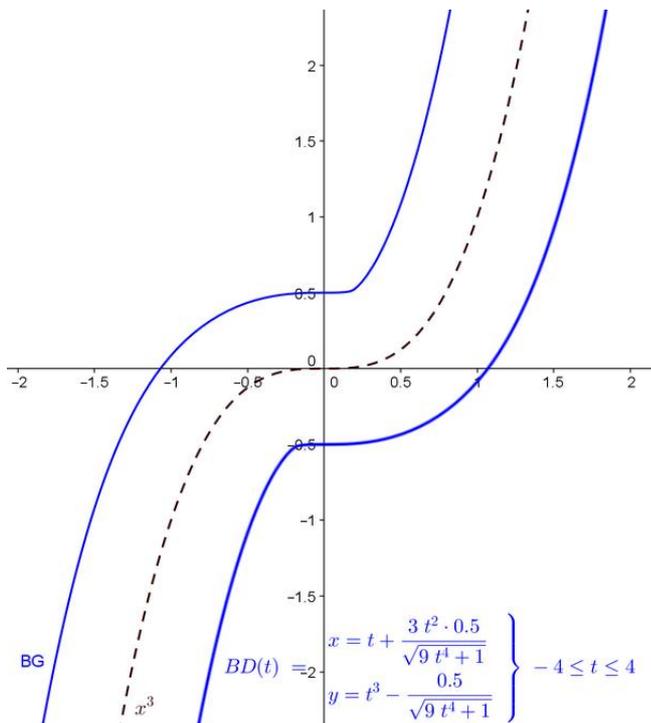
Finalement, nous avons pris le problème dans l'autre sens, c'est-à-dire trouver l'ensemble des points dont les distances à x^3 à gauche et à droite sont égales. [7]

Afin de visualiser la forme du support que nous obtenons, nous avons travaillé avec *GeoGebra*. En chaque point d'abscisse x de la courbe, nous traçons la normale à la tangente et nous disposons de deux points sur cette normale (un de chaque côté de la courbe) à une distance $r(x)$.

Ainsi si la fonction $r(x)$ est inférieure à la fonction « rayon de courbure » alors nous obtenons la forme d'un support qui admet x^3 comme ligne de crête. Cette idée nous conduit à la formule suivante pour les bords du support.

$$\text{Bord gauche : } \begin{cases} x(t) = t - \frac{3t^2 r(t)}{\sqrt{9t^4 + 1}} \\ y(t) = t^3 + \frac{r(t)}{\sqrt{9t^4 + 1}} \end{cases} \text{ et bord droit : } \begin{cases} x(t) = t + \frac{3t^2 r(t)}{\sqrt{9t^4 + 1}} \\ y(t) = t^3 - \frac{r(t)}{\sqrt{9t^4 + 1}} \end{cases}$$

Le rayon de courbure de la fonction x^3 est $R(x) = \frac{\sqrt{(1+9x^4)^3}}{6x}$ et cette fonction est minorée par 0,5 donc si nous prenons $r(t)=0,5$ nous obtenons un support qui admet x^3 comme ligne de crête (figures 24).



Figures 24a-24b : support (en bleu) qui admet x^3 comme ligne de crête et expérience correspondante.

Notre méthode nous conduit à la conjecture suivante :

Conjecture : si la ligne de crête est une fonction deux fois dérivable et dont la dérivée seconde n'est pas nulle alors il est possible de construire un support qui admet cette fonction comme ligne de crête.

VII. Tas de sable et architecture

Durant de notre présentation au forum des mathématiques vivantes à Marseille, nous avons pu nous entretenir avec un architecte qui nous a signalé une application possible de cette étude.

En effet, lors de la construction d'une dalle, sa masse va se répartir sur les murs qui la soutiennent en fonction de la surface des zones délimitées par la ligne de crête. Par exemple, dans la figure 25, le mur en jaune va supporter la partie jaune de la dalle.

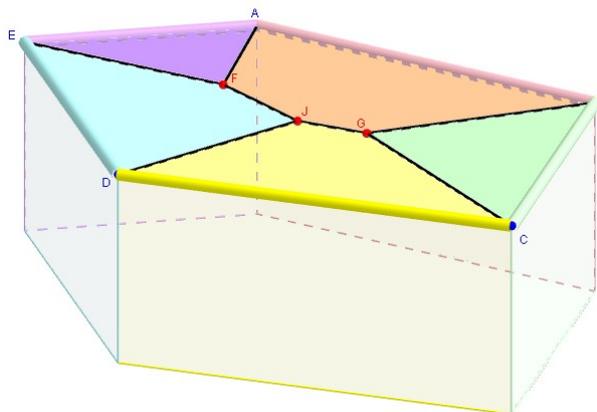


Figure 25 : chaque mur va supporter la masse de la dalle correspondant à la ligne de crête.

Notes d'édition :

[1] Dans la figure 1, on regarde plutôt un seul talus, et la ligne de crête est l'intersection des deux faces du talus. Ainsi, dans la figure 1, les demi-plans EAI et FAI sont les deux faces du talus, elles se coupent le long de la droite AI ; la projection orthogonale de cette droite sur le plan horizontal est la droite AH, dont l'argument qui suit montre que c'est la bissectrice des droites AE et AF.

[2] Les points H, I, G, E de la figure 2 sont respectivement les points d'intersection des hauteurs (orthocentre), des bissectrices (centre du cercle inscrit), des médianes (centre de gravité) et des médiatrices (entre du cercle circonscrit).

[3] Cette partie démontre un théorème, qu'il aurait donc été souhaitable d'énoncer précisément.

[4] Rappelons ici que s et a désignent respectivement les nombres de sommets et d'arêtes du graphe.

[5] On définit le point S comme l'intersection de la demi-droite [AN) avec le cercle de centre A, le point T l'intersection de la demi-droite [BN) avec le cercle de centre B.

[6] On pourrait également étudier des exemples construits à partir de disques et de polygones.

[7] Le lecteur curieux pourrait réfléchir à la même question pour d'autres fonctions classiques.