Découpages pâtissiers

par

Noélie CARRETERO, Alix PASCO, Clément RIBAT, Marc ROCHER, Marion TUVACHE
élèves du Lycée Pape Clément à Pessac (Gironde)
&
Guillaume BARZANTI, Matthieu CALES, Arnaud FRAYRET, Georges GOETZ
élèves du Lycée Daguin à Mérignac (Gironde)

Jumelage MATh.en.JEANS entre le lycée Daguin de MÉRIGNAC et le lycée Pape Clément de PESSAC, année scolaire 2004-2005

Enseignants: Bernard PRIVAT, Catherine RANSON (Lycée Pape Clément)
& Yves SARRAT (Lycée Daguin)

Chercheur: Eric SOPENA (LaBRI, Université Bordeaux I TALENCE)

[Article en cours d'analyse et de vérification : les passages entre crochets sont des éditeurs]

SOMMAIRE

INTRODUCTION

1. Enoncé

On considère un (des) gâteau(x), que l'on se propose de couper plusieurs fois, avec un couteau dont la lame est suffisamment grande. Combien de parts au maximum est-il possible d'obtenir en un nombre donné *n* de coups de couteau (ou « découpes ») ?

2. Définitions

Le gâteau :
Un gâteau est assimilé à un disque sans épaisseur. Il peut être découpé autant de fois que l'on souhaite, les parts obtenues n'ont pas de taille minimale.
La lame du couteau a une longueur supérieure ou égale au diamètre du gâteau.

Le beignet :
Un beignet est délimité par deux cercles concentriques. Il n'a pas d'épaisseur, et peut donc être assimilé à un « gâteau troué ».
La lame du couteau a une longueur supérieure ou égale au diamètre du cercle formant la limite extérieure du beignet.

Alignements :
Les alignements sont formés de beignets ou de gâteaux. Leurs centres sont alignés, les pâtisseries ne sont pas toutes nécessairement de même diamètre.
On considère alors que le couteau a une longueur suffisante pour couper toutes les pâtisseries, il est alors assimilé à une droite.

En cercle :
Les pâtisseries sont disposées de telle manière que leurs centres sont sur les sommets d'un polygone régulier.
Elles ont alors le même diamètre.

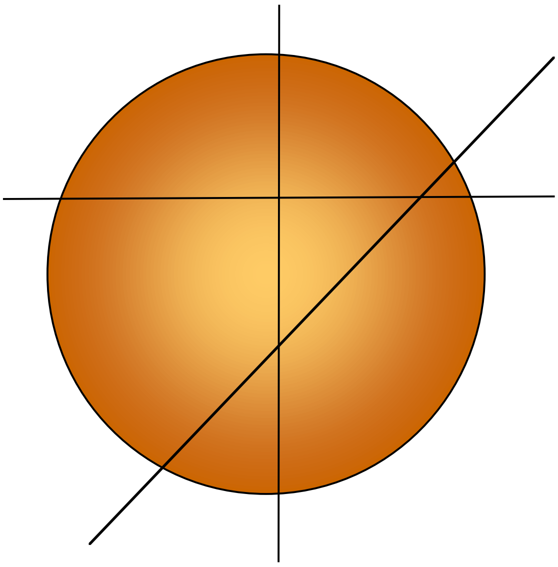
3. Notations

On notera par la suite n le nombre de coups de couteau donnés, $f(n)$ (ou u_n suivant la commodité) le nombre maximal de parts formées avec ces n coups de couteaux. On changera ces notations quand les gâteaux seront disposés en cercle et on les précisera dans cette partie.

I. Avec des gâteaux

I.1. Avec un seul gâteau

I.1.1. Observation et conjecture



Soit un gâteau, que l'on découpe.
Au nombre de découpes effectuées (*n*), on associe le nombre maximal de parts que l'on peut créer (*f(n)*).
Ainsi, avec :

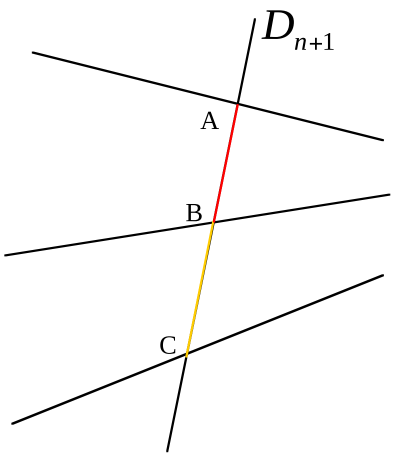
- 1 découpe, on obtient 2 parts,
- 2 découpes, on obtient 2+2 = 4 parts
- 3 découpes on obtient 4+3 = 7 parts

Il semblerait donc que la relation suivante soit vérifiée : si l'on a *f(n)* parts avec *n* coups de couteaux, alors $f(n+1) = f(n) + n+1$.

Par sommation, on aurait alors :

$$f(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

I.1.2. Démonstration



Dans le plan, soit un disque de diamètre infini, qui représente le gâteau. Soient n droites, soit une $n+1^{\text{ème}}$ droite, nommée D_{n+1}, parallèle avec aucune des droites précédentes.
Le long de cette droite sont délimités par les n précédentes droites des espaces distincts, $n+1$ au total.
Sur la figure ci-contre, le segment [BC] est inscrit dans un espace particulier, le segment [AB] dans un autre espace. Chaque espace correspond à une part de gâteau.
D_{n+1} coupe chacune de ces parts en deux : elle en forme donc $n+1$.
On a donc bien :

$$\boldsymbol{f(n+1) = f(n) + n + 1}$$

I.2. Avec des gâteaux alignés

I.2.1. Observation et conjecture

On appelle k **le nombre de gâteaux alignés** et U_n **le nombre maximal de parts de gâteaux** faites avec n **coups de couteau**. On considère que la longueur de sa lame est infiniment grande.

• Lorsque ***k* = 2,** on obtient : - **2 parts** pour n = 0 - **4 parts** pour n = 1 - **7 parts** pour n = 2 - **11 parts** pour n = 3 - **16 parts** pour n = 4 - **22 parts** pour n = 5	• Lorsque ***k* = 3**, on obtient : - **3 parts** pour n = 0 - **6 parts** pour n = 1 - **10 parts** pour n = 2 - **15 parts** pour n = 3 - **21 parts** pour n = 4 - **28 parts** pour n = 5

On remarque que l'on peut écrire le nombre de parts formées à chaque coup de couteau avec ***k* = 2 et *k* = 3** comme la somme : $$U_n = U_{n-1} + n + 1$$

Pour ***k* = 2** $U_0 = 2$ $U_1 = 4 = U_0 \underbrace{+2}_{\text{1 terme}}$ $U_2 = 7 = U_1 + 3 = U_0 \underbrace{+2+3}_{\text{2 termes}}$ $U_3 = 11 = U_2 + 4 = U_0 \underbrace{+2+3+4}_{\text{3 termes}}$	donc en généralisant : $U_n = U_0 \underbrace{+(2+3+4+\ldots+n+1)}_{\text{n termes}}$ $= 2 +(2+3+4+\ldots+n+1)$ $= 2 + \frac{(n-1)(n+4)}{2}$ $= \frac{(n-1)(n+4)+4}{2}$

Pour ***k* =3** $U_0 = 3$ $U_1 = 6 = U_0 \underbrace{+3}_{\text{1 terme}}$ $U_2 = 10 = U_1 + 4 = U_0 \underbrace{+3+4}_{\text{2 termes}}$ $U_3 = 15 = U_2 + 5 = U_0 \underbrace{+3+4+5}_{\text{3 termes}}$	donc en généralisant : $U_n = U_0 \underbrace{+(3+4+5+\ldots+n+2)}_{\text{n termes}}$ $= 3 +(3+4+5+\ldots+n+2)$ $= 3 + \frac{n(3+n+2)}{2}$ $= \frac{n(n+5)+6}{2}$

On peut conjecturer pour ***k* quelconque** $U_0 = k$ $U_1 = U_0 \underbrace{+k}_{\text{1 terme}}$ $U_2 = U_1 + (k+1) = U_0 \underbrace{+k+(k+1)}_{\text{2 termes}}$ $U_3 = U_2 + (k+2) = U_0 \underbrace{+k+(k+1)+(k+2)}_{\text{3 termes}}$	donc en généralisant : $U_n = U_0 \underbrace{+(k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n-1))}_{\text{n termes}}$ $= k +(k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n-1))$ $= k + \frac{n(k+n-1+k)}{2}$ $= \frac{2k+n(2k+n-1)}{2}$

I.2.2. Démonstration

On peut considérer chaque coupe comme une droite qui sépare les gâteaux en plusieurs parties. Pour faire le maximum de parts, les droites peuvent toutes être sécantes dans le même gâteau. Elles forment alors $(1+\frac{n(n+1)}{2})$ parts dans le premier gâteau (formule pour 1 gâteau) et $(n+1)$ parts dans les gâteaux restants donc, dans les $(p-1)$ gâteaux.

On peut établir la formule suivante :

pour ***k* quelconque**

$$\boxed{U_n = \frac{n(n-1)}{2} + k(n+1)}$$

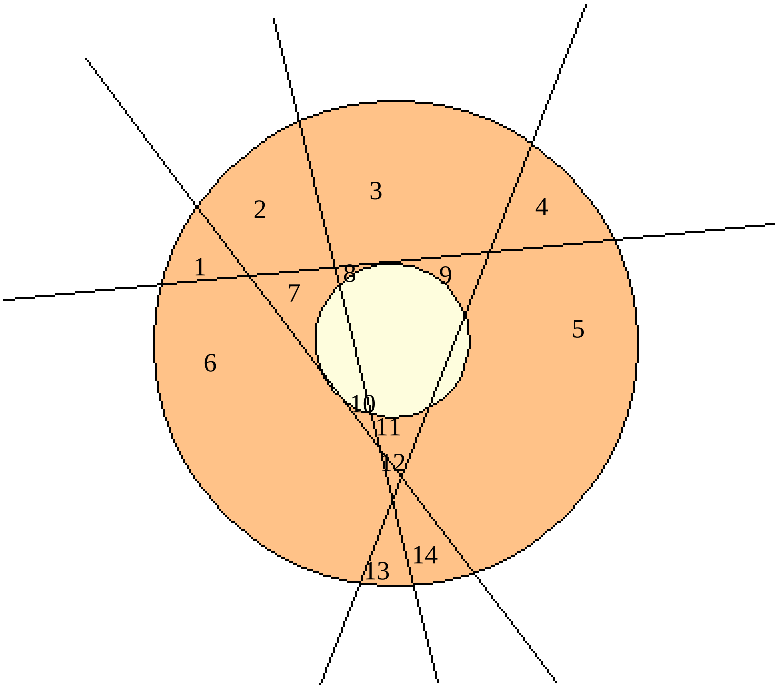
Remarque : On retrouve bien la formule de la conjecture développée.

II. Avec des beignets

II.1. Avec un beignet

II.1.1. Observation et conjecture

Soit f (n) le nombre maximal de parts faites avec n coups de couteau. On considère que la longueur de sa lame est infiniment grande.



On obtient les résultats suivants :

f (0) = 1
f (1) = 2
f (2) = 5
f (3) = 9
f (4) = 14

On remarque que :

f (1) = 2 f (2) = 2 + 3 f (3) = 2 + 3 + 4 f (4) = 2 + 3 + 4 + 5	et donc en généralisant : $f(n) = 2+3+4+\ldots+(n+1)$ $= n\dfrac{(2+n+1)}{2}$ $= \dfrac{n(n+3)}{2}$

II.1.2. Démonstration

La $(n+1)$ième droite définit $(n+2)$ parts supplémentaires:

- 2 parts qui proviennent de la coupure avec le cercle intérieur
- et n parts (1 part pour chacune des n droites précédentes).

d'où la relation de récurrence: $f(n+1)= f(n) + n + 2$

Par sommation, on obtient alors la relation suivante liant nombre de découpes et nombre de parts :

$$\begin{cases} f(n) = \dfrac{n(n+3)}{2} & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

II.2.Avec k beignets alignés :

II.2.1.Observation et conjecture

Soit $f_k(n)$ le nombre maximal de parts faites avec *n* coups de couteau dans *k* beignets alignés. On considère que la lame du couteau est infiniment grande.

on obtient les résultats suivants :

pour ***k* = 2**	$f_2(0) = 2$ $f_2(1) = 4$ $f_2(2) = 9$ $f_2(3) = 15$ $f_2(4) = 22$	pour ***k* = 3**	$f_3(0) = 3$ $f_3(1) = 6$ $f_3(2) = 13$ $f_3(3) = 21$ $f_3(4) = 30$

On remarque que :
- pour *k* = 2, le nombre maximal de parts est égal au nombre de parts pour un beignet $+1\times 2n$
- pour *k* = 3, le nombre maximal de parts est égal au nombre de parts pour un beignet $+2\times 2n$

On peut donc généraliser en disant que pour *k* beignets alignés, le nombre maximal de parts est égal au nombre de parts pour un beignet $+(k-1)\times 2n$,

c'est à dire $f_k(n) = f_1(n) + (k-1)\times 2n$

or $f_1(n) = \dfrac{n(n+3)}{2}$

donc
$$\begin{aligned} f_k(n) &= \frac{n(n+3)}{2} + (k-1)\times 2n \\ &= \frac{n(n+3)+4n(k-1)}{2} \\ &= \frac{n(n+3+4k-4)}{2} \end{aligned}$$

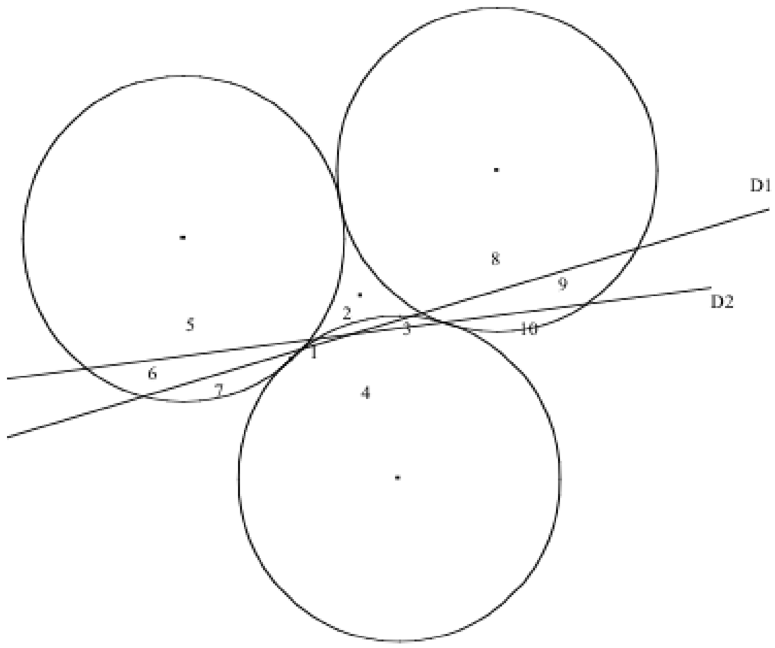
$$f_k(n) = \frac{n(n+4k-1)}{2} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

Nous n'avons pas réussi à trouver la démonstration.

III. Avec des gâteaux en cercle

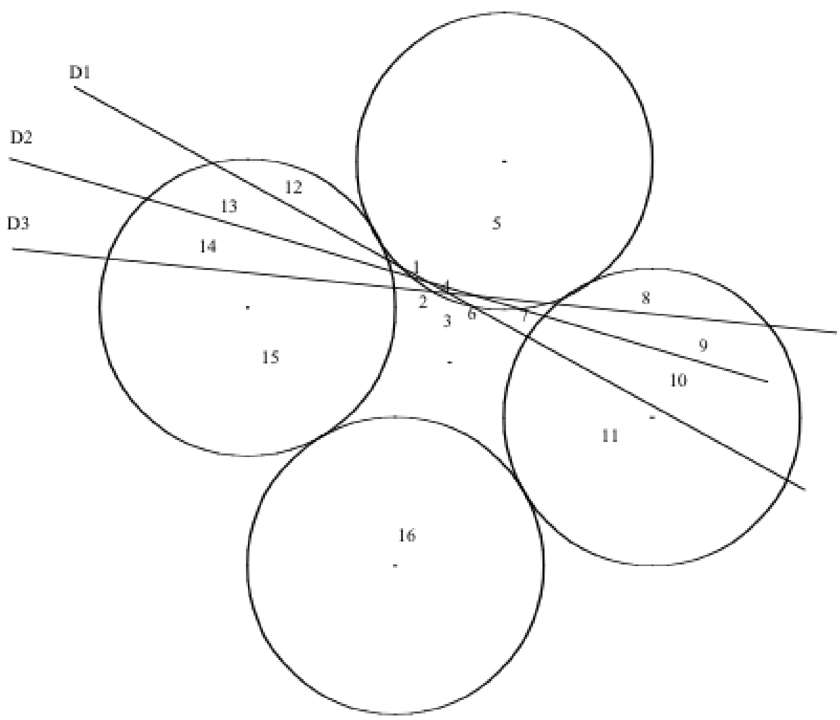
III.1.Observations

Observons ce qui se passe pour **3 gâteaux en cercle :**



Nombre de coups de couteau	Nombre de parts formées
0	3
1	6
2	10

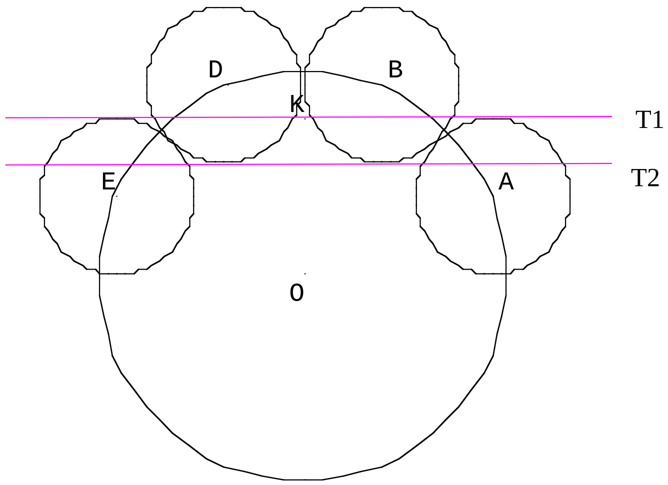
Puis avec **4 gâteaux en cercle :**



Nombre de coups de couteau	Nombre de parts formées
0	4
1	7
2	11
3	16
4	22

III.2.Condition pour couper k gâteaux

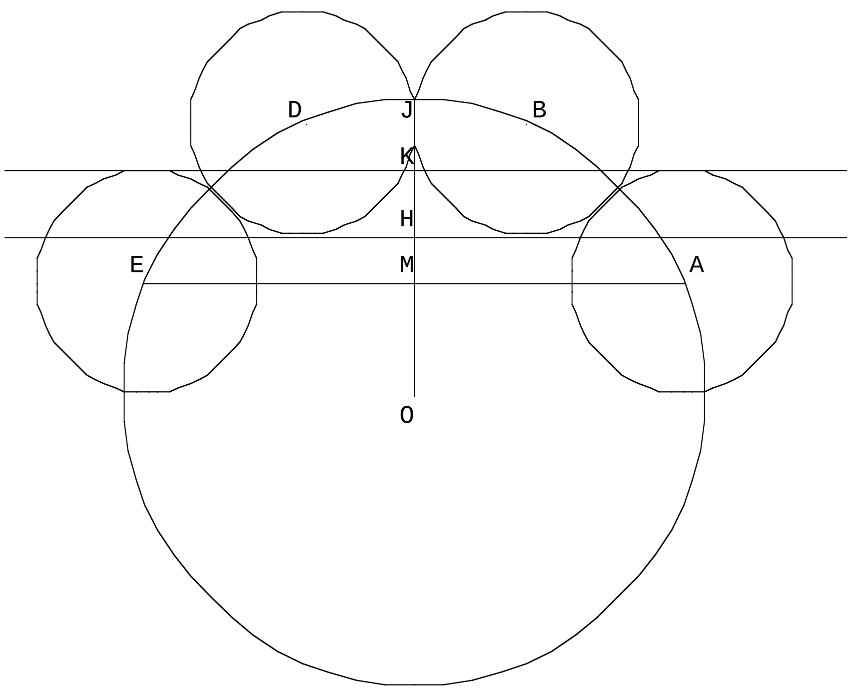
Ces observations nous permettent de constater que, pour former un nombre maximum de parts quand **on dispose *n* gâteaux en cercle**, il faut chercher à couper un maximum de gâteaux et donc il faut faire passer les coups de couteau dans une zone délimitée par deux tangentes représentées sur le schéma ci-dessous :



Pour construire ces tangentes: T1 est la tangente supérieure aux deux gâteaux extrêmes, T2 est la tangente inférieure au gâteau central ou aux deux gâteaux centraux (selon qu'on coupe un nombre impair ou pair de gâteaux).

Une fois la zone délimitée, on trouve le nombre maximal de parts en utilisant la formule des gâteaux alignés pour les *k* gâteaux coupés à laquelle on ajoute (*n*-*k*) parts correspondant aux gâteaux non coupés.

Cette observation permet de déterminer une condition algébrique pour couper *k* gâteaux. En effet, sur le schéma suivant, on remarque que pour couper k gâteaux, il faut que la tangente passant en H soit plus proche de O que ne l'est celle passant par K.



On doit donc avoir $OH \langle OK$

Or, $OH = OJ - JH$ où $OJ = R\cos\left(\frac{\Pi}{n}\right)$ et où $JH = r$ avec r rayon des petits cercles (les petits cercles sont les "gâteaux" disposés sur un grand cercle de centre O et de rayon R, J étant le point de tangence entre les cercles de centres respectifs B et D, le triangle DJO est rectangle en J, l'angle DOJ mesure $\frac{\Pi}{n}$ et donc DJ = r = $R\sin\left(\frac{\Pi}{n}\right)$). Donc $JH = R\sin\left(\frac{\Pi}{n}\right)$.

Et $OK = OM + r$ avec $OM = R\cos\Theta$ où _ représente l'angle entre le segment [OJ] et le segment formé par le point O et le centre du dernier cercle coupé (le segment [OA] sur la figure). Ainsi, lorsque le nombre de cercles coupés k est pair,

$$\Theta = \left[\left(\frac{k}{2}-1\right)\frac{2\Pi}{n}\right] + \frac{\Pi}{n}$$
$$= \frac{\Pi}{n}(k-1)$$

On se rend compte que si le nombre de gâteaux est impair, on obtient la même mesure pour _ :

En effet, pour k impair, on a : $\Theta = \frac{k-1}{2}\times\frac{2\Pi}{n}$

$$\Theta = (k-1)\frac{\Pi}{n}$$

Dans la suite, on ne tiendra donc plus compte de la parité du nombre de gâteaux coupés.

Des relations précédentes, on obtient :

$$OH = R\left(\cos\frac{\Pi}{n} - \sin\frac{\Pi}{n}\right)$$
$$OK = R\left(\cos\frac{(k-1)\Pi}{n} + \sin\frac{\Pi}{n}\right)$$

Pour couper un nombre k de gâteaux, il faut et il suffit que $OH \langle OK$

$$\cos\frac{\Pi}{n} - \sin\frac{\Pi}{n} < \cos\frac{(k-1)\Pi}{n} + \sin\frac{\Pi}{n}$$
$$\cos\frac{\Pi}{n} - \cos\frac{(k-1)\Pi}{n} < 2\sin\frac{\Pi}{n}$$
$$-2\sin\frac{k\Pi}{2n}\times\sin\frac{(2-k)\Pi}{2n} < 2\sin\frac{\Pi}{n}$$
$$\boxed{\sin\frac{k\Pi}{2n}\times\sin\frac{(k-2)\Pi}{2n} < \sin\frac{\Pi}{n}}$$

Cette relation nous donne une condition en fonction de n pour couper k gâteaux. Ainsi, nous pouvons déterminer k en fonction de la valeur donnée à n, c'est-à-dire en fonction du nombre n de gâteaux qu'on place sur le cercle.

Pour trouver les valeurs de k, on a construit une feuille de calcul sous Excel qui vérifie pour chaque valeur de k si la condition ci-dessus est remplie. En faisant varier n, on peut donc prévoir le nombre maximal de gâteaux que l'on peut couper en un coup de couteau.

Par exemple, voici ce que l'on obtient pour n = 20 :

n	*k*	Nombre de gâteaux coupés
20	*3*	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	stop
	8	stop
	9	stop

On peut couper au maximum 6 gâteaux, le "stop" indique qu'on ne peut pas en couper plus, la condition n'étant plus remplie.
p désigne le nombre de coups de couteau, *n* désigne le nombre de gâteaux disposés en cercle, k désigne le nombre maximum de gâteaux coupés en un coup de couteau, *f(p)* désigne le nombre maximum de parts en *p* coups de couteau, on a **la formule générale:**

$$\boxed{f(p) = \frac{p(p-1)}{2} + k(p+1) + (n-k)}$$

Ainsi pour n = 20 gâteaux en cercle, k = 6 donc $f(p) = \frac{p(p-1)}{2} + 6(p+1) + 14$ est le nombre maximal de parts réalisées avec *p* coups de couteau.

On peut vérifier la cohérence de la formule avec nos observations sur 3 puis 4 gâteaux en cercle.

Conclusion

Nous avons trouvé les résultats et les démonstrations dans le cas d'un gâteau et de plusieurs gâteaux alignés. Nous en sommes restés aux observations dans le cas des beignets alignés. Dans le cas des gâteaux en cercle, nous avons trouvé et démontré une condition nécessaire et suffisante pour obtenir un maximum de parts.
Nous pourrions imaginer la découpe de gâteaux en trois dimensions ou une disposition particulière des gâteaux comme celle des anneaux olympiques. Mais cela ferait l'objet d'une autre recherche ...

MOTS CLEFS : DÉCOUPAGE PÂTISSIER PARTAGE NOMBRE DE PARTS DISQUE CERCLE ANNEAU