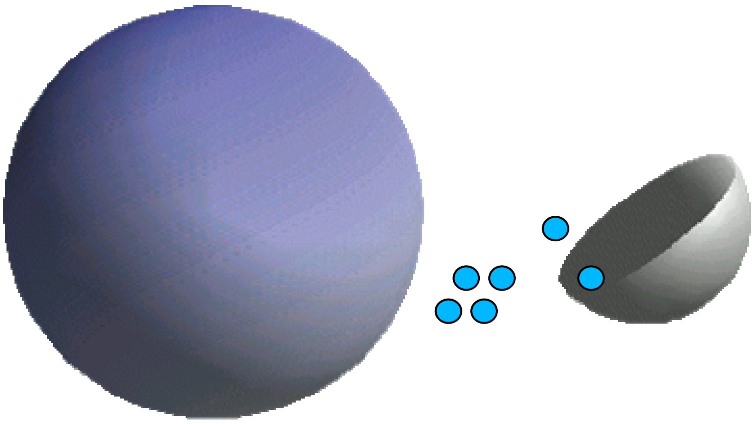
# Comment répartir le plus uniformément possible 13points sur une sphère?

Le problème s'est posé lorsqu'on a cherché à fabriquer un satellite facilement observable depuis la Terre. Il fallait placer un certain nombre de miroirs, de façon optimale, sur cette sphère de manière que, quelle que soit la position du satellite, un des miroirs soit dirigé vers la Terre.



Répartir le plus uniformément possible 13 points sur une sphère signifie les répartir afin que la distance minimale entre les points soit la plus grande possible.
Nous avons élargi le sujet à : comment répartir le plus uniformément possible des points sur une sphère ?
Ainsi nous avons cherché pour 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13 et 14 points.

## **Travail réalisé par :**

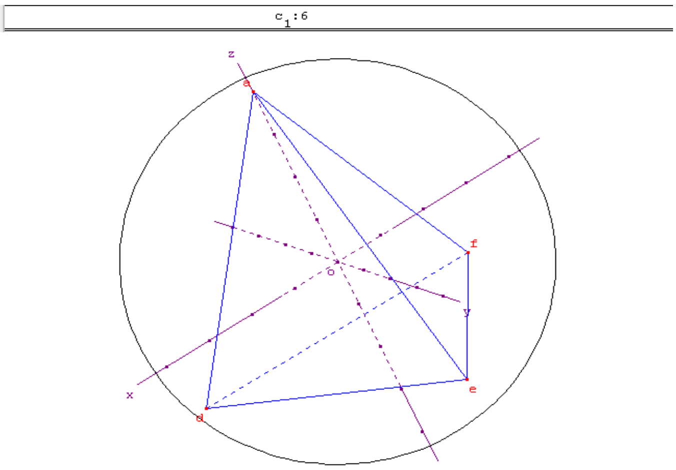
*Marjorie Battude Emilie Beyria Aude Bourdeau Aurelie Charmeau Chloé Cornuejols Caroline Henrion Marie Lécureux Guillaume Marical Julie Roger Raphaëlle Sacchierro*

2004 Lycée PP Riquet, Saint Orens de Gameville
Lycée Ozenne, Toulouse

## Comment avons-nous procédé?

Après avoir réfléchi sur notre sujet, nous avons essayé de placer des points sur une sphère en polystyrène en les répartissant le mieux possible à l'oeil nu. Nous avons modélisé nos premières idées sur l'ordinateur grâce au logiciel de représentation de mathématiques en 3D : Géospace.
Nous avons alors eu de nouvelles idées que nous avons parfois réussi à prouver.

## A PARTIR DE SOLIDES

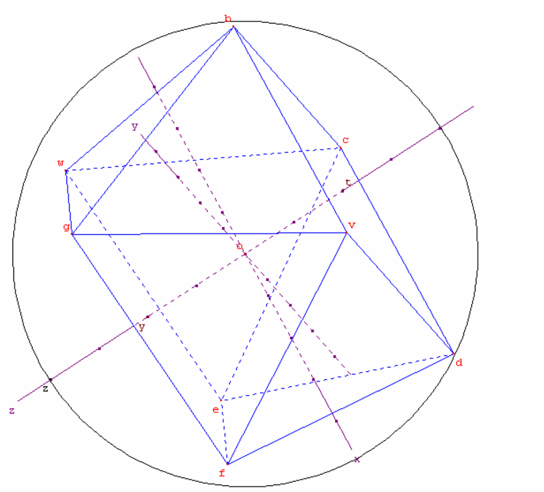


**Pour 4 points** la solution est le Tétraèdre régulier.
Par le calcul nous avons trouvé que la mesure d'une arête est :

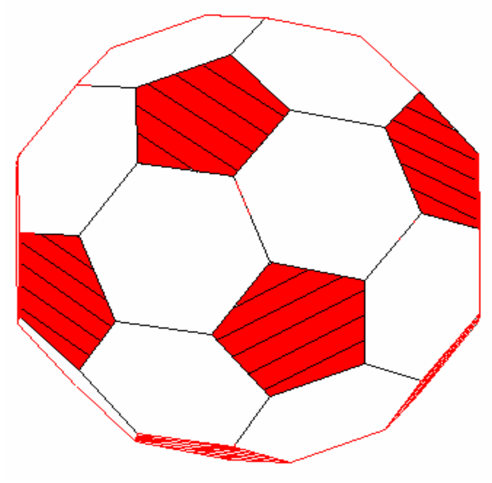
$$ad = 2 \times r \times \sqrt{\frac{2}{3}}$$

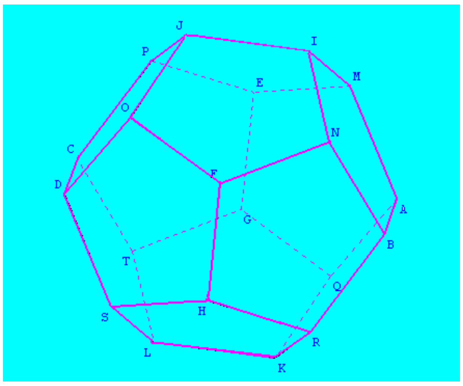
où r est le rayon de la sphère

**Pour 8 points** L'antiprisme à base carrée.
Pour nous au départ, la solution à 8 points était le cube.
Puis nous avons découvert que en considérant deux faces parallèles de ce cube,
si nous faisions pivoter l'un des carrés par rapport à l'autre,
les arêtes reliant ces carrés s'allongeaient alors que la plus petite longueur (le côté d'un carré) ne diminuait pas.Par la suite nous avons découvert que le solide ainsi formé se nommait l'antiprisme à base carré.



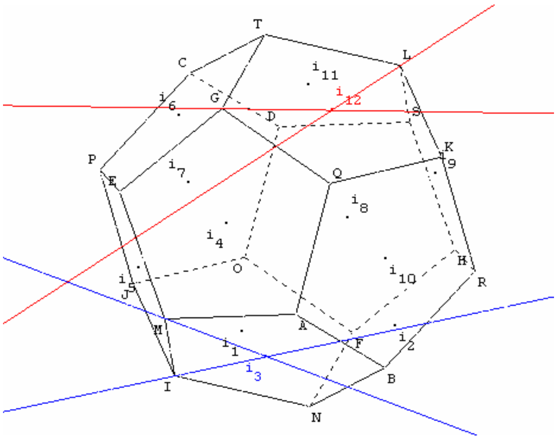
**<u> solution à 12 points</u>** Une idée nous est venue en regardant un **match de foot** :
Un ballon ne serait-il pas composé de pentagones ?
**Rapidement, un problème s'est posé : un ballon de foot n'est pas composé que de pentagones !**

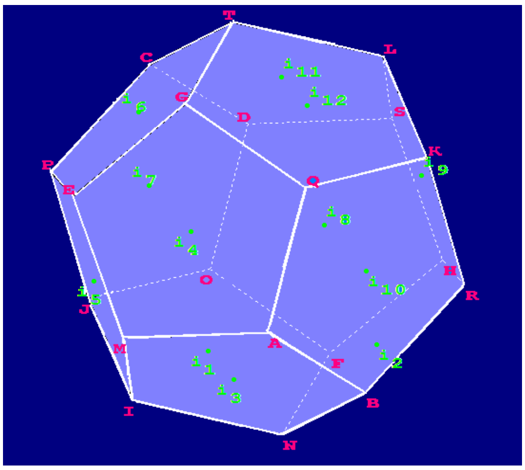




En pensant aux pentagones, nous nous sommes rendu compte qu'il existe un polyèdre convexe nommé **Dodécaèdre** composé de 12 pentagones.

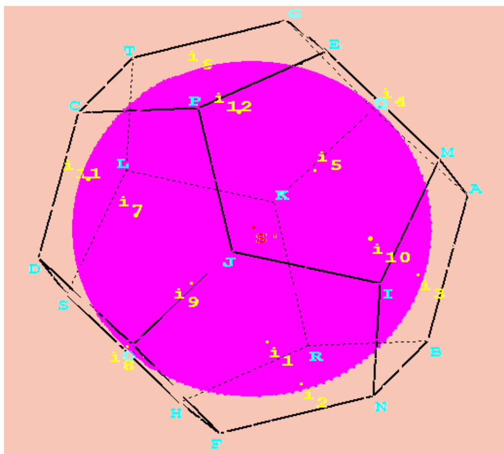
Sur chaque pentagone, on construit son centre qui sera *la position d'un miroir*.
Pour placer ces points, on a dessiné deux médiatrices sur chaque face



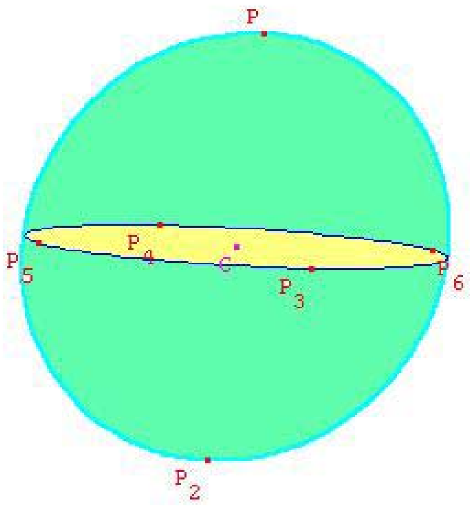


On obtient alors un dodécaèdre avec 12 points les plus éloignés les uns des autres !

Pour finir, on trace la sphère inscrite dans le dodécaèdre, tangente à chacun de ces 12 points.

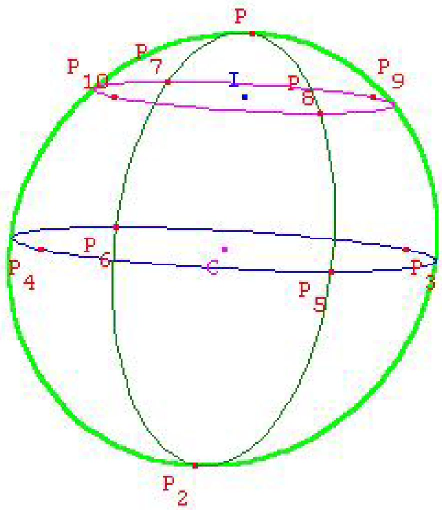


**Les 12 miroirs** se situeront au niveau des points.

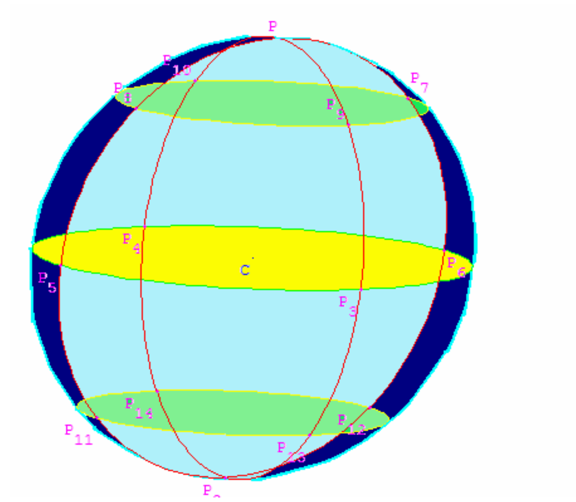



## <u>Solution à 14 points</u>

Pour cette solution on a pris pour modèle *les lignes imaginaires* de notre planète
Pour commencer, on a placé 2 points ($P$ & $P_2$ ) diamétralement opposés que l'on a nommé : **pôles.**
On a ensuite tracé l'équateur. Sur celui-ci, on a créé un point libre ($P_3$), son symétrique par rapport à C ( le centre de la sphère) ($P_4$) et 2 autres par rotation de 90° ($P_5$ & $P_6$).

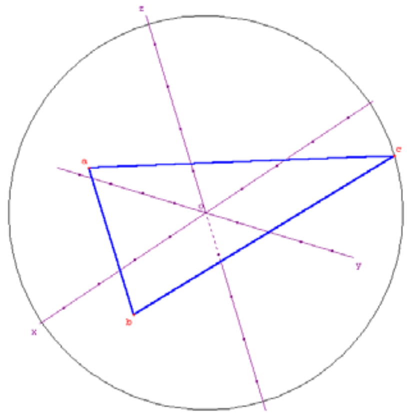



Puis, on a construit, les méridiens passant par $P_3$, $P_4$, $P_5$ et $P_6$.
On place ensuite $P_7$ à mi–chemin entre P et $P_6$, puis on a créé le parallèle passant par $P_7$. $P_8$ $P_9$ & $P_{10}$ sont les points d'intersections de ce parallèle et des méridiens précédents.



Ensuite, on a créé le parallèle sud symétrique au parallèle nord par rapport à C (le centre de la sphère).On obtient alors $P_{11}$ , $P_{12}$ , $P_{13}$ & $P_{14}$ comme points d'intersection entre le parallèle sud et les méridiens.
Les 14 points ainsi obtenus nous semblent représenter la meilleure solution pour 14 points.

# A PARTIR DE FIGURES PLANES



**Pour 3 points** : la solution est le triangle équilatéral

Notre démonstration :

3 points définissent un plan.

Dans une sphère, un plan est défini par un cercle.

3 points placés sur la périphérie d'une sphère déterminent donc un cercle.

Pour que ces 3 points soient le plus éloignés possibles sur le cercle, il faut que les distances qui les séparent soient égales (nous l'admettons).

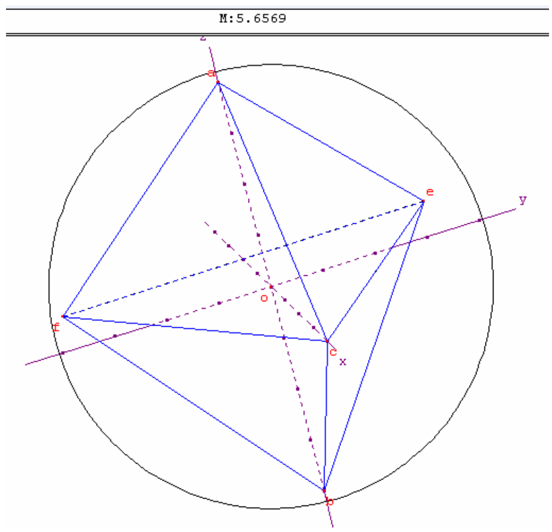
Ces 3 points doivent former un triangle équilatéral qui sera inscrit dans le cercle.

Pour que le triangle soit le plus grand possible, il faut que le cercle ait le plus grand diamètre possible.

Le plus grand diamètre sera celui de la sphère.

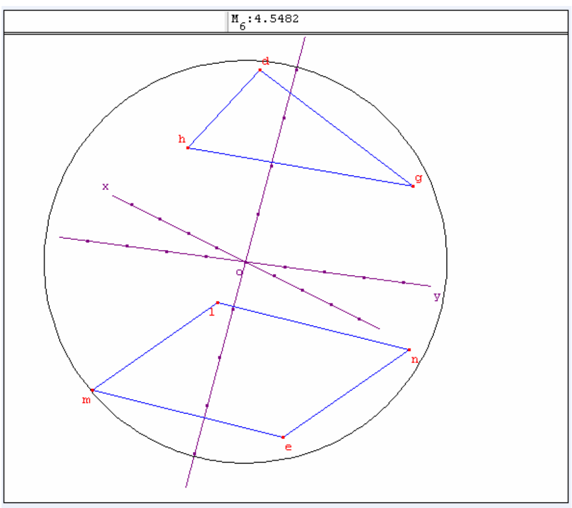
Il faut donc que les 3 points forment un triangle équilatéral sur un plan médian de la sphère.

**Pour 5 points** : la meilleure solution que nous ayons trouvée est un triangle dans un plan médian avec deux pôles symétriques

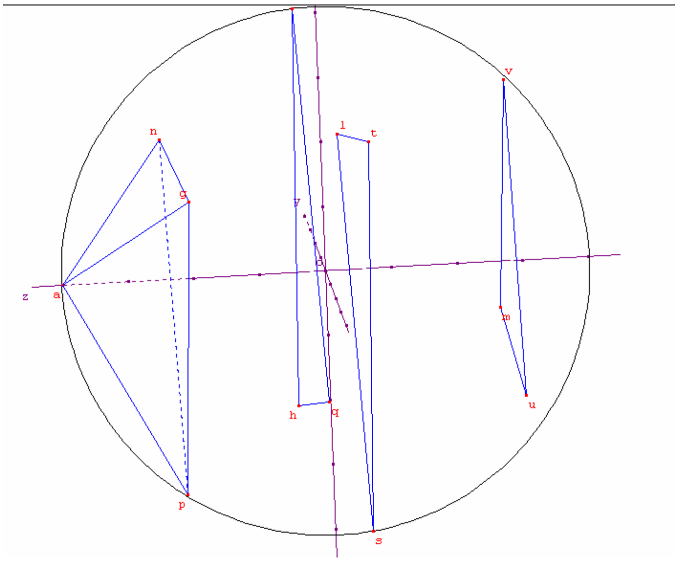



**Pour 7 points**

Expérimentalement, nous avons trouvé



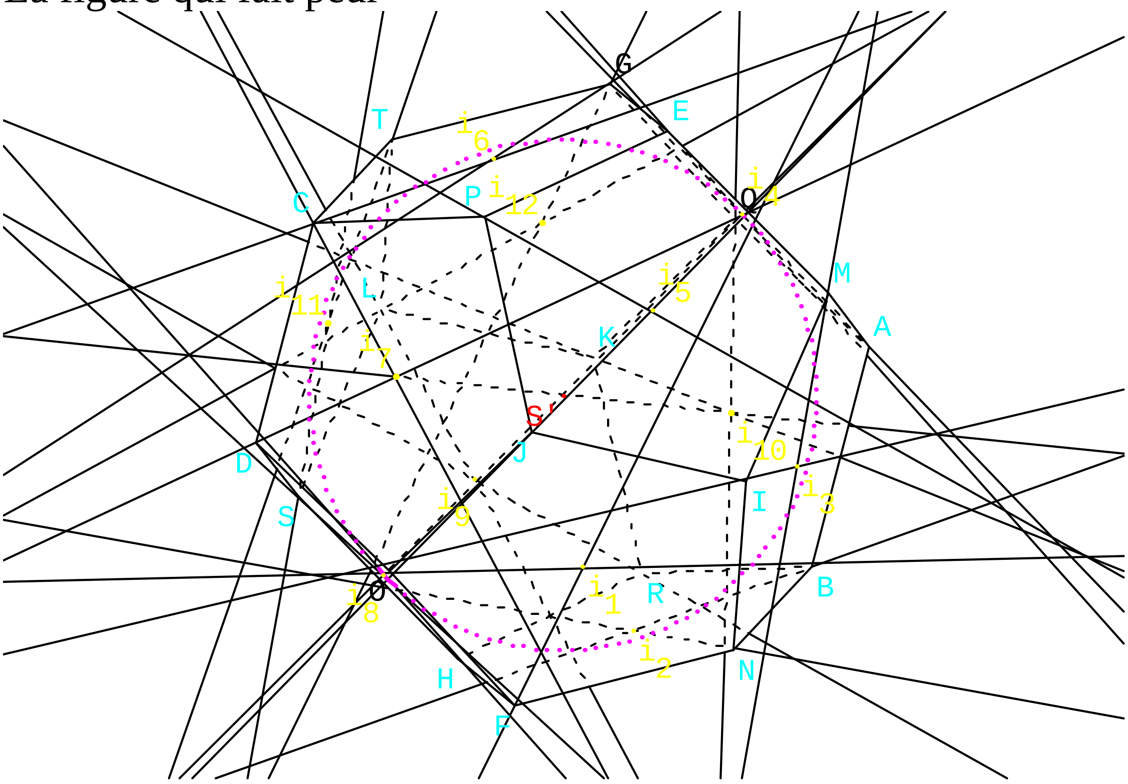
comme meilleure solution un carré et un triangle, inscrits dans des plans inclinés l'un par rapport à l'autre.



## **Pour 13 points:**

Nous avons réalisé de nombreuses figures à 13 points puis nous avons comparé les longueurs minimales de leurs arêtes.
Voici la figure sur laquelle les points semblent le mieux répartis
Les autres figures sont composées de (de la meilleure à la moins bonne) :
- 3 carrés et un pôle
- un pentagone et 2 carrés
-2 carrés un triangle et 2 pôles
-un pentagone 2 triangles et 2 pôles

Et pour finir :
La figure qui fait peur



En conclusion, nous ne savons toujours pas quelle est la répartition idéale pour 13 points mais nous avons avancé dans notre recherche en apprenant à nous servir de divers outils et en utilisant plusieurs techniques.
A votre tour de chercher....