Paradoxe de Braess ou le prix de l'anarchie
2014-2015

Par Lucie ADISSON et Clara GREGOIRE élèves de seconde ; Marie STERKOS et Julien BARNEOUD élèves de première au Lycée d'Altitude de Briançon (Hautes-Alpes 05).
Par Mihnea CUIBUS, Andrei ILE et Catalina RETE, élèves de classe XI et Diana Coroiu et Vlad Sebastian Lupescu, élèves de classe IX du Colégiul National Emil Racovita de Cluj (Roumanie)

Enseignantes : Valentina Vasilescu, Adrian-Vasile Andrea et Ariana-Stanca Vacaretu
Chercheuse : Adela Lupescu (Universitatea Bades-Bolyai de Cluj-Napoca)
Enseignants : Hubert PROAL et Mickaël LISSONDE
Chercheurs : Camille PETIT (Université de Fribourg) et Yves PAPEGAY (INRIA-Sophia Antipolis)

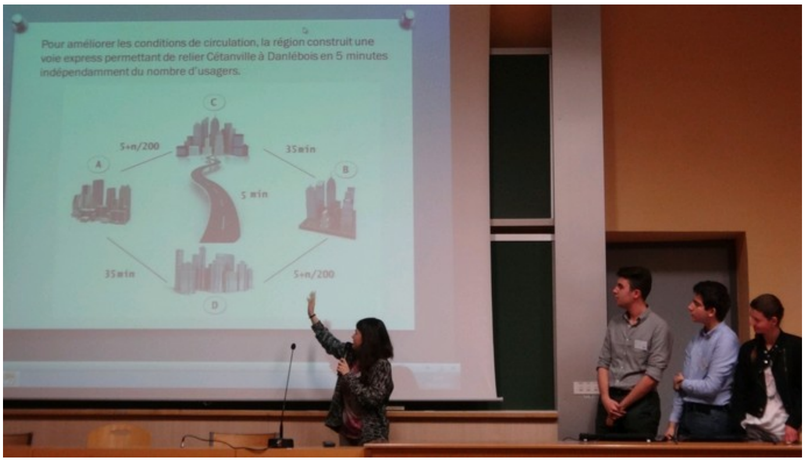
Présentation du sujet

Pour se rendre de la ville d'Arbeitstadt à la ville Belbanlieu, il y a deux itinéraires, l'un passant par Cétanville, l'autre par Danlebois.
Les routes entre Cétanville et Belbanlieu et entre ArbeitStadt et Danlébois sont des routes nationales, à quatre voies. Les temps de parcours sont indépendants du nombre d'usagers et de 35 minutes dans chaque cas.
Par contre les parcours entre Arbeitstadt et Cétanville, et entre Danlébois et Belbanlieu sont très urbains, avec de nombreux feux et les temps de parcours dépendent fortement du nombre d'usagers : dans chaque cas, il faut $5 + n/200$ minutes (où n est le nombre d'usagers).
Tous les soirs, environ 4 000 automobilistes font ce trajet sensiblement à la même heure.
Pour les aider à choisir leur itinéraire, la mairie d'ArbeitStadt a mis en place un système d'information fournissant le nombre d'usagers sur chaque itinéraire.
■ En supposant que chaque automobiliste choisit son itinéraire pour minimiser égoïstement son propre temps de trajet, comment va se répartir la circulation ?
Pour améliorer les conditions de circulation, la région construit une voie express permettant de relier Cétanville à Danlébois en 5 minutes indépendamment du nombre d'usagers.
■ Quelle va être l'évolution de la répartition de circulation et du temps de parcours ?

Résultats obtenus [(1)]

Valorisations des travaux

Présentations lors de la semaine des maths à Briançon (mars 2015)
Présentation lors du « Forum of the math research projects » à Cluj-Napoca (mars 2015)
Exposé commun lors du congrès *MATh.en.JEAN'S* à l'Université d'Avignon (mars 2015)
Présentations lors du « Math Youth Forum » à Cluj-Napoca (mai 2015)
Présentations lors du forum PASS à Aix-en-Provence (juin 2015)



Exposé lors du congrès MeJ d'Avignon

Texte de l'article

Sujet :

Pour se rendre de la ville d'Arbeitstadt à la ville Belbanlieu, il y a deux itinéraires, l'un passant par Cétanville, l'autre par Danlebois.

Les routes entre Cétanville et Belbanlieu et entre ArbeitStadt et Danlébois sont des routes nationales, à quatre voies. Les temps de parcours sont indépendants du nombre d'usagers et sont de 35 minutes dans chaque cas.

Par contre les parcours entre Arbeitstadt et Cétanville, et entre Danlébois et Belbanlieu sont très urbains, avec de nombreux feux et les temps de parcours dépendent fortement du nombre d'usagers : dans chaque cas, il faut 5 + n/200 minutes (où n est le nombre d'usagers).

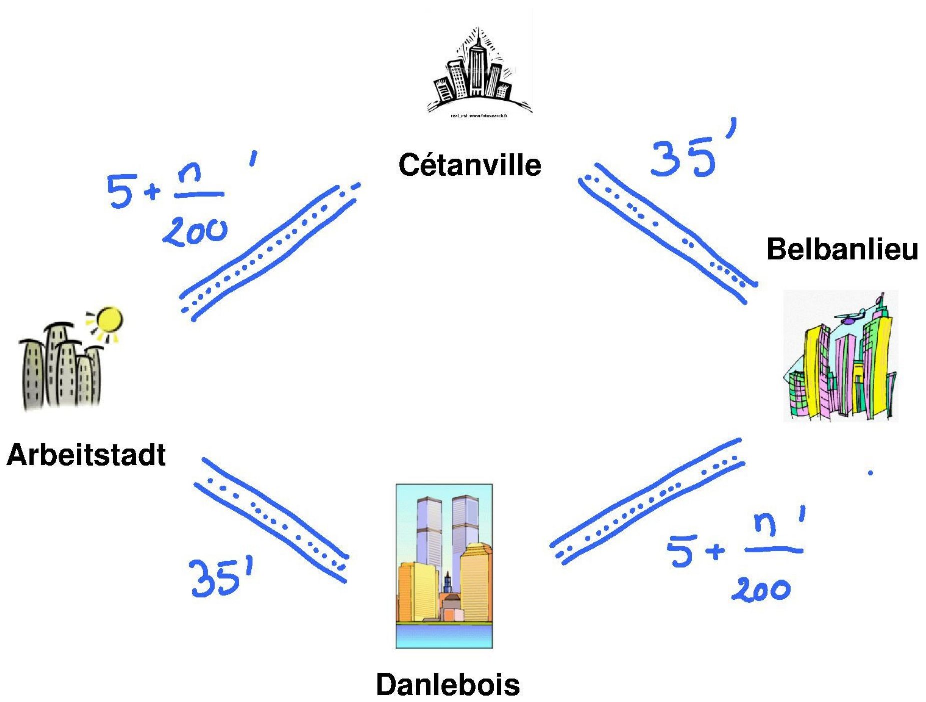
Tous les soirs, environ 4 000 automobilistes font ce trajet sensiblement à la même heure.

Pour les aider à choisir leur itinéraire, la mairie d'ArbeitStadt a mis en place un système d'information fournissant le nombre d'usagers sur chaque itinéraire.

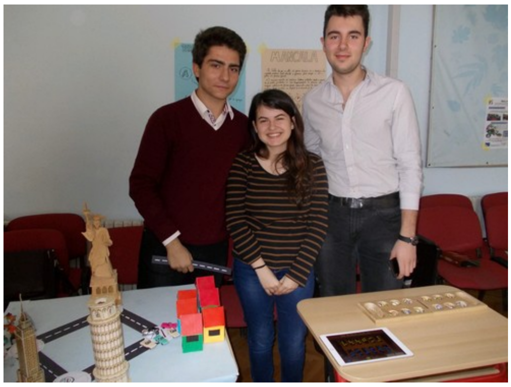
■ En supposant que chaque automobiliste choisit son itinéraire pour minimiser égoïstement son propre temps de trajet, comment va se répartir la circulation ?

Pour améliorer les conditions de circulation, la région construit une voie express permettant de relier Cétanville à Danlébois en 5 minutes indépendamment du nombre d'usagers.

■ Quelle va être l'évolution de la répartition de circulation et du temps de parcours ?



Stand lors du congrès d'Avignon

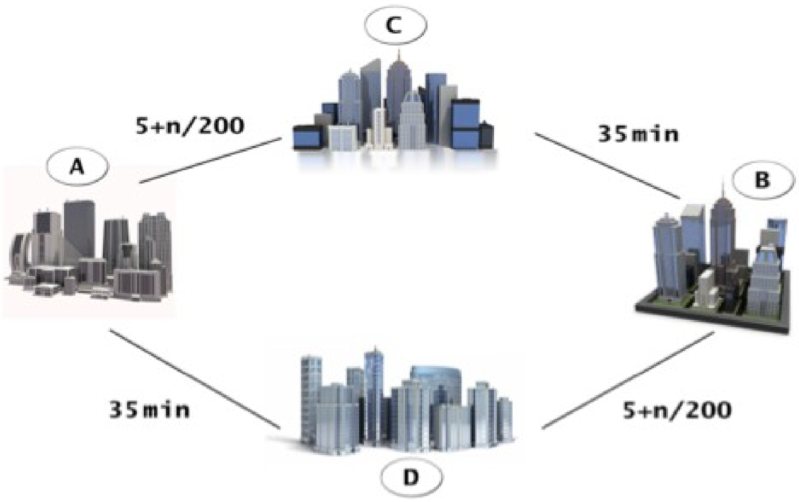


Stand lors du "Forum of the math research projects" à Cluj-Napoca

A. Explication du paradoxe

Nous avons étudié les temps totaux de parcours pour chaque situation. La conclusion est que la route supplémentaire conduit a l'augmentation du temps du parcours, en créant un paradoxe à cause du caractère égoïste de chaque chauffeur.

Dans **la première** situation, chaque chauffeur a deux possibilités : la route A-C-B ou la route A-D-B. Grâce au système d'information qui donne le nombre d'usager sur chaque itinéraire à chaque moment, les automobilistes vont se partager équitablement dans les deux itinéraires. **(2)**
Donc on a trouvé **n = 2000 => T = 35+5+2000/200 = 50 min,** où T est le temps de parcours pour chaque chauffeur.



Dans le second cas, les automobilistes prennent une décision en considérant chaque route individuelle. Ils doivent choisir, premièrement, entre A-C et A-D:

A-D: 35min;

A-C: $5+n/200 \leq 5+4000/200 = 25$min;

On peut voir que la route A-C sera toujours plus courte que l'autre, donc chaque chauffeur va la choisir. Puis, il y aura une autre décision entre C-B et C-D-B.

C-B: 35min;

C-D-B: $5+5+n/200 \leq 5+5+4000/200 = 30$min; (3)

La décision est encore claire: la route C-D-B est plus rapide. La route finale sera A-C-D-B. En calculent le temps final de parcours, on trouve qu'il est maintenant **T = 25+30 = 55min**

Présentations lors du « Math Youth Forum » à Cluj-Napoca

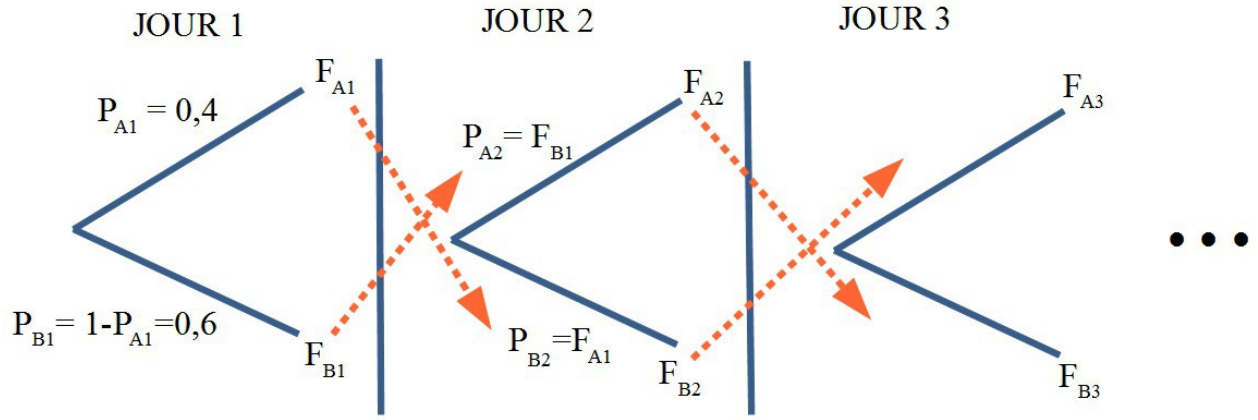
Si nous comparons les deux temps obtenus dans les deux cas, nous observons que le temps nécessaire pour arriver de A à B quand il y a une route supplémentaire est plus long de 5 minutes que dans le cas sans elle.

En conclusion, une route dont le but était d'améliorer les conditions de circulation réussit à faire le contraire. Donc, il y a un paradoxe.

B. Démarche et travaux des élèves de première du Lycée d'Altitude

Nous avons cherché à simuler des comportements automobilistes pour voir leur influence sur le trafic, indépendamment du paradoxe. Nous supposons que les 4000 automobilistes arrivent en même temps et que le choix de chacun ne dépend pas du choix des autres.
Dans le premier cas (sans route supplémentaire), les deux chemins sont équivalents.
Nous avons proposé le modèle suivant :
Nous avons décidé d'associer une probabilité de départ (premier jour) à chaque route. Par exemple on choisit P_A=0,4 pour le chemin A et P_B=0,6 pour le chemin B. Chaque automobiliste choisi un nombre au hasard entre 0 et 1. Si le nombre est inférieur à 0,4 il empruntera le chemin A et sinon le chemin B. Comme les nombres sont choisis au hasard, ces deux probabilités «théoriques» ne sont pas tout à fait vérifiées. On obtient donc deux fréquences observées (une pour chaque route F_B et F_A) différentes plus ou moins proches de la probabilité choisie au départ.

Pour le second jour, nous renouvelons le même mécanisme mais en prenant comme probabilité de la route A la fréquence de la route B du jour d'avant. (4)
Ainsi de suite, nous obtenons ce schéma de fonctionnement :



B.1. Simulation sur tableur

Sur tableur, nous avons créé 4 000 nombres aléatoires compris entre 0 et 1 dans une colonne. On sait que chaque nombre représente un automobiliste et que chaque colonne correspond à un jour. Ainsi avec 647 colonnes de nombres aléatoires nous avons pu simuler le trafic quotidien des routes A et B durant 647 jours consécutifs.

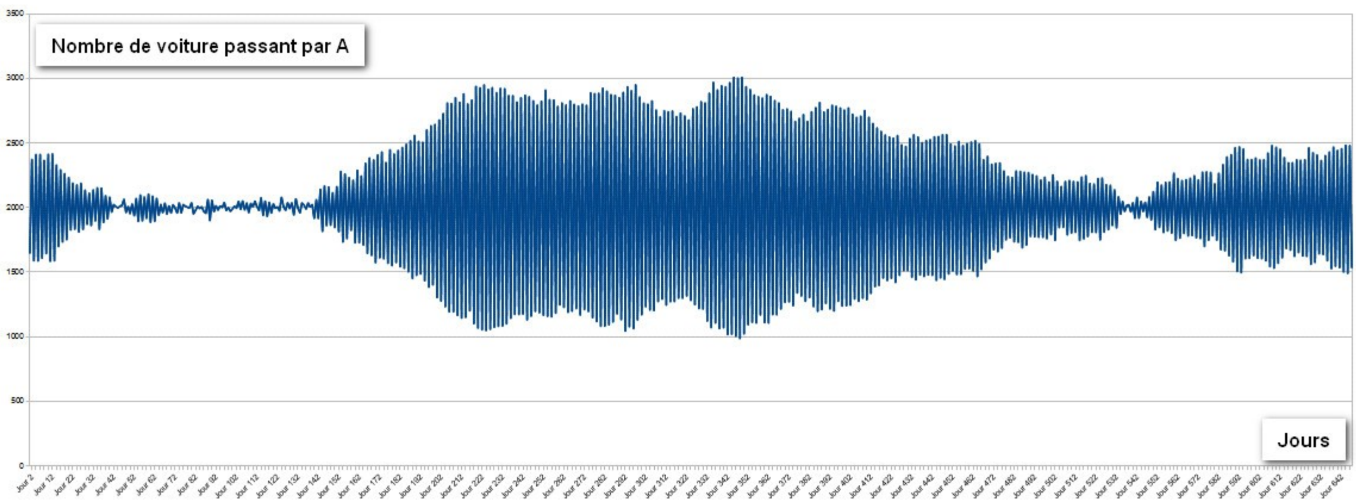


Figure 1 : Évolution du nombre de voitures passant par A sur 647 jours (PA1=0,4)

A partir de ce modèle, nous avons obtenu plusieurs graphiques différents à chaque simulation mais en conservant la même probabilité de départ soit P_{A1}=0,4 (figure 1).

F_{B1}

Nous pouvons constater que le nombre d'automobilistes fluctue autour de 2000 mais n'arrive pas à ce stabiliser. Nous avons fait plusieurs simulations dans les mêmes conditions et nous avons toujours ce phénomène de fluctuation qui ne se stabilise pas (figure 2).

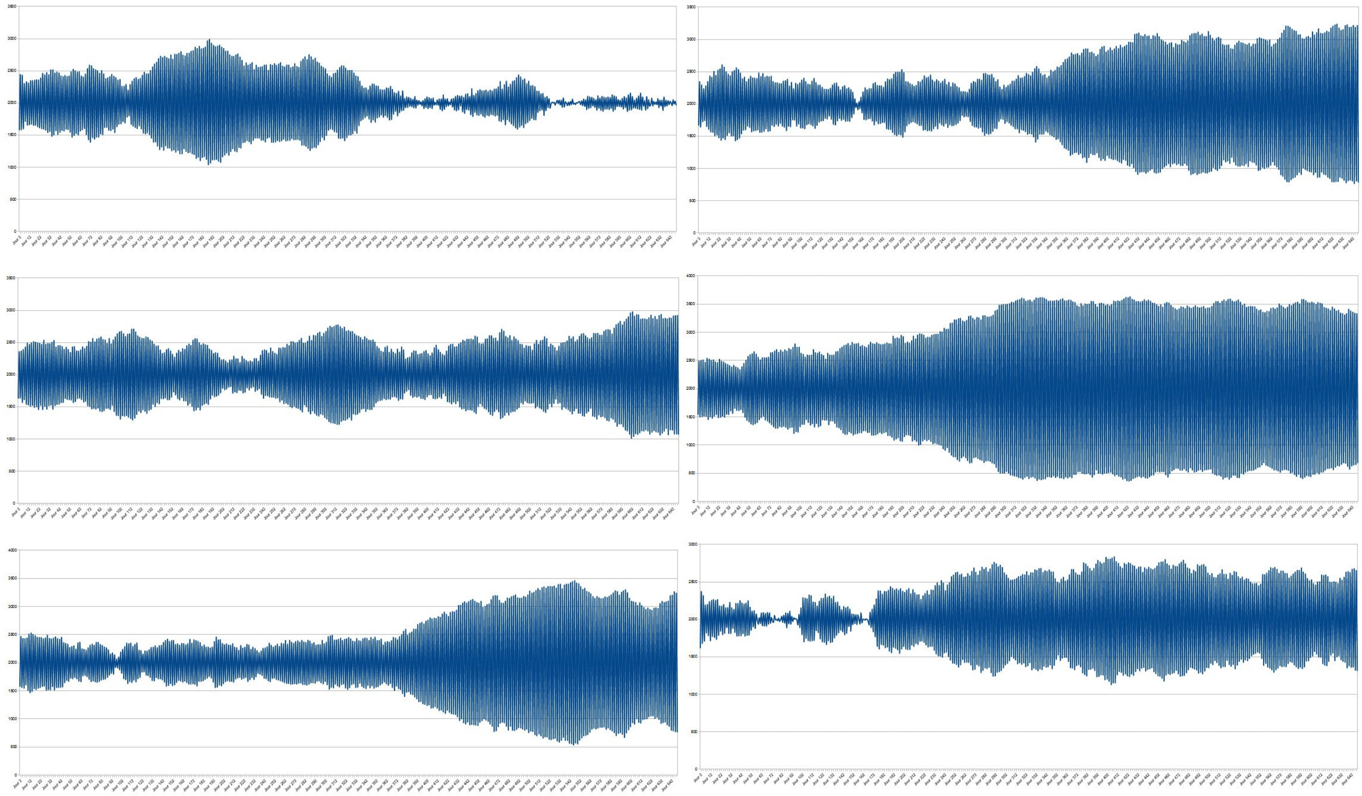


Figure 2 : 6 évolutions comme la figure 1

Questions :
Nous avons pris P_{A1}=0,4, mais que ce passe-t-il si on change cette valeur ? Si nous prenons des extrêmes ? Est-ce que ces valeurs oscillent toujours autour de 2000 ?
Si nous rajoutons la route supplémentaire dans notre modèle, et que l'on affiche le temps moyen, comment va-t-il évoluer ? **(5)**

Présentations lors de la semaine des maths à Briançon

B.2 Simulation avec un logiciel de programmation

Malheureusement la programmation sur tableur ne permet pas de faire suffisamment de simulations, nous avons eu le programme suivant, qui programmé en Python (figure 3) nous permet d'avoir de nombreux résultats.

```
DÉBUT
  \\ Nombre de jour : N
  N=1000
  \\ LA sera la liste du nombre de voiture passant par la route A
  LA=0
  REQUÊTE "Donner PA pour le premier jour ", PA
  POUR JOUR = 1 JUSQU'À N INCRÉMENT 1 FAIRE
    \\ CA va compter les voiture passant par la route A
    CA=0
    POUR VOITURE = 1 JUSQU'À 4000 INCRÉMENT 1 FAIRE
      SI ALEA()<=PA ALORS
        CA=CA+1
      FINSI
    FINPOUR
    LA[JOUR]=CA
    PA=(4000-CA)/4000
    ÉCRIRE "Jour ",JOUR," nombre de voiture sur la route A ",CA
  FINPOUR
FIN
```

```python
from random import random
from math import *

# N nombre de jour, donc de simulation
N=1000
# LA va être la liste du nombre de voiture prenant la route A
LA=[0]*(N+1)
# PA sera la probabilité de la route A
PA=0.1
for JOUR in range(N):
    CA=0
    for VOITURE in range(4000):
        if (random()<PA):
            CA=CA+1
    LA[JOUR+1]=CA
    PA=(4000-CA)/4000
    print (CA)
```

Figure 3 : programme de simulation en python.

Nous avons alors remarqué que le phénomène de fluctuation persiste mais quand l'on prend une petite valeur de PA1, par exemple 0,1, les amplitudes de fluctuation étaient plus grandes.
Il arrive que nous ayons la série 4000, 0, 4000, 0, 4000... en effet si à un moment il y a 4000 voitures qui prennent la route A, la probabilité de la reprendre le jour d'après sera de 0 et le jour encore après elle sera de 4000, ainsi de suite.

Propriété : s'il existe un jour où PA=0 ou 1 alors les fréquences vont osciller 0,1, 0, 1, 0..... **(6)**

C. Démarche et travaux des élèves de seconde

Comme nos collègues de première, nous avons cherché à simuler des comportements automobilistes pour voir leur influence sur le trafic.
Nous avons modélisé le problème de la manière suivante :
Le premier jour, les voitures choisissent une voie ou l'autre de manière aléatoire. Par exemple : 642 sur la route D et 3358 sur la route C.
Le second jour, comme le flux était fluide celles qui étaient sur la route où il y avait le moins de monde y reste. Par contre, la moitié de ceux qui étaient sur la route où il y avait le plus de monde ont trouvé le trajet trop long, et bascule sur l'autre route. (ex : route D : 642+3358/2=2321 ; route C : 3358/2=1679)
Les jours suivants, l'opération se répète. Dans ce cas là, cela se stabilise vers le 12ème jour, et c'est parfaitement stabilisé le 31ème jour.

Exemple (les valeurs sont arrondies à l'unité à l'affichage)

	1° jour	2° jour	3° jour	4° jour	5° jour	6° jour	7° jour	8° jour	9° jour	10° jour	11° jour
Route D	3274	1637	2819	1409	2705	1352	2676	1338	2669	1335	2667
Route C	726	2363	1182	2591	1295	2648	1324	2662	1331	2665	1333

Le premier jour il y a eu 3274 voitures sur la route D, le jour suivant la moitié des voitures a pris la route D car 3274>726.
Pour la route C il y en a eu 726 véhicules le premier jour. Ainsi, le deuxième jour, au 726 se sont rajouté la moitié de 3274, soit 2363 voitures au total.

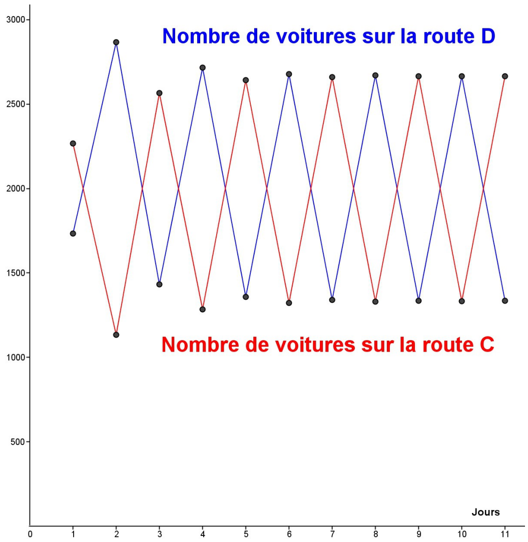


Figure 4 : représentation des valeurs de l'exemple

Observation :
Après avoir fait de nombreux exemples, nous observons qu'au bout d'un certain nombre de jours nous

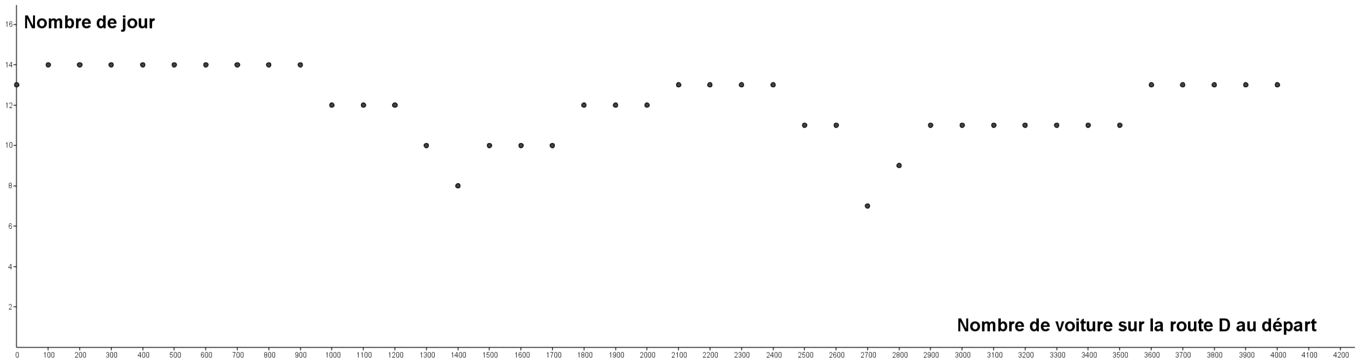


Figure 5 : nombre de jour avant d'arriver à 2667 en fonction du nombre de voiture au départ

avons en alternance 2667/1333 (2/3-1/3)

Nous avons représenté, en fonction du nombre de voitures le premier jour sur la route D, le nombre de jours avant que nous arrivions à 2667 sur la route D (figure 5).

Pour comprendre le phénomène, nous avons essayé de le poser en «formules ».
Si on pose x le nombre de voitures ayant pris la route D le premier jour alors le nombre de voitures prenant la route C le premier jour est de (4000-x). Si on suppose que $x > 2000$, alors nous avons pour les jours suivants les formules de la figure 6.

Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5	Jour 6	Jour 7	Jour 8	Jour 9	Jour 10	Jour 11	Jour 12	Jour 13
x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x+8000}{4}$	$\frac{x+8000}{8}$	$\frac{x+40000}{16}$	$\frac{x+40000}{32}$	$\frac{x+168000}{64}$	$\frac{x+168000}{128}$	$\frac{x+680000}{256}$	$\frac{x+680000}{512}$	$\frac{x+2728000}{1024}$	$\frac{x+2728000}{2048}$	$\frac{x+10920000}{4096}$
$4000-x$	$\frac{-x+8000}{2}$	$\frac{-x+8000}{4}$	$\frac{-x+24000}{8}$	$\frac{-x+24000}{16}$	$\frac{-x+88000}{32}$	$\frac{-x+88000}{64}$	$\frac{-x+344000}{128}$	$\frac{-x+344000}{256}$	$\frac{-x+1368000}{512}$	$\frac{-x+1368000}{1024}$	$\frac{-x+5464000}{2048}$	$\frac{-x+5464000}{4096}$

Figure 6 : évolutions des routes D et C

Pour simplifier ces formules, nous avons utilisé la partie calcul formelle de GéoGébra (figure 7)

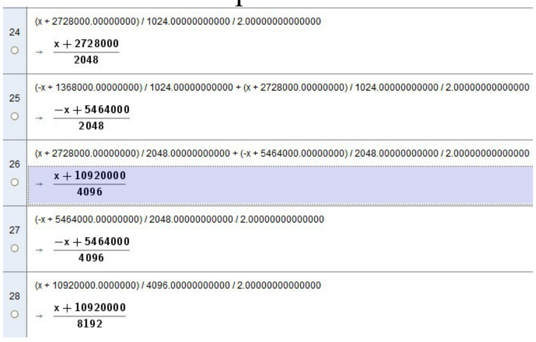
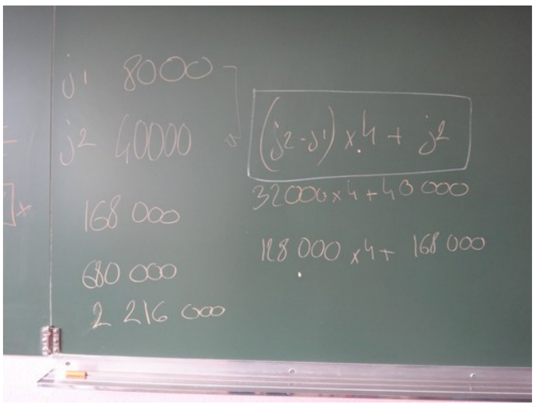


Figure 7 : calcul formel pour simplifier les formules

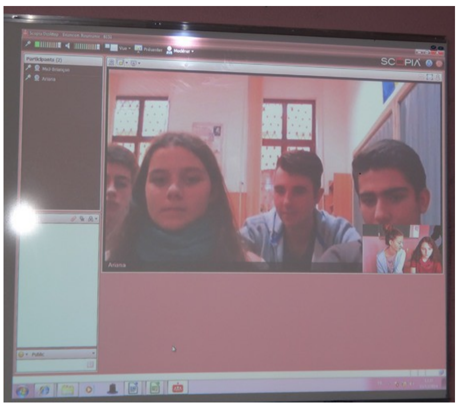
Au vu de ces résultats, nous avons remarqué que le dénominateur était de la forme 2^n où n est le numéro du jour.
Les numérateurs sont de la forme x+valeur où la valeur évolue ainsi

<table>
<tr><td>Jour</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr>
<tr><td>Valeur</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">8000</td><td colspan="2">40000</td><td colspan="2">168000</td><td colspan="2">680000</td><td colspan="2">7728000</td><td>10920000</td></tr>
</table>

Nous avons fait plusieurs essais pour trouver la logique dans la progression ci-dessus, y compris une représentation graphique dans un repère semi-logarithmique.
Mais finalement, Lucie a proposé la formule suivante :
$v_{n+1} = (v_n - v_{n-1}) \times 4 + v_n$ avec $v_1=0$ et $v_2=8000$



Expérimentation sur tableau



Echanges par vidéo-conférence

Nous l'avons testée :

<table>
<tr><td>Jour</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Valeur</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">8000</td><td colspan="2">40000</td><td colspan="2">168000</td><td colspan="2">680000</td><td colspan="2">7728000</td><td colspan="2">10920000</td></tr>
<tr><td>n</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">7</td></tr>
<tr><td>v_n</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">8000</td><td colspan="2">40000</td><td colspan="2">168000</td><td colspan="2">680000</td><td colspan="2">7728000</td><td colspan="2">10920000</td></tr>
<tr><td>l</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

$v_3=(v_2-v_1)\times 4+v_2=(8000-0)\times 4+8000=40000$
$v_4=(v_3-v_2)\times 4+v_3=(40000-8000)\times 4+40000=168000$

La formule est $U_{l+1}=(U_l)\times 4-8000$, sauf pour le premier jour. (7)

Par exemple, $U_2=U_1\times -8000=8000\times 4-8000=24000$ ou
$U_4=U_3\times 4-8000=24000\times 4-8000=344000$

<table>
<tr><td>Jour</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>U_l</td><td>0</td><td colspan="2">8000</td><td colspan="2">24000</td><td colspan="2">88000</td><td colspan="2">344000</td><td colspan="2">1368000</td><td colspan="2">5464000</td><td>21848000</td></tr>
</table>

En conclusion nous devrions être capable de fournir la formule de l'évolution du trafic selon notre modèle et de peut-être comprendre ce phénomène d'oscillation. Malheureusement le temps et la bonne manipulation des outils mathématiques, les suites dans notre cas, ne nous ont pas permis de conclure.

Notes d'édition :
(1) Les élèves ont étudié les temps totaux de parcours pour chaque situation. La conclusion est que la route supplémentaire conduit à l'augmentation du temps du parcours, en créant un paradoxe à cause du caractère égoïste de chaque chauffeur.
Ils ont ensuite cherché à modéliser le comportement des automobilistes qui empruntent le même trajet jour après jour, et qui change de route en fonction des embouteillages de la veille.
(2) Soit n1 le nombre de chauffeurs empruntant la route A-C et n2 le nombre de chauffeurs empruntant la route D-B.
Si un chauffeur emprunte la route A-C, il ne peut pas emprunter la route D-B (et vice-versa). Par ailleurs, chaque chauffeur emprunte nécessairement une des deux route A-C ou D-B.
On a donc n1+n2=4000 (nombre total de chauffeurs).
Chaque chauffeur choisit la route la plus courte, en choisissant le minimum entre
A-C-B-> 5+n1/200 + 35
A-D-B->5+n2/200 +35
Si n1>2000, alors n2<2000<n1, et un chauffeur choisit la route A-D-B. Réciproquement, si n2>2000, un chauffeur va choisir la route A-C-B.
Ainsi chaque chauffeur choisit la route où il y a le moins d'usager, ce qui a pour effet d'équilibrer les deux routes, avec n1=n2=4000/2= 2000.
(3) Il faut remarquer ici que la relation précédente n1+n2=4000 n'est plus vrai: chaque chauffeur peut soit utiliser aucune des deux routes A-C et D-B, ou au contraire les utiliser toutes les deux. On a donc seulement 0 <= n1+n2 <= 8000, (et toujours 0<=n1<=4000, 0<= n2 <= 4000).
On peut remarquer enfin que le paradoxe n'est plus vrai si le nombre d'usager est maintenant de 6000.
(4) Ainsi, plus une route sera fréquenté un jour, plus on choisira l'autre route avec une forte probabilité le jour d'après.

(5) Cette question n'a pas été traitée.
(6) On peut montrer (mais c'est un résultat beaucoup plus dur) qu'un tel jour finit toujours par arriver (possiblement au bout d'un temps très long !).
(7) Si $U_l = \nu_{l+1} - \nu_l$
alors la bonne relation est
$U_{l+1} = 4\mathrm{U}_l$, avec U_1 =8000.
Donc $U_l = 8000 \times 4^{l-1}$.

Et $\nu_l = \sum_{k=1}^{l-1} (\nu_{k+1} - \nu_k)$
= $\sum_{k=1}^{l-1} U_k$
= $8000 \times \sum_{k=1}^{l-1} 4^{k-1}$
= $8000 \times (4^{l-1})/3$
= $2000 \times 4^l / 3$

On obtient donc finalement pour les valeurs du tableau de la figure 6
pour les jours impairs:
$2000 \times 2^n / (2^n \times 3) = 2000/3$
pour les jours pairs:
$2000 \times 2^n / (2^n \times 2 \times 3) = 1000/3$