

À propos d'un résultat dû à Archimède: une invitation à la topologie symplectique.

V. LIZAN-ESQUERRÉTOU

7 JUIN 2005

Résumé. Archimède s'est beaucoup intéressé aux solides de l'espace que sont le cône, le cylindre et la sphère. Sont données ici deux preuves d'un résultat célèbre qui figure dans ses œuvres et qui concerne le cylindre et la sphère: la preuve initiale d'Archimède, datant du 3^{ème} siècle avant Jésus-Christ, utilise des outils du collège aujourd'hui; la seconde preuve utilise des outils de calcul différentiel et intégral appliqués à la géométrie qui ont été construits au dix-septième siècle et que l'on apprend aujourd'hui au lycée. Les outils plus sophistiqués de cette deuxième preuve permettent de comprendre l'essence du résultat qui devient alors un exercice de géométrie différentielle ou symplectique (Voir [McDS], p.82).

Le point de départ de ce travail a été un exposé au colloque "MATH.en.JEANS" 2002 qui s'est tenu à l'université d'Orsay-Paris XI. Ce texte peut intéresser aussi les professeurs de mathématiques de collège et de lycée. Il a été proposé à mes étudiants du PLC1Maths de l'IUFM Midi-Pyrénées, en formation pour devenir professeurs, lors d'un "goûter mathématique" — comment raconter aux futurs professeurs des mathématiques qui débouchent directement sur la recherche d'aujourd'hui et "qui peuvent servir dans leur métier", même si elles ne sont pas explicitement au programme de leur concours de recrutement.

Enfin, mes collègues M. Guillemot et M. Spiesser, historien-ne-s des mathématiques à l'université Paul Sabatier de Toulouse, m'ont fourni une documentation accessible pour écrire le premier paragraphe de ce texte. Et cette version finale tient compte des remarques de Dusa Mc Duff, mathématicienne spécialiste de topologie symplectique, lors du congrès franco-canadien qui s'est tenu à Toulouse en juillet 2004. Je les remercie tous les trois.

1. Archimède, la sphère et le cylindre: quelques éléments.

On sait peu de choses de la vie d'Archimède, savant grec né et mort à Syracuse (\sim - 287, \sim - 212).

Par contre, il est célèbre pour de nombreux résultats de physique toujours utilisés aujourd'hui, notamment en statique, en hydrostatique ou en mécanique. En hydrostatique, c'est le *principe d'Archimède* qu'on retient: *tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide qu'il déplace et appliquée au centre de gravité du fluide déplacé, ou centre de poussée.* En mécanique, Archimède a inventé, en particulier, le levier, la vis sans fin et a construit un planétarium et des machines de guerre.

Il a aussi produit de nombreux résultats mathématiques alors qu'il cherchait à démontrer la quadrature du cercle. Ce problème formulé par le mathématicien athénien Hippocrate de Chios deux siècles plus tôt consiste à construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un disque de rayon donné. Ce n'est qu'en 1882 lorsque F. Lindemann a démontré la transcendance de π i.e. le fait que π n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers que l'impossibilité de la quadrature du cercle a été prouvée; néanmoins, les réflexions d'Archimède sur le sujet ont été très fructueuses.

C'est dans ce cadre qu'il s'est intéressé aux objets dont les grandeurs ont un rapport avec le cercle, et, en particulier, à la sphère et au cylindre, aux conoïdes et aux sphéroïdes, aux spirales. Il a également étudié des figures pour lesquelles la quadrature est possible, spirales et lunules en particulier, et a cherché une méthode de calcul pour approcher la mesure du cercle. Sur les travaux d'Archimède, voir [Iv] ou [Vi] .

La sphère et le cylindre sont importants pour Archimède. Son "Traité de la sphère et du cylindre" rassemble les résultats qu'il a obtenus concernant ces deux solides de l'espace. Y figure notamment le résultat suivant:

"Tout cylindre ayant comme base le grand cercle d'une sphère et comme hauteur le diamètre de la sphère vaut une fois et demie cette sphère; et l'aire du cylindre, bases comprises, vaut une fois et demie l'aire de cette sphère."

Plutarque (\sim 50, \sim 125) signale dans ses écrits "Vies parallèles" (ou "Vie des hommes illustres", nom de leur traduction en 1559 par J. Amyot) qu'Archimède a demandé à ce que sa tombe soit surmontée d'une sphère et d'un cylindre et qu'y soit gravé le rapport $2/3$.

Voici la formulation en grec:

"Πολλῶν δὲ καὶ εὐρετῆς γεγωνῶς λέγεται τῶν φέλων δεηθῆναι καὶ τῶν συγγενῶν ὅπως αὐτοῦ μετὰ τὴν τελευτὴν ἐπιστήσωσι τῷ τάφῳ τὸν περιλαμβάνοντα τὴν σφαῖρα ἐντὸς κύλινδρον, ἐπιγράφαντες τὸν λόγον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ περιέχοντος στερεοῦ πρὸς τὸ περιεχόμενον."

Auparavant, Cicéron (\sim - 106, \sim - 43), alors qu'il était questeur à Syracuse, rapporte (Tusculanae disputationes, Livre

V, chapitres 64-66) qu'en 75 avant Jésus-Christ i.e. 137 ans après la disparition d'Archimède, il a découvert au milieu des buissons son tombeau, précisément grâce à la sphère et au cylindre qui le surmontent. Au musée des Augustins à Toulouse, le tableau de Pierre-Henri de Valenciennes (Toulouse 1750, Paris 1819) intitulé "Cicéron découvrant le tombeau d'Archimède" (1787) représente cet épisode ⁽¹⁾.



"Cicéron découvrant le tombeau d'Archimède" par P.-H. de Valenciennes (Musée des Augustins à Toulouse)

La formulation moderne du résultat mathématique ci-dessus est la suivante.

On considère une sphère inscrite dans un tronc de cylindre i.e. une sphère et le plus petit tronc de cylindre qui la contient. Alors,

1. le rapport du volume de la boule au volume du cylindre est égal à $2/3$;
2. le rapport de l'aire de la sphère à l'aire du cylindre complet i.e. le cylindre auquel on ajoute le disque supérieur (couvercle) et le disque inférieur (fond) est aussi égal à $2/3$ ⁽²⁾.

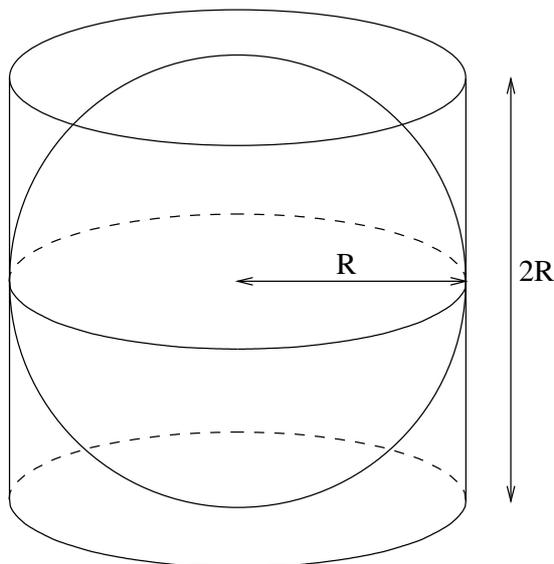


Figure 1. La sphère inscrite dans le tronc de cylindre.

⁽¹⁾ Aujourd'hui, la localisation du tombeau d'Archimède est toujours un sujet de discussion pour les historiens des mathématiques.

⁽²⁾ Le fait que ces deux rapports sont égaux n'est pas seulement vrai pour la sphère et le cylindre. Il reste vrai pour

Les formules du volume et de l'aire du tronc de cylindre étaient connues avant Archimède. Le volume $V_{C_{R,2R}}$ du tronc de cylindre de rayon R et de hauteur $2R$ est égal à $V_{C_{R,2R}} = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$. Son aire $\mathcal{A}_{C_{R,2R}}$ est égale à $\mathcal{A}_{C_{R,2R}} = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$.

Archimède a démontré son résultat en calculant le volume de la boule et l'aire de la sphère. Le volume V_{B_R} de la boule de rayon R est égal à $V_{B_R} = \frac{4}{3}\pi R^3$. L'aire \mathcal{A}_{S_R} de la sphère de rayon R est égale à $\mathcal{A}_{B_R} = 4\pi R^2$.

On vérifie alors,

$$\frac{V_{B_R}}{V_{C_{R,2R}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$$

et, si $\mathcal{A}'_{C_{R,2R}}$ désigne l'aire du cylindre complet i.e. $\mathcal{A}'_{C_{R,2R}} = \mathcal{A}_{C_{R,2R}} + 2\mathcal{A}_{D_R}$ où \mathcal{A}_{D_R} est l'aire du disque de rayon R

$$\frac{\mathcal{A}_{S_R}}{\mathcal{A}'_{C_{R,2R}}} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R^2 + 2\pi R^2} = \frac{2}{3}.$$

Le deuxième résultat peut aussi être exprimé par l'égalité $\mathcal{A}_{S_R} = \mathcal{A}_{C_{R,2R}}$. C'est cette formulation qui nous intéresse ici: autrement dit, la sphère et le tronc de cylindre circonscrit ont la même aire.

On peut donner une intuition de ce résultat avec des outils de fin de collège comme indiqué dans [Ba].

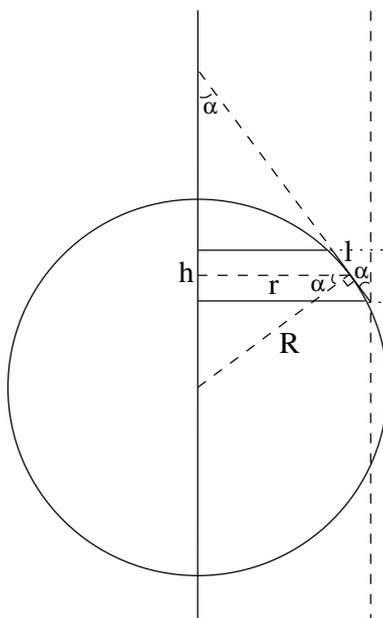


Figure 2. Une tranche de sphère et la tranche de cylindre associée.

On considère la portion de sphère et la portion de cylindre comprises entre deux plans horizontaux. Avec les notations de la figure précédente, l'aire de la tranche de cylindre est égale à $2\pi Rh$. On envisage maintenant le tronc de cône tangent à la sphère le long du cercle de rayon r , de génératrice de longueur l de part et d'autre de ce cercle (et d'angle au sommet α). Si l'épaisseur h de la tranche est petite, comme la tranche de sphère et le tronc de cône sont proches, on admet qu'ils ont la même aire. Or, l'aire de ce tronc de cône est exactement égale à $2\pi rl$ (voir dans le paragraphe suivant comment on calcule l'aire d'un tronc de cône). Comme $\frac{r}{R} = \frac{h}{l} (= \cos \alpha)$, on en déduit que la tranche de sphère et la tranche de cylindre considérées ont la même aire. Enfin, en découpant la sphère et le cylindre en tranches fines et en faisant la somme des aires des tranches de sphère et la somme des aires des tranches de cylindre, on obtient que la sphère et le cylindre ont la même aire. Mais qu'est-ce qu'une tranche fine? Et comment justifier qu'alors la tranche de sphère et le tronc de cône tangent associé ont la même aire?

la sphère et tout polyèdre tangent à la sphère. Un polyèdre est un solide de l'espace dont le bord est formé de faces planes qui sont des polygones. Ex.: le tétraèdre dont toutes des faces sont des triangles, le parallélépipède rectangle dont toutes les faces sont des rectangles, l'octaèdre, ... Cependant, pour les polyèdres, les rapports ne sont pas rationnels, ils font intervenir le nombre irrationnel π .

Deux démonstrations du résultat recherché suivent, celle d'Archimède d'abord, puis une seconde qui utilise des méthodes encore inconnues à l'époque d'Archimède. Elles visent à éclaircir les difficultés évoquées ci-dessus, chacune à leur manière.

2. Comment Archimède calcule l'aire de la sphère.

Il procède par exhaustion i.e. en approchant la sphère de l'intérieur et de l'extérieur par des surfaces dont il sait calculer l'aire. La démonstration se fait en quatre étapes. Les outils utilisés sont du niveau du collège aujourd'hui.

La première étape consiste à construire une surface Σ_n intérieure à la sphère et qui s'appuie sur celle-ci.

Pour cela, on considère un polygone régulier convexe P_n inscrit dans le cercle et dont le nombre de côtés est le multiple de 4 égal à $4n$. En faisant tourner ce polygone autour d'un de ses axes de symétrie qui joint deux sommets du polygone, on obtient la surface Σ_n . Elle est la réunion d'une famille de troncs de cônes droits.

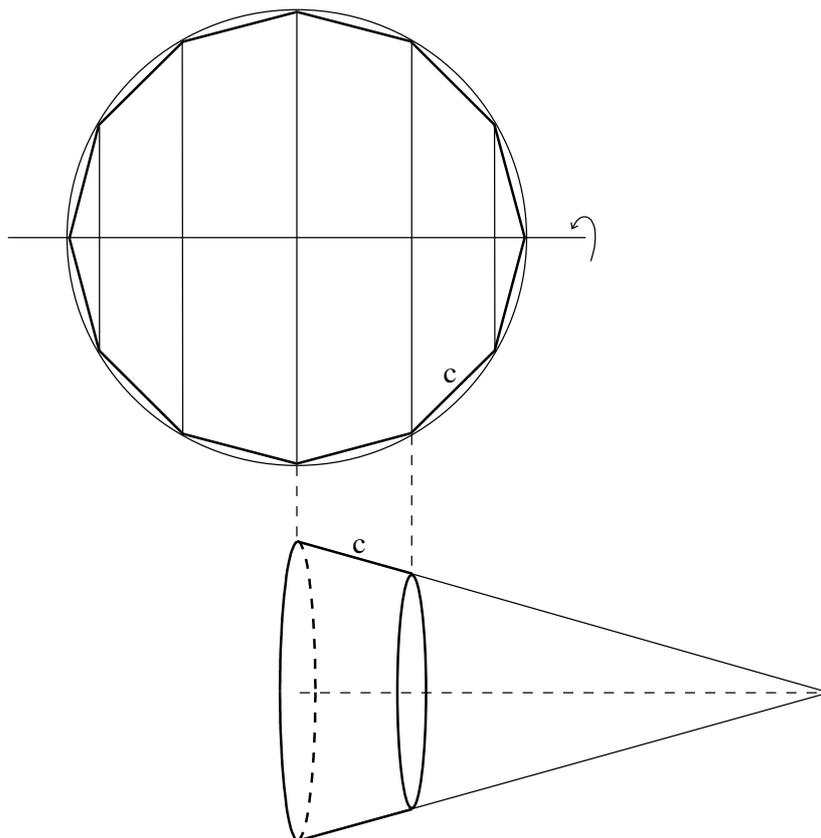


Figure 3. Construction de la surface Σ_n (ici, $n=3$).

Dans la deuxième étape, on calcule l'aire de Σ_n à partir de l'aire d'un tronc de cône.

On note $\mathcal{C}_{R,h+c}$ le cône droit ayant pour base le disque de rayon R et des génératrices de longueur $h + c$ et $\mathcal{C}_{r,h}$ le cône ayant pour base le disque de rayon r et des génératrices de longueur h . L'aire \mathcal{A} du tronc de cône formé par les disques de rayons respectifs r et R et des génératrices de longueur c est la différence entre l'aire du cône $\mathcal{C}_{R,h+c}$ et l'aire du cône $\mathcal{C}_{r,h}$.

On est donc amené à calculer l'aire du cône. Pour cela, Archimède procède encore par exhaustion en approchant, de l'intérieur et de l'extérieur, le cône par des pyramides dont les bases sont des polygones réguliers convexes.

On peut néanmoins procéder autrement en utilisant le fait que le cône est une surface développable. En effet, moyennant découper le cône le long de l'une de ses génératrices, il est possible de l'aplatir. On obtient alors un secteur de disque de même aire.

Ici, en notant α la valeur de l'angle au sommet du secteur, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (h+c)^2 \frac{\alpha}{2} - h^2 \frac{\alpha}{2} = [(h+c)^2 - h^2] \frac{\alpha}{2} \\ &= (2hc + c^2) \frac{\alpha}{2} = (2h+c) \alpha \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Or, les deux arcs de cercle de longueur $2\pi r$ et $2\pi R$ respectivement ont des longueurs proportionnelles à h et $h + c$ respectivement, le facteur de proportionnalité étant égal à α donc $2\pi r = h\alpha$ et $2\pi R = (h + c)\alpha$. En faisant la somme membre à membre, on obtient $2\pi(r + R) = (2h + c)\alpha$. D'où, $\mathcal{A} = 2\pi(R + r)\frac{c}{2} = \pi c(R + r)$.

Remarque: pour $r = 0$, on retrouve l'aire du cône de rayon $R = 0$ et de génératrice de longueur c .

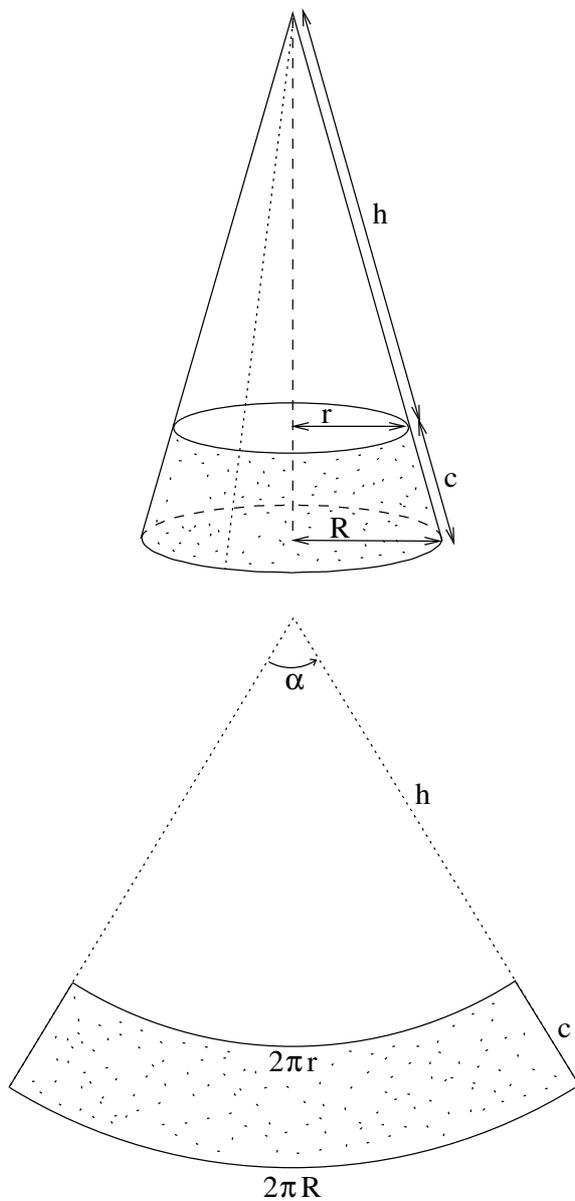


Figure 4. L'aire du tronc de cône.

Maintenant, pour calculer l'aire de la surface Σ , il suffit de faire la somme des aires des troncs de cône qui la composent. Avec les notations de la figure 5., on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma_3) &= \pi c[A_1B_1 + (A_1B_1 + A_2B_2) + (A_2B_2 + A_3B_3) + (A_3B_3 + A_4B_4) + (A_4B_4 + A_5B_5) + A_5B_5] \\ &= \pi c[A_1A_{-1} + A_2A_{-2} + A_3A_{-3} + A_4A_{-4} + A_5A_{-5}] \\ &= \pi c\sigma \end{aligned}$$

où $\sigma = A_1A_{-1} + A_2A_{-2} + A_3A_{-3} + A_4A_{-4} + A_5A_{-5}$.

Or, les droites (A_1A_{-1}) , (A_2A_{-2}) , (A_3A_{-3}) , (A_4A_{-4}) , (A_5A_{-5}) sont parallèles (pourquoi?) ainsi que les droites (A_0A_{-1}) , (A_1A_{-2}) , (A_2A_{-3}) , (A_3A_{-4}) , (A_4A_{-5}) , (A_5A_6) . Par conséquent, les triangles $A_iB_iC_i$, $1 \leq i \leq 4$, $A_5B_5A_6$, $A_{-1}B_1A_0$ et $A_{-i}B_iC_{i-1}$, $2 \leq i \leq 5$ sont semblables. De plus, le triangle $A_0A_6A_{-1}$ est rectangle en A_{-1} (pourquoi?) et de hauteur $[A_{-1}B_1]$; donc, les triangles $A_0B_1A_{-1}$ et $A_0A_6A_{-1}$ sont semblables.

Ainsi, on a les égalités

$$\frac{A_{-1}B_1}{A_0B_1} = \frac{B_1A_1}{B_1C_1} = \frac{A_{-2}B_2}{C_1B_2} = \frac{B_2A_2}{B_2C_2} = \frac{A_{-3}B_3}{C_2B_3} = \frac{B_3A_3}{B_3C_3} = \frac{A_{-4}B_4}{C_3B_4} = \frac{B_4A_4}{B_4C_4} = \frac{A_{-5}B_5}{C_4B_5} = \frac{B_5A_5}{B_5A_6} = \frac{A_{-1}A_6}{A_0A_{-1}}.$$

D'où,

$$\frac{A_1A_6}{c} = \frac{A_{-1}B_1 + B_1A_1 + \dots + A_{-5}B_5 + B_5A_5}{A_0B_1 + B_1C_1 + \dots + C_4B_5 + B_5A_6} = \frac{\sigma}{A_0A_6}.$$

Autrement dit, $c\sigma = 2R \cdot A_1A_6$ et $\mathcal{A}_3 := \mathcal{A}(\Sigma_3) = 2\pi R \cdot A_1A_6$. On remarque que $\mathcal{A}_3 < \pi(2R)^2$.

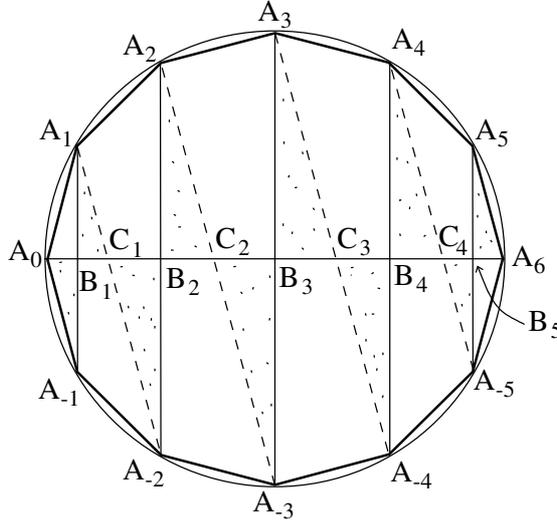


Figure 5. Beaucoup de triangles semblables.

Pour poursuivre l'exhaustion, on construit maintenant, de façon analogue, une surface Σ'_n extérieure à la sphère et qui s'appuie sur celle-ci: c'est la troisième étape.

Pour cela, on considère un polygone régulier convexe P'_n circonscrit au cercle et dont le nombre de côtés est le multiple de 4 égal à $4n$. On fait faire un tour complet à ce polygone autour d'un de ses axes de symétrie qui joint deux sommets: on obtient la surface Σ'_n . Elle est la réunion d'une famille de troncs de cônes droits.

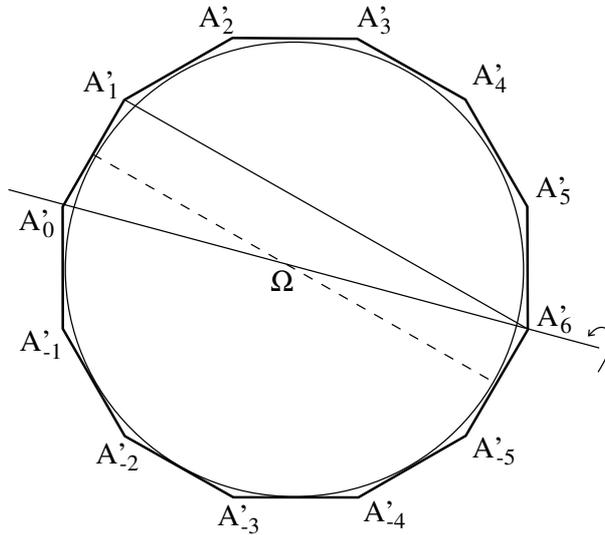


Figure 6. Construction de la surface Σ'_n (ici, $n=3$).

Avec les notations de la figure 6., l'analogie du calcul précédent assure que $\mathcal{A}'_3 := \mathcal{A}(\Sigma'_3) = 2\pi R A'_0 A'_6$ (laissé en exercice). On remarque que $\mathcal{A}'_3 > \pi(2R)^2$.

Dans une dernière étape, Archimède calcule l'aire de la sphère en raisonnant par l'absurde.

Pour tous les entiers m et n , on a $\mathcal{A}_m \leq 4\pi R^2 \leq \mathcal{A}'_n$. De plus, par construction, la suite des nombres \mathcal{A}_m , $m \in \mathbf{N}^*$ est croissante, majorée par $4\pi R^2$, et la suite des nombres \mathcal{A}'_n , $n \in \mathbf{N}^*$ est décroissante, minorée par $4\pi R^2$.

Archimède suppose que l'aire \mathcal{A}_S de la sphère est différente de $4\pi R^2$. Il démontre alors l'existence de deux surfaces Σ_{n_0} et Σ'_{m_0} dans les deux familles précédentes telles que

$$\mathcal{A}'_{m_0} - \mathcal{A}_{n_0} \leq |\mathcal{A}_S - 4\pi R^2|.$$

Or, par construction de Σ_{n_0} et Σ'_{m_0} , on a $\mathcal{A}_{n_0} \leq \mathcal{A}_S \leq \mathcal{A}'_{m_0}$ d'une part, et, $\mathcal{A}_{n_0} \leq 4\pi R^2 \leq \mathcal{A}'_{m_0}$ d'autre part. Alors,

$$|\mathcal{A}_S - 4\pi R^2| < \mathcal{A}'_{m_0} - \mathcal{A}_{n_0} \leq |\mathcal{A}_S - 4\pi R^2|.$$

C'est une contradiction. On a donc, finalement, $\mathcal{A}_S = 4\pi R^2$.

Cette dernière étape évite ce qui est appelé en mathématiques un "passage à la limite"; il serait obtenu ici en augmentant indéfiniment les entiers m et n qui représentent le nombre des côtés des polygones réguliers inscrits et circonscrits au grand cercle de la sphère. On conçoit que les surfaces déduites de ces polygones ayant un très grand nombre de côtés se rapprochent de plus en plus de la sphère et donc que leurs aires se rapprochent en même temps de l'aire de la sphère. C'est cette intuition qui guide la preuve d'Archimède. Cependant, la justification de ce fait est délicate: elle utilise des résultats d'analyse qui n'existaient pas encore à l'époque d'Archimède. Sa méthode permet de les éviter. ⁽²⁾

Il faut noter que la démonstration d'Archimède s'appuie sur deux propriétés intuitives qui sont admises, mais qui nécessitent une preuve; Archimède ne pouvait pas les justifier avec les méthodes mathématiques de son époque. Tout d'abord, l'affirmation selon laquelle, pour tous les entiers m et n , on a $\mathcal{A}_m \leq \mathcal{A}_S \leq \mathcal{A}'_n$ suppose que pour deux surfaces convexes contenues l'une dans l'autre et qui ont même bord dans un plan, l'aire de la surface extérieure est supérieure à l'aire de la surface intérieure qui est elle-même supérieure à l'aire de la surface plane de même bord.

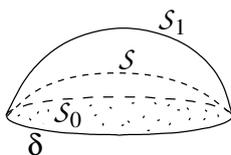


Figure 7. $\mathcal{A}_{S_0} \leq \mathcal{A}_S \leq \mathcal{A}_{S_1}$.

Ensuite, l'existence des deux surfaces Σ_{n_0} et Σ'_{m_0} dans les deux familles précédentes et vérifiant l'inégalité demandée suppose que \mathbf{R} vérifie une propriété, caractéristique de \mathbf{R} (Voir [BB] et [Bo] pour en savoir plus sur la construction de \mathbf{R} et ses propriétés). Cette propriété s'énonce de la façon suivante: pour tous les réels a et $b > 0$, il existe un entier positif n tel que $a < nb$. On énonce généralement cette propriété en utilisant l'expression " \mathbf{R} est archimédien"

Ainsi, après avoir déterminé l'aire de la sphère, Archimède constate son égalité avec l'aire latérale du tronc de cylindre circonscrit.

Or, ce constat ne permet pas d'expliquer la raison de cette égalité. Pourtant, il y en a une. Mais, elle est d'ordre infinitésimal i.e. au niveau de tout élément de surface de la sphère et du cylindre, aussi petit ait-il été choisi.

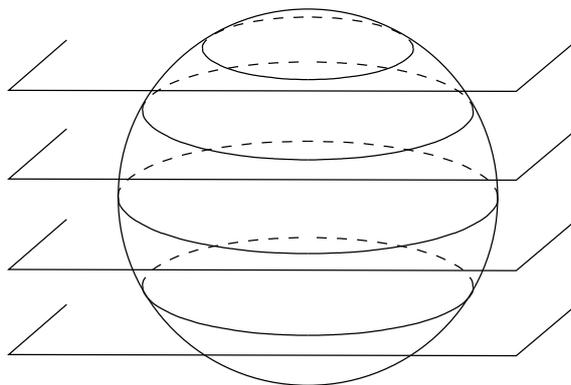


Figure 8. La sphère en tranches.

⁽²⁾ Ce n'est pas tout à fait vrai, en fait. Dans sa preuve, Archimède utilise implicitement le fait que \mathbf{R} est archimédien justement (voir le paragraphe qui suit); cette propriété n'avait pas été mise en évidence à l'époque d'Archimède: elle provient de la structure même de \mathbf{R} qui a été dégagée dans la seconde moitié du 19^{ème} siècle (Voir [Eb]).

Pour son calcul, Archimède découpe la sphère en tranches; il effectue ensuite un calcul d'aire approché pour chaque tranche en encadrant chaque tranche de sphère entre deux bandes planes – les deux troncs de cône inscrit et circonscrit – dont il sait calculer l'aire; il obtient enfin l'aire de la sphère en sommant l'aire de chacune des bandes pour les deux surfaces inscrite et circonscrite et en “passant à la limite” en augmentant le nombre de tranches. L'idée maintenant consiste toujours à considérer des tranches mais infiniment minces, puis à faire des calculs d'aire exacts à ce niveau infinitésimal, et enfin, à faire la somme des aires infinitésimales sur toute la surface afin d'obtenir son aire.

Pour l'expliquer, on utilise calcul différentiel et calcul intégral qui ont été mis au point au même moment, mais indépendamment, par Wilhelm Gottfried Leibniz en Allemagne et par Isaac Newton en Angleterre, à la fin du XVII^{ème} siècle (1665-1700). Ces nouveaux outils techniques sont utilisés ici respectivement, pour le calcul de la forme d'aire du cylindre et de la sphère, puis pour l'intégration de ces formes d'aire sur des domaines adéquats.

C'est avec ce nouveau point de vue que va maintenant être envisagé le résultat d'Archimède.

3. Le point de vue différentiel.

On sait que la tangente à une courbe en un point, quand elle existe, donne la meilleure approximation linéaire de la courbe en ce point; autrement dit, au voisinage de ce point, on peut envisager la courbe comme un segment de la tangente centré en le point: c'est ce qui apparaît si on réalise un zoom sur le point. Ainsi, pour calculer la longueur d'une courbe lisse, on peut choisir un nombre fini de points sur la courbe, remplacer chaque morceau de courbe entre deux points consécutifs par un segment de la tangente en l'un des deux points et faire la somme des longueurs des segments considérés: c'est un exemple de la méthode dite des sommes discrètes utilisée en cours de physique. On n'obtient cependant ainsi qu'une valeur approchée de la longueur de la courbe, mais on démontre qu'en augmentant le nombre de points sur la courbe lisse la limite de la somme des longueurs des segments existe: c'est la longueur de la courbe. Afin de rappeler le procédé de calcul intégral utilisé pour le calcul de la longueur, on la note $\int_C dl$ si \mathcal{C} désigne la courbe et dl l'élément de longueur.



Figure 9. La méthode des sommes discrètes pour calculer la longueur d'une courbe lisse.

De même, pour calculer l'aire d'une surface lisse, on choisit d'abord un nombre fini de points sur la surface afin de réaliser un maillage ‘rectangle’ de la surface, puis on remplace chaque maille par un parallélogramme tangent à la surface en un des coins de la maille, et on calcule la somme finie des aires des parallélogrammes; la limite de cette somme (de Riemann), quand on augmente le nombre de points choisis sur la surface, est l'aire de la surface. On la note $\int_S d\sigma$ si \mathcal{S} désigne la surface et $d\sigma$ l'élément d'aire aussi appelé *forme d'aire de la surface* \mathcal{S} . Voir [Ar].

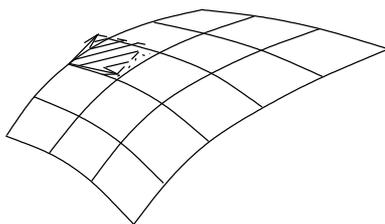


Figure 10. L'élément d'aire d'une surface en un point.

Maintenant, pour mettre en œuvre cette méthode de calcul d'aire pour le cylindre et la sphère trois étapes seront également nécessaires: d'abord, le repérage d'un point sur le cylindre ou la sphère au moyen d'une carte; ensuite, le calcul de la forme d'aire du cylindre et de la sphère; enfin, l'intégration de ces formes d'aire sur les cartes pour conclure.

Tout d'abord, pour repérer un point sur le cylindre, on utilise un repère orthonormé de l'espace adapté aux symétries du cylindre. L'origine O du repère est le centre de symétrie du cylindre; l'axe (O, \vec{k}) est l'axe de symétrie du cylindre; l'axe des abscisses (O, \vec{i}) et l'axe des ordonnées (O, \vec{j}) définissent le plan de symétrie du cylindre perpendiculaire à (O, \vec{k}) .

Ainsi, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point M du cylindre est repéré par ses coordonnées (x, y, z) où (x, y) est le couple de coordonnées du point M_0 , projection orthogonale de M sur le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , et z est la cote de M , qui

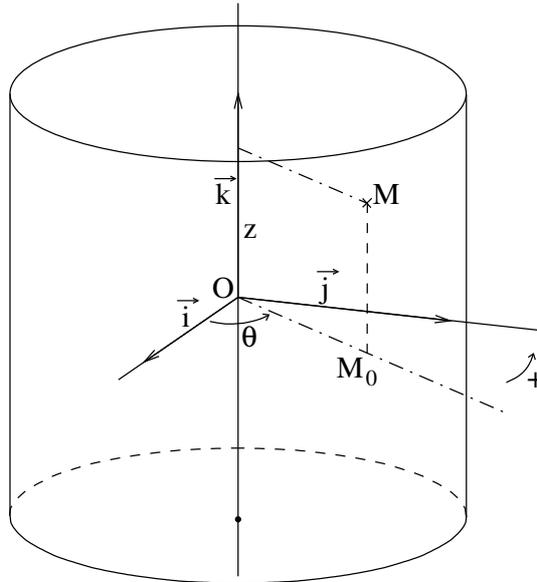


Figure 11. Les coordonnées sur le cylindre.

est aussi la mesure algébrique $\overline{M_0M}$ sur l'axe (M_0, \vec{k}) . Quitte à faire un changement d'échelle, on peut supposer que le rayon R de la sphère est égal à 1. Alors, le point M_0 appartient au cercle unité de centre O du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . Une orientation ayant été choisie sur ce plan, le point M_0 est entièrement déterminé par l'angle $\theta := (\vec{OI}, \vec{OM})$ tel que $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$. Finalement, un point M du cylindre est repéré par les deux paramètres $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in [-1, +1]$: le paramètre θ détermine le segment vertical du cylindre qui contient le point M et le paramètre z détermine la position du point M sur le segment.

Ce paramétrage définit l'application

$$\begin{aligned} \kappa : [0, 2\pi[\times [-1, +1] &\longrightarrow C \\ (\theta, z) &\longmapsto M(\cos \theta, \sin \theta, z) \end{aligned}$$

qui est une bijection. Cette application dont l'ensemble de départ est un rectangle de \mathbf{R}^2 constitue une *carte* du cylindre (penser à la notion usuelle de carte en géographie dont le but est de donner une représentation plane d'une portion non plane de la terre). L'existence de cette carte fait du cylindre une *variété de dimension 2* (ou *surface*, au sens géométrique du terme).

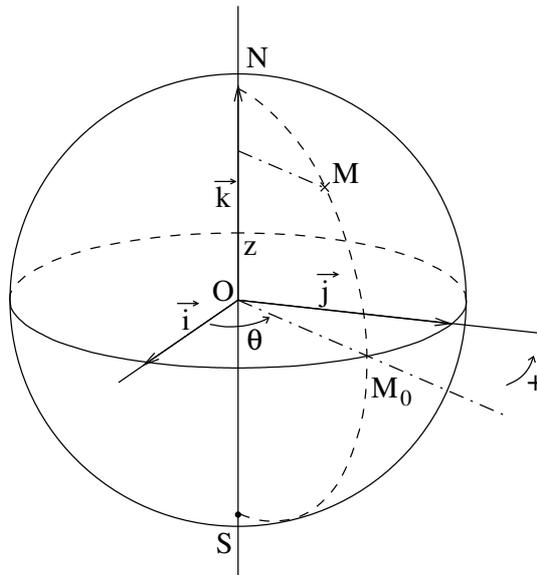


Figure 12. Les coordonnées sur la sphère privée des pôles.

De même, un point M de la sphère privée des pôles est repéré par deux paramètres $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in [-1, +1]$: le paramètre θ dans le plan orienté par le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) détermine le demi-grand cercle (ou méridien) de la sphère

qui contient le point M ; le paramètre $z = \overline{mM}$ mesuré sur l'axe (m, \vec{k}) détermine la position du point M sur ce demi-grand cercle.

Comme plus haut pour le cylindre, l'application

$$\sigma : \begin{array}{l} [0, 2\pi \times [-1, +1] \longrightarrow \\ (\theta, z) \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} S^2 \setminus \{N, S\} \\ M(\sqrt{1-z^2} \cos \theta, \sqrt{1-z^2} \sin \theta, z) \end{array}$$

est une bijection. Cette application du rectangle $[0, 2\pi \times [-1, +1] \subset \mathbf{R}^2$ dans $S^2 \setminus \{N, S\}$ est une carte de la sphère privée des pôles. Ainsi, $S^2 \setminus \{N, S\}$ est aussi une variété de dimension 2: ceci justifie l'“exposant 2” de la notation S^2 usuellement employée pour désigner la sphère.

Les cartes précédentes de la sphère et du cylindre permettent d'établir, via l'identité sur $[0, 2\pi \times [-1, +1]$, une correspondance naturelle entre les deux surfaces. Elle est représentée par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi \times [-1, +1] & \xrightarrow{Id} & [0, 2\pi \times [-1, +1] \\ (\theta, z) & \longmapsto & (\theta, z) \\ \uparrow \sigma & & \uparrow \kappa \\ S^2 \setminus \{N, S\} & \xrightarrow{\pi} & C \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

Géométriquement, l'application π est la projection horizontale de la sphère privée des pôles sur le cylindre: un point M de la sphère a pour projeté le point du cylindre de même cote dans le demi-plan limité par l'axe du cylindre et qui contient le point M .

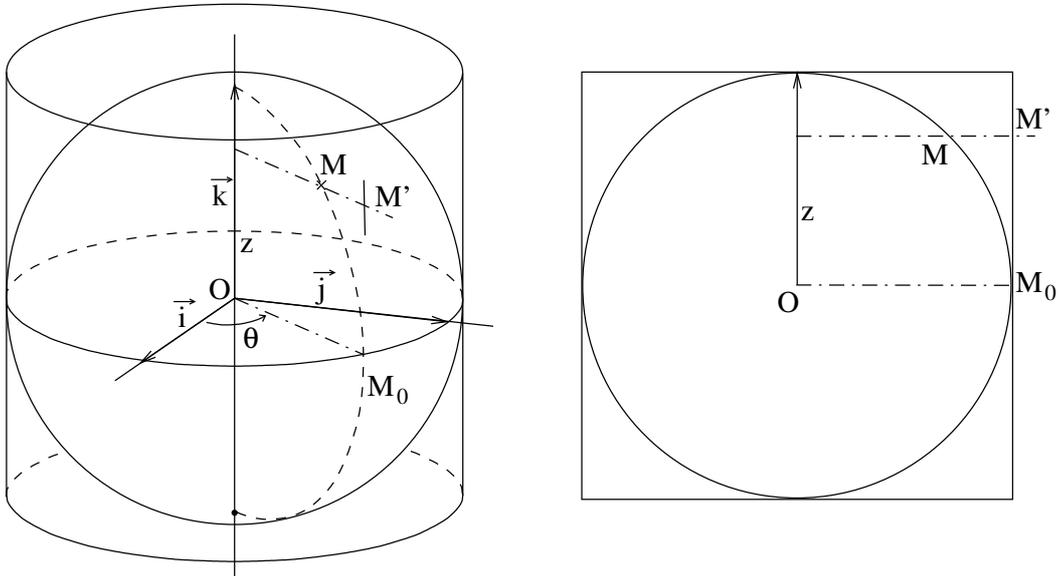


Figure 13. La projection horizontale de la sphère privée des pôles sur le cylindre.

Il s'agit maintenant de calculer la forme d'aire du cylindre qui opère sur les couples de vecteurs du plan tangent au cylindre en chaque point.

On rappelle tout d'abord que, dans le plan orienté \mathbf{R}^2 muni du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , le parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ a pour aire orientée $xy' - yx' := \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ x & y \end{pmatrix} (\vec{u}, \vec{v})$

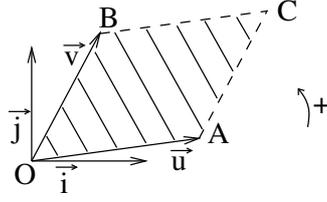


Figure 14. L'aire orientée d'un parallélogramme du plan.

L'application

$$\begin{aligned} \omega_0 : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) := dx \wedge dy(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

est la forme d'aire usuelle sur \mathbf{R}^2 ou bien aussi la forme symplectique standard sur \mathbf{R}^2 .

Le plan tangent au cylindre C en un point M est le plan perpendiculaire à $\overline{\Omega M} := \vec{\rho}$ qui contient M où Ω est la projection horizontale de M sur (O, \vec{k}) . On le note $T_M C$. Ainsi, le vecteur \vec{u} appartient à $T_M C$ si et seulement si $\vec{\rho} \cdot \vec{u} = 0$.

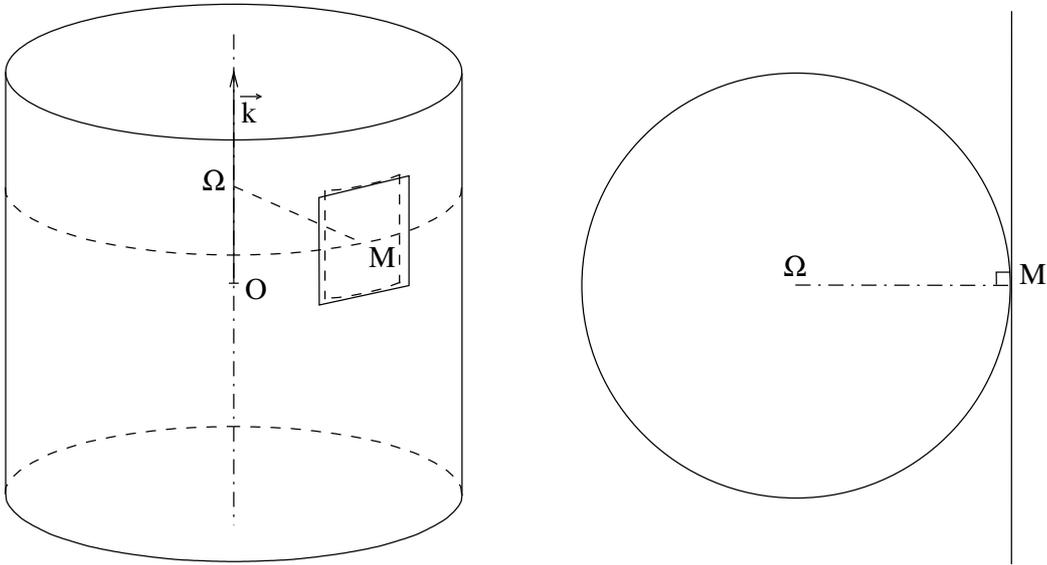


Figure 15. Le plan tangent au cylindre au point M .

On oriente $T_M C$ par $\vec{\rho}$: autrement dit, $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère de $T_M C$ tel que $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{\rho})$ est un repère direct de \mathbf{R}^3 . Alors, étant donné deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de $T_M C$, par définition du produit vectoriel dans \mathbf{R}^3 , on a $\vec{u} \wedge \vec{v} = \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}) \vec{\rho}$ et donc $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{\rho} = \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v})$. La première égalité provient du fait que ρ est orthogonal à $T_M C$ et la seconde du fait que $\vec{\rho}$ est de norme 1.

L'application

$$\begin{aligned} \omega_M^C : T_M C \times T_M C &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{\rho} \end{aligned}$$

est alors la forme d'aire usuelle du cylindre.

Les coordonnées sur le cylindre sont (θ, z) . Il s'agit donc maintenant de trouver une base de $T_M C$ compatible avec ces coordonnées. Pour $M(\cos \theta, \sin \theta, z)$ fixé, en faisant varier θ , le point $M'(\cos \theta', \sin \theta', z)$ se rapproche de M , à cote z fixée, lorsque θ' tend vers θ . A la limite, le vecteur dérivé $\lim_{\theta' \rightarrow \theta} \frac{1}{\theta' - \theta} \overrightarrow{MM'}$ existe. On le note $\frac{\partial}{\partial \theta}$ car on a fait varier le

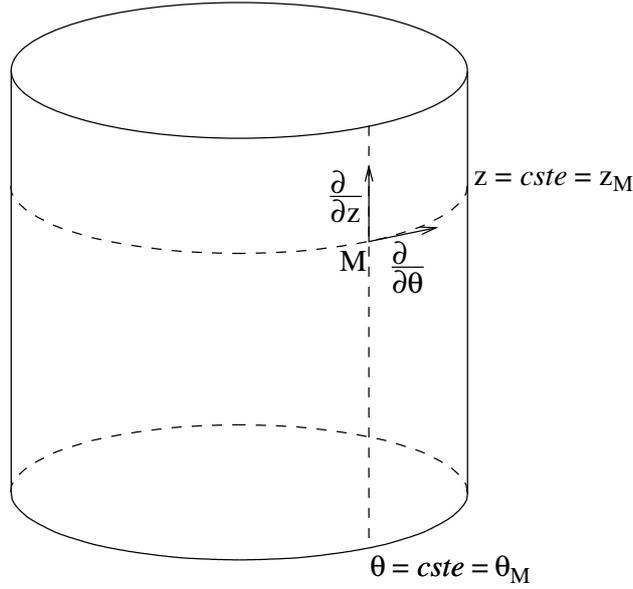


Figure 16. Une base du plan tangent au cylindre au point M .

paramètre θ uniquement; ses coordonnées cartésiennes sont $(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$. De même, en faisant varier z , le point $M'(\cos \theta, \sin \theta, z')$ se rapproche de M , à θ fixé, sur le segment vertical du cylindre qui contient M , lorsque z' tend vers z . A la limite, le vecteur dérivé $\lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{z' - z} \overrightarrow{MM'}$ existe. On le note $\frac{\partial}{\partial z}$; ses coordonnées cartésiennes sont $(0, 0, 1)$.

Enfin, la base $(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}, \vec{\rho})$ est orthonormée directe donc, si $\vec{u} = X \frac{\partial}{\partial \theta} + Y \frac{\partial}{\partial z}$ et $\vec{v} = X' \frac{\partial}{\partial \theta} + Y' \frac{\partial}{\partial z}$ alors $\omega_M^C(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{\rho} = XY' - YX' := d\theta \wedge dz(\vec{u}, \vec{v})$.

On calcule de même la forme d'aire de la sphère.

Le plan tangent à la sphère S^2 en un point M est le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{OM} := \vec{r}$ qui contient M . On le note $T_M S^2$. Ainsi, le vecteur \vec{u} appartient à $T_M S^2$ si et seulement si $\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$.

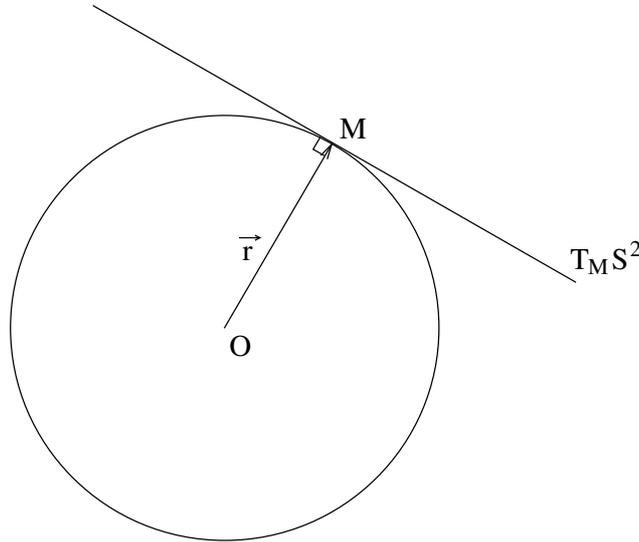


Figure 17. Le plan tangent à la sphère au point M .

Un raisonnement analogue à celui mené pour établir la forme d'aire du cylindre où $\vec{\rho}$ est remplacé par \vec{r} permet d'obtenir la forme d'aire de la sphère. C'est l'application

$$\omega_M^{S^2} : T_M S^2 \times T_M S^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{r}$$

Comme pour le cylindre, au point $M((\sqrt{1-z^2} \cos \theta, \sqrt{1-z^2} \sin \theta, z))$ de la sphère, on calcule une base de

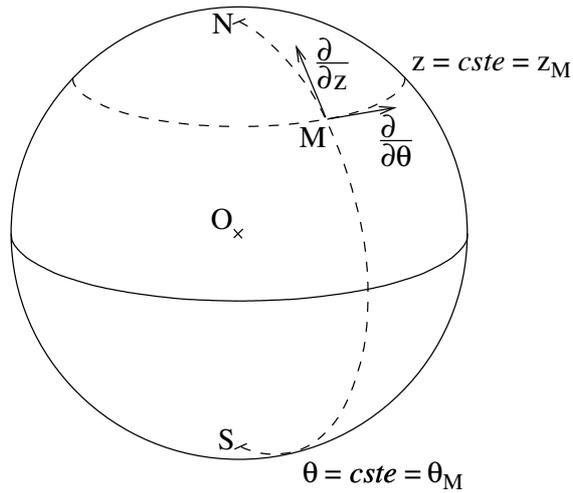


Figure 18. Une base du plan tangent à la sphère au point M .

$T_M S^2$ en faisant varier le paramètre θ puis le paramètre z . Ainsi, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ a pour coordonnées cartésiennes $(-\sqrt{1-z^2} \sin \theta, \sqrt{1-z^2} \cos \theta, 0)$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ a pour coordonnées cartésiennes $(-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos \theta, -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin \theta, 1)$.

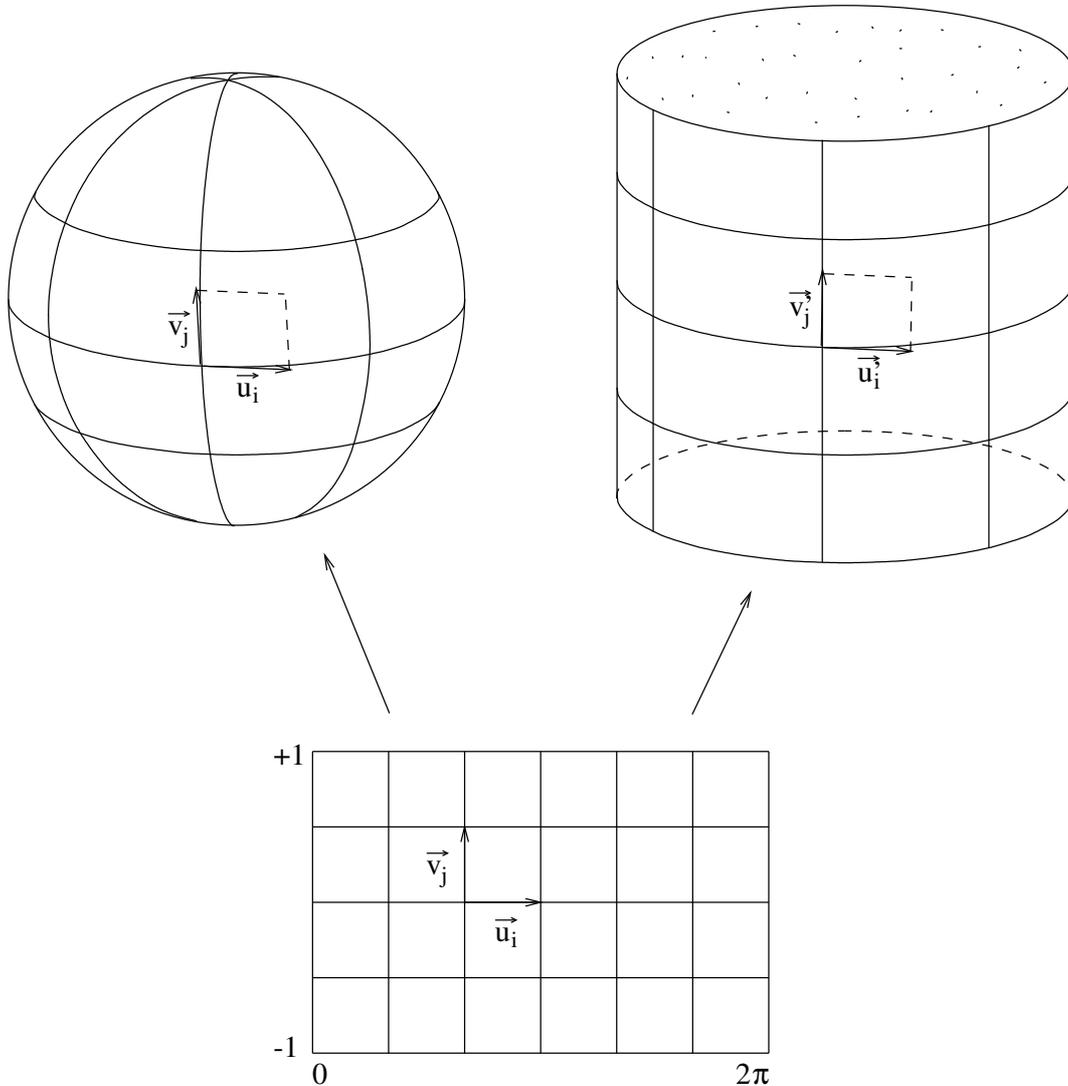


Figure 19. L'aire du cylindre et de la sphère privée des pôles.

Enfin, la base $(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial z}, \vec{r})$ est orthonormée directe donc, si $\vec{u} = X\frac{\partial}{\partial\theta} + Y\frac{\partial}{\partial z}$ et $\vec{v} = X'\frac{\partial}{\partial\theta} + Y'\frac{\partial}{\partial z}$ sont deux vecteurs tangents à la sphère en M alors $\omega_M^{S^2}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{r} = XY' - YX' := d\theta \wedge dz(\vec{u}, \vec{v})$.

Ainsi, avec les coordonnées θ et z , le cylindre et la sphère privée des pôles ont le même domaine de carte, $[0, 2\pi[\times]-1, +1[$, et la même forme d'aire, $d\theta \wedge dz$. Ils sont donc de même nature. En particulier, leurs aires sont égales. En effet, l'aire est calculée par intégration de la forme d'aire sur le domaine de carte. Par conséquent,

$$\mathcal{A}_C = \int_C \omega^C = \lim_{\Delta_i, \Delta_j \rightarrow 0} \sum_{i,j} d\theta \wedge dz(\vec{u}_i, \vec{v}_j) = \int_{[0, 2\pi[\times]-1, +1[} d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{+1} dz = 2\pi \times 2 = 4\pi.$$

De même, $\mathcal{A}_{S^2} = \int_{S^2} \omega^{S^2} = \lim_{\Delta_i, \Delta_j \rightarrow 0} \sum_{i,j} d\theta \wedge dz(\vec{u}_i, \vec{v}_j) = 4\pi$.

On retrouve bien $\mathcal{A}_C = \mathcal{A}_{S^2}$.

4. Où les mathématiques servent la cartographie.

L'égalité des formes d'aire prouvée plus haut a une autre conséquence intéressante, en cartographie.

D'abord, la projection horizontale π de la sphère privée des pôles sur le cylindre permet de réaliser une carte, au sens géographique du terme, de la Terre privée des pôles, parce que réaliser une carte de la Terre revient à considérer une projection de la sphère sur tout ou partie d'un plan. Pour l'application π , le plan est celui du cylindre une fois qu'on l'a coupé le long d'une génératrice (un segment vertical) et déployé pour le mettre à plat.

De plus, on a vu que l'application π est l'identité pour les cartes choisies sur les deux surfaces; ceci implique que cette projection conserve les aires i.e. que tout domaine de la sphère privée des pôles a la même aire que son image par π . La projection ci-dessus est connue des géographes depuis longtemps sous le nom de "projection de Lambert cylindrique équivalente directe" (la dénomination anglaise "Lambert cylindrical equal-area projection" est plus explicite). Jean-Henri Lambert ⁽¹⁾ a été le premier à considérer en 1772 une projection cylindrique i.e. de la sphère sur le cylindre qui conserve les aires. Néanmoins, cette projection induit beaucoup de distorsions dans la représentation des régions de la Terre puisque le voisinage de l'équateur où le cylindre est tangent à la sphère est peu affecté par la projection tandis que le voisinage des pôles est très distendu. La carte suivante permet d'apprécier les déformations. Pour une définition quantitative de la notion de distorsion et l'étude du problème mathématique que constitue le choix d'une méthode qui la minimise, voir [Mi].

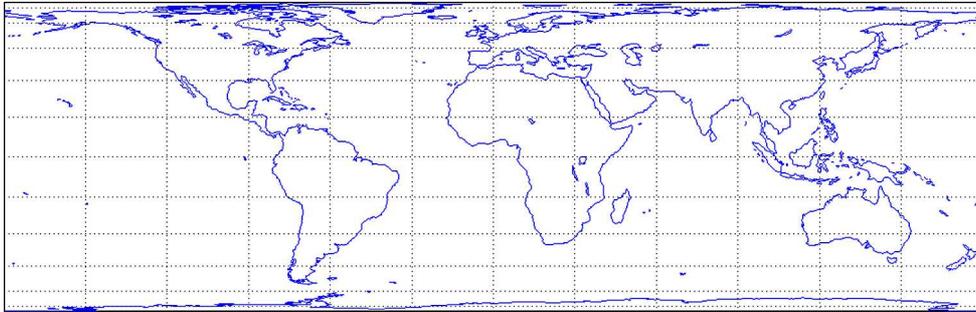


Figure 20. La Terre représentée avec la projection de Lambert (Source: S. Botton. IGN).

De multiples autres projections ont été inventées par la suite pour tenter de réduire les distorsions tout en conservant les égalités d'aires: la projection de Gall-Peters, la projection conique d'Albers, la projection de Mollweide, ... Et aujourd'hui, les cartes qui conservent les aires des domaines continuent à intéresser les cartographes quand il s'agit, par exemple, de représenter l'étendue des forêts humides, l'importance de migrations de papillons ou bien l'accès des personnes aux équipements médicaux selon les régions.

Enfin, de nombreuses autres projections existent pour représenter la Terre en fonction des caractères que l'on veut privilégier: les marins, par exemple, apprécient plutôt des cartes conservant le caractère conforme i.e. préservant les

⁽¹⁾ ou bien Johann Heinrich Lambert, né à Mulhouse en 1728 et mort à Berlin en 1777. Lui aussi, comme Archimède, s'est intéressé au nombre π ; il a démontré en 1768 qu'il est irrationnel. Il a aussi développé la géométrie de la règle et calculé les trajectoires de comètes. Il a également participé à la création de la photométrie, a réalisé des travaux novateurs sur les géométries non euclidiennes et a joué un rôle précurseur dans la logique symbolique (Le Petit Larousse, 2005). La démonstration du fait que π est irrationnel est aujourd'hui un exercice de première année d'université.

angles, afin de pouvoir maintenir le cap en pleine mer, même si l'utilisation du GPS (Global Positioning System pour les USA) ou bien de Galiléo (pour l'Europe) modifient les habitudes. Voir [Le] pour en savoir plus sur l'histoire de la cartographie.

5. Vers la topologie symplectique.

On a vu précédemment les trois formes d'aire standard, sur \mathbf{R}^2 , sur le cylindre et sur la sphère privée de ses pôles, respectivement, ω_0 , ω^C et ω^{S^2} . Ce sont aussi les *formes symplectiques* standard de \mathbf{R}^2 , C et $S^2 \setminus \{N, S\}$. Les trois objets mathématiques \mathbf{R}^2 , C et $S^2 \setminus \{N, S\}$ sont des *surfaces*, aussi appelées *variétés de dimension 2* car il suffit de deux coordonnées pour repérer chacun de leur point tandis qu'une seule ne suffit pas. Voir [Ab] pour comprendre la notion de dimension. En fait, pour les surfaces, les formes d'aire sont exactement les formes symplectiques. Ainsi, les surfaces munies de leur forme d'aire constituent les premiers exemples de *variétés symplectiques*. Cependant, les surfaces sont des objets géométriques bien connus de ce point de vue; aussi, la géométrie symplectique intéresse plutôt des objets géométriques de dimension plus grande, i.e. dont chaque point M peut être repéré par n coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) qui forment un n -uplet de \mathbf{R}^n avec $n > 2$, à savoir les *variétés de dimension n* .

Maintenant comment est-il pertinent de généraliser la propriété de conservation des aires en dimension plus grande que deux? En demandant à conserver les volumes ou bien en demandant toujours à conserver les aires des objets de dimension 2 inclus dans la variété de dimension plus grande que 2?

Cette seconde voie est intéressante car les applications qui conservent les aires ont des propriétés particulières. Par exemple, le théorème de Poincaré-Birkhoff, dernier théorème géométrique énoncé par Henri Poincaré en 1912, et qui sera démontré par Georges Birkhoff en 1925, est maintenant considéré comme le premier théorème global de topologie symplectique. H. Poincaré l'a découvert, ainsi que beaucoup d'autres résultats, alors qu'il réfléchissait au problème dit des trois corps, amené par la physique (Voir [Bo] pour en savoir plus sur ce problème). Ce théorème stipule que toute application bicontinue d'un anneau dans lui-même, qui conserve l'aire, et qui fixe globalement chacun des deux bords, de façon à ce que les points du bord intérieur soient déplacés en sens inverse par rapport à ceux du bord extérieur, admet au moins deux points fixes.

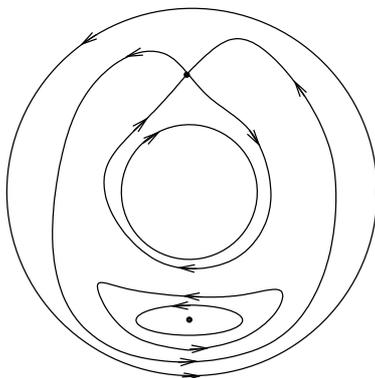


Figure 21. Un exemple de “twist” de l’anneau avec deux points fixes.

Il existe un résultat analogue pour le tore \mathbf{T}^2 , surface qui a la forme d’une chambre à air (d’une bouée ou d’un Paris-Brest). C’est en cherchant à généraliser ce résultat que la notion d’application préservant la *forme symplectique* d’une variété s’est imposée. En 1965, V. I. Arnold a énoncé des conjectures qui fournissent un minorant du nombre de points fixes de telles applications en fonction de la topologie de la variété. Les premiers résultats à propos de ces conjectures ont été démontrés en 1979 par Y. Éliashberg. Une preuve de la conjecture générale a été publiée en 1997 par K. Fukaya et K. Ono, en utilisant des techniques mises au point dans les années 1990.

Les variétés munies d’une forme symplectique sont toujours de dimension paire. Lorsqu’elles sont utilisées en physique, les coordonnées correspondent aux degrés de liberté du système et il y a autant de coordonnées de position que de vitesse.

Une *forme symplectique* ω sur une variété V de dimension $2n$ est une opération qui, à tout couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) de l’espace tangent à V en un point M , associe un nombre réel, noté $\omega(\vec{u}, \vec{v})$, et qui vérifie les quatre propriétés suivantes:

1. ω est antisymétrique: $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = -\omega(\vec{v}, \vec{u})$;
2. ω est bilinéaire: $\omega(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v}) + \omega(\vec{u}', \vec{v})$ et $\omega(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = \lambda \omega(\vec{u}, \vec{v})$ pour tout nombre réel λ ;

3. ω est non dégénérée;

4. ω est fermée.

Les propriétés 1. et 2. impliquent que $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(M) u_i v_j$ si $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ avec

$$a_{ji}(M) = -a_{ij}(M) \text{ dans } \mathbf{R}.$$

La propriété 3. signifie que chaque matrice $(a_{ij}(M))_{1 \leq i, j \leq n}$, où M désigne un point quelconque de la variété, est inversible.

La propriété 4. signifie que les coefficients $a_{ji}(M)$ vérifient une relation, dite de fermeture, de la forme $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} = 0$ pour tous $1 \leq i, j, k \leq n$. Cette relation exprime en mécanique que les forces dérivent d'une énergie potentielle. La propriété 4. implique, en particulier, que l'aire de toute surface à bord contenue dans la variété ne change pas lors de petites déformations de cette surface qui laissent le bord invariant.

Le formalisme précédent apparaît dans les travaux de mécanique céleste de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) lorsqu'il s'est intéressé au mouvement des planètes et, en particulier, à la stabilité séculaire du grand axe de l'orbite elliptique d'une planète dans son environnement céleste (Voir [Ig]).

L'adjectif "symplectique" quant à lui a été inventé par le mathématicien allemand Hermann Weyl (1885-1955): c'est la traduction grecque de l'adjectif "complexe" qui a déjà une signification mathématique par ailleurs (penser aux nombres complexes par rapport aux nombres réels). Ces deux adjectifs signifient "entrelacé avec", "tressé avec". "Symplectique" a ainsi été choisi pour signifier qu'une forme ω qui vérifie les quatre propriétés ci-dessus et la structure complexe usuelle sont imbriquées. En effet, \mathbf{R}^2 peut être identifié à \mathbf{C} puisque pour tout nombre complexe z de \mathbf{C} il existe deux nombres réels a et b tels que $z = a + ib$ et, de même, \mathbf{R}^{2n} peut être identifié à \mathbf{C}^n . Avec l'identification précédente, on peut considérer que la forme ω agit sur les couples de n -uplets de \mathbf{C}^n et on vérifie alors des compatibilités de ω avec la multiplication par le nombre complexe i dans \mathbf{C}^n .

La géométrie des variétés symplectiques intervient toujours aujourd'hui en mécanique céleste via l'étude de systèmes dynamiques qui sont des ensembles d'objets dont l'évolution dans le temps est décrite par des lois bien définies ([AI], [Au]). Elle est également utilisée en optique géométrique i.e. pour l'étude de la réflexion et de la réfraction de la lumière: en effet, les faisceaux de rayons lumineux peuvent être assimilés à des familles de droites orientées qui constituent une variété symplectique de dimension 4 ([AI]). Ainsi, l'étude de la géométrie des variétés symplectiques en tant que telles pour permettre de les reconnaître, de les distinguer, de les classer, de connaître leurs propriétés, etc s'est imposée: c'est actuellement un domaine identifié des mathématiques que l'on désigne sous le nom de "topologie symplectique". Initié par V. Arnold en 1965, il connaît des développements importants depuis que M. Gromov a introduit en 1985 de nouvelles techniques d'étude des variétés symplectiques calquées sur des méthodes qui s'appliquent aux variétés complexes. On peut ainsi démontrer des théorèmes déconcertants, tels le théorème dit du chameau, qui mettent en lumière une rigidité des variétés symplectiques qui n'est pas encore totalement cernée aujourd'hui.

Enfin, alors que les propriétés globales des variétés de dimension 1, 2 et 3 sont relativement bien comprises en géométrie ainsi que celles des variétés de dimension supérieure ou égale à 5, les propriétés différentielles des variétés de dimension 4 restent mystérieuses. Parmi ces variétés, les surfaces complexes, qui, au voisinage de chaque point se présentent comme \mathbf{C}^2 , sont parmi les plus accessibles. Elles aussi sont relativement bien comprises: elles appartiennent à un nombre déterminé de types bien décrits. Et comme les variétés symplectiques sont une généralisation des surfaces complexes, il est permis de penser que leur compréhension constitue sans doute un tremplin utile pour l'étude des variétés de dimension 4 du point de vue différentiel. À suivre.

Références.

Accessibles à tous.

[Ab] E.A. ABBOTT, *Flatland*, Denoël (1998).

[AI] M. AUDIN & P. IGLÉSIAS, *La géométrie symplectique*, *La Recherche* **271** (25), 1246-1252.

[Ba] R. BALIAN, J.-M. BISMUT, A. CONNES, J.-P. DEMAILLY, L. LAFFORGUE, P. LELONG & J.-P. SERRE, *Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique. Comment les réenseigner.*, *Les Cahiers du débat*, *Fondation pour l'innovation politique* (novembre 2004)

[Be] B. BETTINELLI, *Le trésor d'Archimède*, IREM de Besançon (1988).

- [Bo] U. BOTTAZZI, *Poincaré. Philosophe et mathématicien*, *Les génies de la Science* **4** (août-novembre 2000)
- [Ic] J.-P. ICIKOVICS (Sous la direction de), *Archimède, Les cahiers de Science et Vie* **HS18** (déc. 1993)
- [Le] J. LEFORT, *L'aventure cartographique*, *Belin Pour la Science* (2004).
- [Vi] B. VITRAC, *Archimède, Les génies de la science* **21** (nov. 2004-fév. 2005), 72-81

Universitaires.

- [Ar] V. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, *Éditions Mir* (1976).
- [BB] H. BOUALEM & R. BROUZET, *La planète \mathbf{R} . Voyage au pays des nombres réels*, *Dunod* (2002).
- [Bo] J. BONIFACE, *Les constructions de nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, *Ellipses* (2002).
- [Eb] H. D. EBBINGHAUS & AL., *Les nombres. Leur histoire, leur place et leur rôle*, *Vuibert* (1998).
- [Ig] P. IGLÉSIAS, *Symétries et moment*, *Hermann* (2000).
- [McDS] D. MCDUFF & D. SALAMON, *Introduction to symplectic topology*, *Oxford University Press* (1998).
- [Mi] J. MILNOR, *A problem in cartography*, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 1101-1112.

VÉRONIQUE LIZAN-ESQUERRÉTOU . I.U.F.M. MIDI-PYRÉNÉES . SITE DE RANGUEIL . 118, ROUTE DE NARBONNE . 31078 TOULOUSE CEDEX 04 . FRANCE . COURRIEL : VLIZAN@TOULOUSE.IUFM.FR